Arias Cabezas, J. M. y Maza Sánchez, I. (2023). Matemáticas I, 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, Nueva etapa. Madrid, Editorial Bruño del Grupo ANAYA. ISBN: 9788469634561

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Estudio STEAM sobre las cónicas

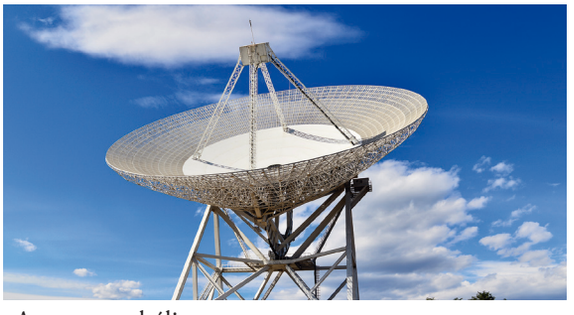
Esta situación de aprendizaje sobre el estudio STEAM de las cónicas es una herramienta eficaz para integrar los elementos curriculares del estudio de las cónicas mediante tareas y actividades significativas y relevantes para resolver problemas de manera creativa y cooperativa, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión y la responsabilidad. Se parte de una experiencia previa, como es la introducción histórica, y está convenientemente contextualizada y es muy respetuosa con el proceso de desarrollo integral del alumnado en todas sus dimensiones, teniendo en cuenta sus potencialidades, intereses y necesidades, así como las diferentes formas de comprender la realidad, como se muestra en las aplicaciones de las cónicas.

Orientaciones de posibles contenidos para desarrollar la Situación de Aprendizaje

1. **Introducción histórica:** se puede buscar información sobre algunos matemáticos destacados en el estudio de las cónicas como por ejemplo Menecmo (350 a.C.), Apolonio (262-190 a.C.), Arquímedes (287-212 a.C.), Hipatia (370-415 a.C.), Descartes (1596-1650), Kepler (1570-1630), Newton (1642-1727), etc.
2. **Aplicaciones de la circunferencia.**
   Se pueden buscar aplicaciones en:
   - **Los transportes:** por ejemplo, las ruedas de la bicicleta, de los coches, de los trenes, etc.
   - **El deporte:** por ejemplo, los balones de baloncesto, de fútbol, la superficie de las canchas de baloncesto, de los campos de fútbol, etc.
   - **La naturaleza:** por ejemplo, los anillos que se ven en la madera al cortar el tronco de un árbol y que nos dan información sobre su significado.
3. **Aplicaciones de la elipse**
   Se pueden buscar aplicaciones en:
   - **Astronomía:** las leyes de Kepler.
   - **Óptica:** la fabricación de lentes elípticas.
   - **Medicina:** la desintegración de cálculos renales con un «litotriptor».
4. **Aplicaciones de la hipérbola.**
   Puedes buscar aplicaciones similares a la elipse y también consultar sobre:
   - **El sistema de navegación Loran** (*long range navigation,* su acrónimo en inglés).
   - **El reloj de sol.** Desde hace mucho tiempo se sabe que, cuando el Sol recorre el cielo a lo largo de un día, la sombra que proyecta un objeto fijo describe una hipérbola.
5. **Aplicaciones de la parábola.**
   - **Antenas parabólicas:** un satélite envía información dirigida a la Tierra, siendo los rayos perpendiculares a la directriz independientes de la distancia a la que se encuentre el satélite.
   - **Faros de automóviles y telescopios:** rayos de luz perpendiculares a la directriz y reflejados por un paraboloide (parábola en tres dimensiones).

Litotriptor

Reloj de sol.


Antena parabólica.

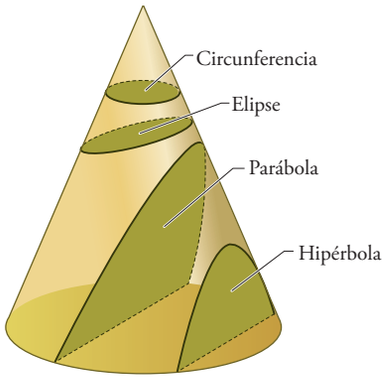
© Grupo Editorial Bruño, S. L.

1 Trabajo de programación en 2D

Generar en **GeoGebra 2D** los siguientes elementos: la circunferencia, las posiciones de la circunferencia con respecto a una recta o dos circunferencias, la potencia de un punto respecto a una circunferencia, el eje radical de dos circunferencias, el centro radical de tres circunferencias, la elipse, la hipérbola y la parábola, el sistema solar en 2D, problemas de lugares geométricos como la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo o la circunferencia.

2 Trabajo de programación en 3D

Generar en **GeoGebra 3D** los siguientes elementos: el cono de Apolonio, las secciones cónicas, el sistema solar en 3D y las siguientes cuádricas: el elipsoide, el hiperboloide de una hoja y de dos hojas, el paraboloide elíptico y el hiperbólico.



Ecuaciones de las cuádricas

- Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Hiperboloide de dos hojas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
- Paraboloide elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
- Paraboloide hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

- **Impresión en 3D**

  Imprimir en 3D el cono de Apolonio y las cuádricas.

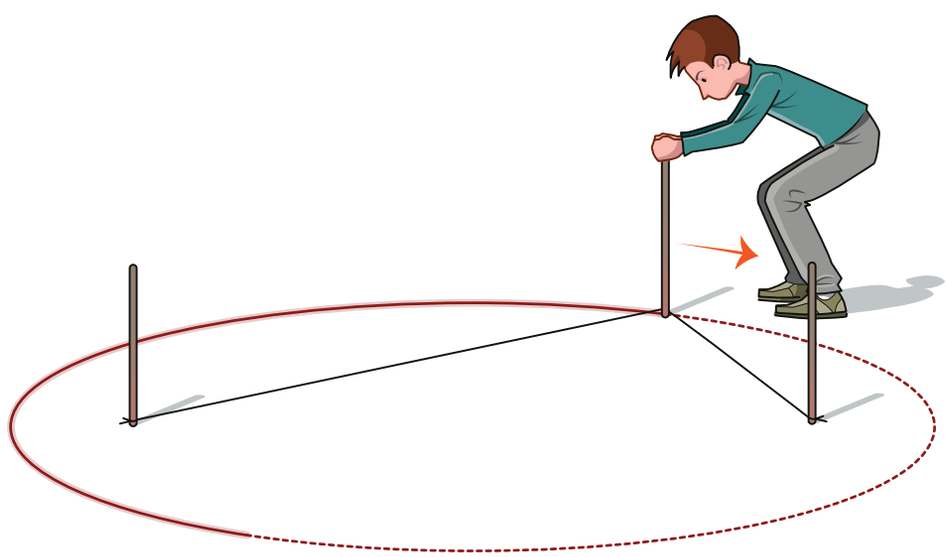
- **Trabajo en vídeo**

  Realizar un vídeo con las distintas formas de las secciones cónicas para dar origen a circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas.

- **Jardinería**

  Construir un jardín con cónicas: elipse, hipérbola y parábola.

  Es muy conocido el «método del jardinero» para dibujar la elipse, como se representa en el dibujo.

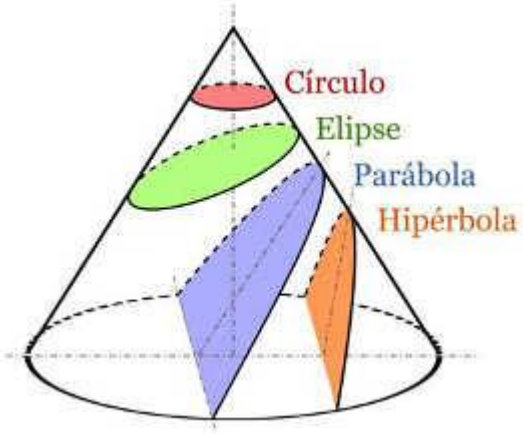


© Grupo Editorial Bruño, S. L.

TRABAJO REALIZADO POR UNO DE LOS GRUPOS DE ALUMNOS

HISTORIA DE LAS CÓNICAS Y SUS APLICACIONES

A lo largo de la historia hubo muchos investigadores que fueron hallando, perfeccionando y descubriendo todo aquello relacionado con las cónicas.



Se denomina sección cónica o simplemente cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice. Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección resultante es un círculo. Si el plano está ligeramente inclinado, el resultado es una elipse. Si el plano es paralelo al costado del cono, se produce una parábola y si el plano corta ambas extensiones se produce una hipérbola.

El surgimiento de las secciones cónicas está estrechamente ligado a la resolución de uno de los tres más famosos problemas matemáticos de la historia antigua de la Grecia helénica. Estos problemas consistían en hacer lo siguiente, sin usar más que un compás y una regla -de un solo lado- sin marcas:

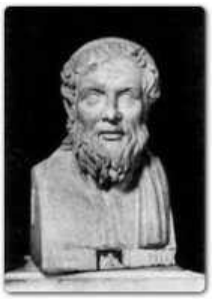
- Cuadrar un círculo
- Trisecar un ángulo
- Duplicar un cubo

Por el año 433 a. C. una peste asoló Grecia. Las autoridades consultaron el oráculo acerca de cómo contrarrestar la epidemia, la respuesta fue que debía duplicarse el altar cúbico dedicado a Apolo, a fin de obtener más ofrenda. Con asombro y sin comprenderlo, los trabajadores observaban que, lejos de duplicar el volumen del cubo, éste se hacía ocho veces más grande. Era, ni más ni menos, que un problema de duplicación del cubo.

De estos geómetras, matemáticos y filósofos sobresalen los siguientes:

- **Menecmo (380-320 a.C.)** fue discípulo de Platón y Eudoxo, y tutor de Alejandro Magno, como Aristóteles. Su estudio teórico de las secciones cónicas fue célebre en la antigüedad, por eso estas curvas tuvieron el nombre de curvas de Menecmo. Trató de resolver el problema de la duplicación del cubo, utilizando la parábola y la hipérbola, pero quien descubrió estas curvas fue el matemático griego Apolonio (262-190 A.C.) el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía.

- **Apolonio** descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas. Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Quizás las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio de las cónicas son las llamadas propiedades de reflexión.



- **Arquímedes (287-212 a.C.)** logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos.

En la actualidad esta propiedad se utiliza para los radares, las antenas de televisión y espejos solares. La propiedad análoga, que nos dice que un rayo que parte del foco se refleja paralelamente al eje sirve para que los faros de los automóviles concentren el haz en la dirección de la carretera o para estufas. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco, esta propiedad se utiliza en los grandes estadios para conseguir una superficie mayor iluminada.

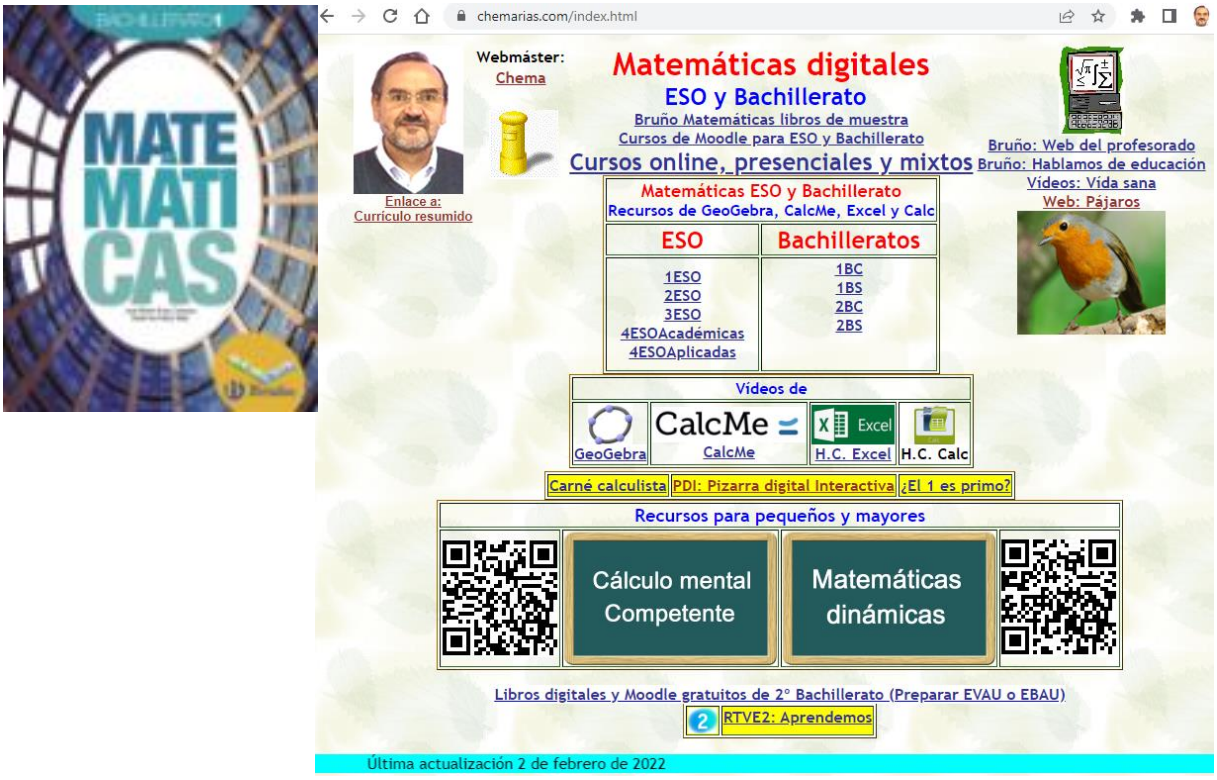
-**Hipatia de Alejandría (355-370 a.C.)**: es la primera mujer matemática de la que se tiene conocimiento razonablemente seguro y detallado. La obra de esta mujer marca un punto de inflexión entre la cultura del razonamiento griego y el oscurantismo del mundo medieval. De su obra se conoce muy poco, aun así se sabe que fue autora de tres importantes trabajos: un comentario a la Aritmética de Diofanto de Alejandría, el Canón Astronómico y un comentario a las Secciones Cónicas de Apolonio de Perga.

- **René Descartes (1596-1650)**: desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas, esto se lo debemos a Jan de Witt (1629-1672). Sin lugar a dudas las cónicas son las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física.

Por ejemplo, las propiedades de reflexión son de gran utilidad en la óptica. Pero sin duda lo que las hace más importantes en la física es el hecho de que las órbitas de los planetas alrededor del sol sean elipses y que, más aún, la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica.

- **Johannes Kepler (1570-1630)** descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen al sol como uno de sus focos en el caso de la tierra la excentricidad es 0.017 y los demás planetas varían desde 0.004 de Neptuno a 0.250 de Plutón. Más tarde el célebre matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

- **José María Arias Cabezas** nació en 1948, España (León). Es profesor de ESO y Bachillerato en el I.E.S Mariano José de Larra y del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de la Universidad Autónoma de Madrid. Asignatura: TICM: Tecnologías de la información y la comunicación aplicadas a la educación matemática de ESO y Bachillerato. Autor de Matemáticas de ESO y Bachillerato de la editorial Bruño del grupo ANAYA. Es el creador de un jardín matemático, probablemente el único de España, y de una página web **https://chemarias.com/index.html** con distintas aplicaciones matemáticas.



El jardín consta de una serie de plantas y flores que forman cónicas (parábola, hipérbolas, elipses, círculos). También ha publicado diversos libros de texto de Matemáticas.

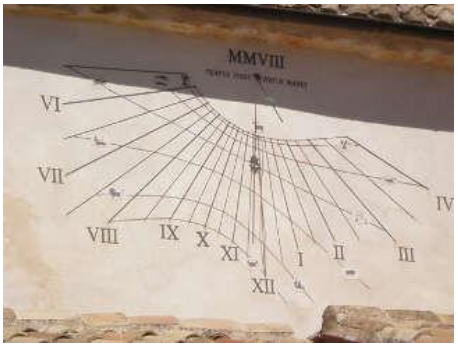
Vídeo

Ahora bien, gracias a los descubrimientos y trabajos realizados por esta comunidad de científicos, filósofos y matemáticos podemos aplicar en nuestro día a día sus hallazgos.

- **Aplicaciones de la elipse**: aparte de su utilidad en la física, tiene una importancia en la medicina ya que para la desintegración de cálculos renales se utiliza un aparato llamado "litotriptor", usando un reflector elíptico para que concentre las ondas de choque producidas por un generador de ondas en el cálculo. En óptica se utilizan lentes elípticas. Asimismo, en arquitectura, se construyen techos elipsoidales (llamados comúnmente capilla de los secretos) donde se puede oír a una persona ubicada en un foco desde otro foco y la otra persona que se encuentra en el medio de los dos, no podrán escuchar nada. En astronomía, ya que las órbitas que describen los planetas alrededor del Sol son elípticas, aunque esta técnica también se aplica a las órbitas de los átomos.

- **Aplicaciones de la parábola**: se utiliza por ejemplo en las antenas parabólicas, donde un satélite envía información dirigida a la Tierra siendo los rayos perpendiculares a la directriz dependiendo de la distancia a la que se encuentre el satélite. Luego, al reflejarse en el plato de la antena, los rayos convergen en el foco en donde conectado a un receptor decodifica la información. Esta propiedad es aplicada también en las lámparas sordas y faros de automóviles, siendo los rayos de luz perpendiculares a la directriz y reflejados por un paraboloide (parábola en tres dimensiones), esta propiedad también se aplica a los hornos solares, telescopios y algunos micrófonos utilizados en los deportes. También podemos ver su aplicación en los cables colgantes, que tienen forma parabólica, los chorros de agua que salen de un surtidor.

- **Aplicaciones de la hipérbola**: Comparte propiedades similares a las de la elipse, si se dirige un haz de luz dirigida a un foco f se reflejará antes de llegar a él en la hipérbola en dirección del foco f`. Además el sistema de navegación Loran (long range navigation, su acrónimo en inglés) utiliza la propiedad de reflexión de la hipérbola (basándose en unas estaciones de radio maestra y otra secundaria que son percibidas por un barco en altamar). También podemos considerar que el espejo tiene forma hiperbólica, ya que si un rayo de luz que parte de uno de los focos choca contra el espejo, se refleja directamente alejándose del otro foco. Respecto a los cometas, cualquiera que provenga del exterior del Sistema Solar y sea atraído por el Sol describirá una órbita hiperbólica, teniendo un foco al sol y saldrá nuevamente del sistema solar.



.

Sin embargo destaca sobre cualquier otra aplicación el reloj de Sol. Desde hace mucho tiempo se sabe que, cuando el Sol recorre el cielo a lo largo de un día, la sombra que proyecta un objeto fijo describe una curva cónica. Esto se puede comprobar experimentalmente si se va marcando, por ejemplo, cada media hora, sobre una superficie plana el límite de la sombra que proyecta un objeto cualquiera. Los relojes de sol se fundamentan en este hecho. Están provistos de un marcador o estilete, llamado gnomon, que proyecta su sombra sobre una superficie plana donde están señalizadas las horas. El extremo de la sombra indica la hora solar correspondiente.

El sol, por lo lejano que está, se considera como un foco puntual de luz. La línea imaginaria que le une con el extremo del gnomon recorre a lo largo del día parte de la superficie de un cono, también imaginario. La superficie de este cono se corta por el plano del reloj donde se observa la sombra del extremo del gnomon. Por eso, la trayectoria que sigue esa sombra es la de una cónica.

- **Aplicaciones de la circunferencia**: se aplica a diversos campos, de los cuales sobresalen:

  - En música: los cds son una placa circular con un borde que termina siendo una circunferencia. Al centro se observa un orificio redondo que sirve para tomar el cd y para que la radio lo reproduzca. Estas piezas de la electrónica requieren de mucha precisión para su correcto funcionamiento. Por lo tanto para su fabricación se usan las técnicas del radio y el diámetro.
  - En las armas: se utiliza para designar a los calibres de las diferentes armas que existen, en las cuales el cañón por el que salen las balas del arma debe ser medido el tamaño de su diámetro usando una medida milimétrica para lograrlo.
  - En el transporte: destacan las ruedas de los medios de transporte, por ejemplo las de la bicicleta. Desde el centro de la rueda salen una cantidad de alambres delgados, los rayos, que equivaldrían a los radios de la rueda, los cuales mantienen su forma circular característica.
  - En el deporte: se aplica en los balones, en las canchas de baloncesto, en los campos de fútbol…
  - En la naturaleza: si nos detenemos a mirar un poco a nuestro alrededor observaremos que al cortar el tronco de un árbol, vemos que presenta muchos anillos y gracias al tamaño de cada uno de esto, su diámetro, podemos saber qué edad tiene el árbol.

BIBLIOGRAFÍA:
Arias y Maza. (2022). MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO NUEVA ETAPA. BRUÑO del grupo ANAYA. ISBN 9788469633434
http://chemarias.com
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/conicas_jpj/Conicas.htm
http://www.slideshare.net/tito.carrreras/secciones-cnicas-2275430
http://m.monografias.com/trabajos82/conicas-y-sus-aplicaciones/conicas-y-sus-aplicaciones.shtml
http://aplicacionesdeconicasdanielag.blogspot.com.es

Integrantes del grupo y en qué han trabajado:

- Aya Badreddine: búsqueda de información sobre las cónicas y aplicaciones.
- Sylwia Bilas: GeoGebra del jardín y de las cónicas, átomo y Sistema Solar.
- Mar del Camino: búsqueda de información sobre las cónicas, aplicaciones y jardín con tulipanes.
- Miguel Ángel Fraile: coordinador.
- Sara Uceda: GeoGebra del jardín y trabajo con Gimp y CalcMe.

12

Arias Cabezas, J. M. y Maza Sánchez, I. (2023). Matemáticas I, 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, Nueva etapa. Madrid, Editorial Bruño del Grupo ANAYA. ISBN: 9788469634561

Cónicas como lugares geométricos

1 Secciones cónicas y circunferencia
2 Posiciones relativas de rectas y circunferencias
3 Elipse
4 Hipérbola
5 Parábola y problemas de lugares geométricos

¿Para qué sirven las cónicas?

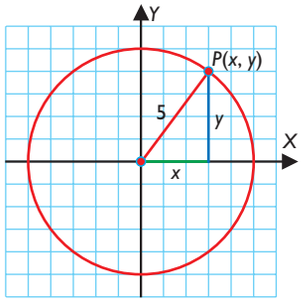
Existen aplicaciones de las cónicas en muchas actividades relacionadas con STEAM. Por mencionar un ejemplo del campo de la Física, el enunciado de la primera ley de Kepler dice: «Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse».

ELABORA

en tu cuaderno una portada con una imagen y un breve texto de una aplicación de las cónicas.

1 SECCIONES CÓNICAS Y CIRCUNFERENCIA

ENGÁNCHATE

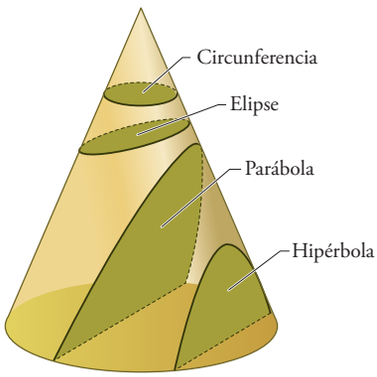


EXPLORA

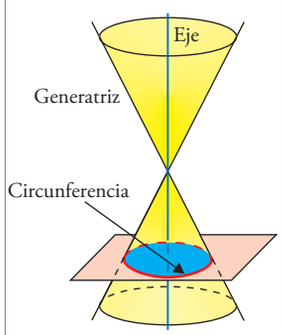
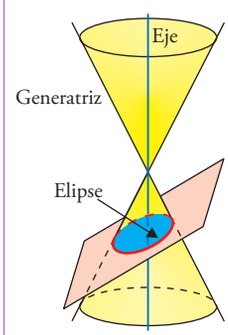
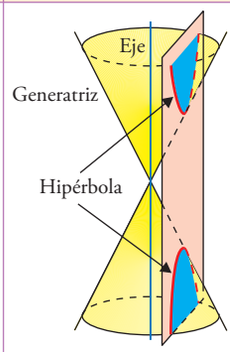
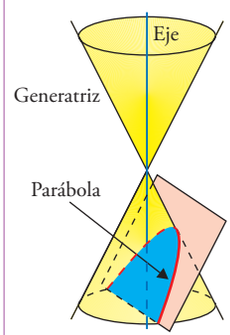
Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo del dibujo, escribiendo los cuadrados de los catetos en el primer miembro. ¿Qué fórmula obtienes?

1.1 SECCIONES CÓNICAS

Las **secciones cónicas** son las intersecciones de un plano, que no pasa por el vértice, con un cono doble. Según sea la inclinación y la posición del plano respecto del eje y de la generatriz del cono doble, da origen a elipses, hipérbolas o parábolas. La circunferencia es un caso particular de la elipse.

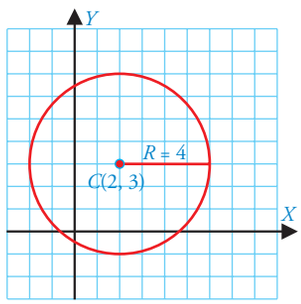


Cono de Apolonio.

Circunferencia	Elipse	Hipérbola	Parábola
			
El plano es perpendicular al eje y no pasa por el vértice.	El plano es oblicuo al eje y no es paralelo a la generatriz.	El plano es paralelo al eje. Se obtienen dos curvas.	El plano es oblicuo al eje y paralelo a la generatriz.

EJERCICIO RESUELTO

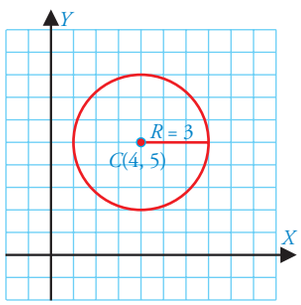
1 **Halla la ecuación general de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(2, 3)$ y radio $R = 4$**



$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2 \Rightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16 \Rightarrow$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0}$



1.2 CIRCUNFERENCIA DE CENTRO $C(a, b)$ Y RADIO R

La **circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio R** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro es R. Su ecuación es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

La **ecuación general de la circunferencia** es:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

Es una ecuación de 2.º grado en dos variables x, y, tal que los coeficientes de x^2 y de y^2 son iguales y no aparece el término en xy

Dada la ecuación general de la circunferencia, para hallar el **centro** y el **radio** se aplica:

$$C(a, b) = C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \qquad R = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$$

■ Demostración en detalle en la página 250.

EJERCICIO RESUELTO

2 **Halla el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$**

$$C\left(\frac{8}{2}, \frac{10}{2}\right) = C(4, 5)$$

$$R = \sqrt{4^2 + 5^2 - 32} = \sqrt{16 + 25 - 32} = \sqrt{9} = 3$$

1.3 POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

La **potencia de un punto *P*, respecto a una circunferencia *c*,** es el producto constante de los segmentos:

$$p = PA \cdot PB$$

Para obtener la potencia de un punto respecto a una circunferencia se sustituyen las coordenadas del punto P en la ecuación general de la circunferencia.

Un punto P es exterior a la circunferecia, está en ella o es interior, según la potencia sea positiva, nula o negativa.

Observa

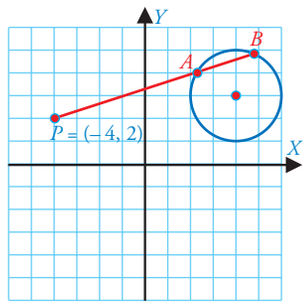
A y B son los puntos de intersección de una recta que pasa por P con la circunferencia.

EJERCICIO RESUELTO

3 **Halla la potencia del punto $P(-4, 2)$ respecto de la siguiente circunferencia. Haz el dibujo y comprueba que, como es positivo, el punto P está en el exterior.**

$c: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$$p(P, c) = (-4)^2 + 2^2 - 8 \cdot (-4) - 6 \cdot 2 + 21 =$$
$$= 16 + 4 + 32 - 12 + 21 = \mathbf{61}$$



1.4 EJE Y CENTRO RADICAL

El **eje radical de dos circunferencias** es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de las dos circunferencias.

Si las dos circunferencias se cortan, es la recta que pasa por los dos puntos de corte.

Para hallar la ecuación del eje radical se restan las dos ecuaciones de la circunferencia; si alguno de los coeficientes de x^2 e y^2 es distinto de uno, se divide previamente por su coeficiente.

EJERCICIO RESUELTO

4 **Halla el eje radical de las siguientes circunferencias. Haz el dibujo con las dos circunferencias y el eje radical.**

$c_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

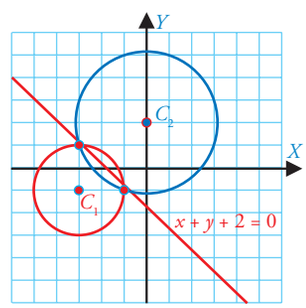
$c_2: x^2 + y^2 \quad - 4y - 6 = 0$

Restando las dos ecuaciones obtenemos:

$6x + 6y + 12 = 0$

Simplificando entre 6 obtenemos:

$\mathbf{x + y + 2 = 0}$



Se define el **centro radical de 3 circunferencias** como el punto que tiene igual potencia respecto a las 3 circunferencias. Para hallarlo, se determinan dos ejes radicales y se resuelve el sistema obtenido.

ELABORA

1 Dibuja la circunferencia que tiene el centro en el origen de coordenadas, y radio, $R = 4$, y halla mentalmente su ecuación.

2 Dibuja y halla la ecuación general de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(1, -2)$ y radio $R = 3$

3 Halla el centro y el radio de la siguiente circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$. Haz el dibujo.

4 Halla la potencia del punto $P(5, 1)$ respecto de la siguiente circunferencia. Haz el dibujo.

$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 13 = 0$

5 Halla el eje radical de las siguientes circunferencias. Realiza el dibujo con las dos circunferencias y el eje radical.

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

2 POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

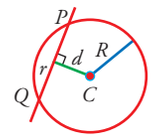
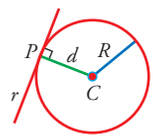
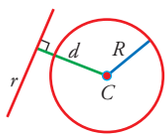
ENGÁNCHATE

EXPLORA

De las siguientes ecuaciones, ¿cuál corresponde a una recta y cuál a una circunferencia? Calcula mentalmente: en la recta, la pendiente y la ordenada en el origen, y en la circunferencia, el centro y el radio.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ b) $y = 2x - 5$

2.1 POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

Secante	
	$d < R$
Tangente	
	$d = R$
Exterior	
	$d > R$

Una recta puede ser secante, tangente o exterior a una circunferencia. Su posición relativa se puede estudiar de dos formas:

a) Resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

b) Hallando la distancia, *d*, del centro de la circunferencia a la recta; el radio, *R*, de la circunferencia, y comparando los valores.

En ambos casos se pueden presentar tres situaciones:

- La recta es **secante** a la circunferencia si al resolver el sistema se obtienen dos puntos, o bien $d < R$
- La recta es **tangente** a la circunferencia si al resolver el sistema se obtiene un punto, o bien $d = R$
- La recta es **exterior** a la circunferencia si al resolver el sistema no se obtiene ningún punto, o bien $d > R$

Para resolver el sistema formado por una recta y una circunferencia, se despeja en la ecuación de la recta la incógnita más fácil, se sustituye este valor en la ecuación de la circunferencia y se resuelve la ecuación de 2.º grado resultante.

EJERCICIO RESUELTO

5 **Halla los puntos de corte, si los hay, de la siguiente recta y de la circunferencia y estudia su posición relativa:**

$$r \equiv x - y = 4$$
$$c \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

Haz el dibujo.

Se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones:

a) Se despeja la y de la 1.ª ecuación:

$$x - y = 4 \Rightarrow -y = -x + 4 \Rightarrow y = x - 4$$

b) Se sustituye este valor en la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + (x-4)^2 - 4x - 2(x-4) - 4 = 0$$

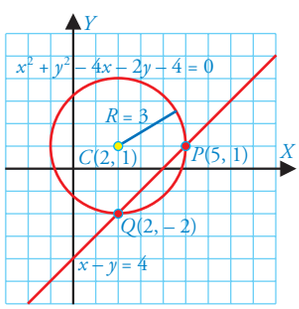
c) Se efectúan las operaciones:

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 4x - 2x + 8 - 4 = 0$$
$$2x^2 - 14x + 20 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

d) Se sustituye $x = 5$ en $y = x - 4 \Rightarrow y = 5 - 4 = 1 \Rightarrow P(5, 1)$

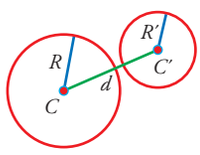
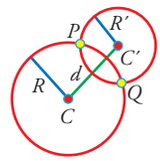
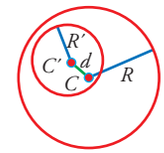
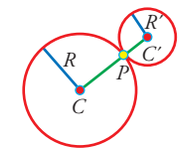
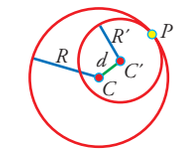
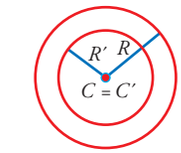
Se sustituye $x = 2$ en $y = x - 4 \Rightarrow y = 2 - 4 = -2 \Rightarrow Q(2, -2)$

Como se obtienen dos puntos, la recta es **secante** a la circunferencia.



2.2 POSICIÓN RELATIVA DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dos circunferencias pueden ser:

Exteriores	Secantes	Una interior a la otra	Tangentes exteriores	Tangentes interiores	Concéntricas
					
$d > R + R$	$R - R < d < R + R$	$d < R - R$	$d = R + R$	$d = R - R$	$d = 0$

Para hallar la posición relativa de dos circunferencias, se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones, y son secantes, tangentes, exteriores o interiores según los puntos que tengan en común.

Para precisar más la posición relativa, se hallan los radios R, R' $(R > R')$ y la distancia entre los centros, d

Resolver el sistema formado por dos circunferencias

Para resolver el sistema formado por dos circunferencias, se restan las ecuaciones y se obtiene una ecuación de 1.er grado. Se despeja en esta ecuación la incógnita más fácil y se sustituye en la ecuación de la circunferencia más sencilla.

EJERCICIO RESUELTO

6 **Halla los puntos de corte de las siguientes circunferencias y estudia su posición relativa:**

$c_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$

$c_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 8y + 18 = 0$

Se resuelve el sistema:

a) Se resta a la 1.ª ecuación la 2.ª:

$6x + 6y - 24 = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 - x$

b) Se sustituye este valor en la 1.ª ecuación:

$x^2 + (4 - x)^2 + 2x - 2(4 - x) - 6 = 0$

c) Se efectúan las operaciones:

$x^2 + 16 - 8x + x^2 + 2x - 8 + 2x - 6 = 0$

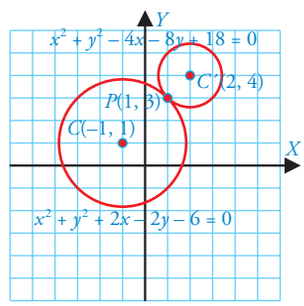
$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

d) Se sustituye $x = 1$ en $y = 4 - x \Rightarrow y = 4 - 1 = 3 \Rightarrow P(1, 3)$

Como solo se obtiene un punto $P(1, 3)$, las circunferencias son **tangentes.**



Observa

$C(-1, 1)$, $R = 2\sqrt{2}$

$C'(2, 4)$, $R' = \sqrt{2}$

$d = d(C, C') = 3\sqrt{2}$

$d = R + R$

ELABORA

6 Dibuja la siguiente recta y la circunferencia e indica su posición relativa:

$y = 4$

$x^2 + y^2 = 9$

7 Halla los puntos de corte de la siguiente recta y de la circunferencia y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

$x + y = -3$

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

8 Dadas la recta y la circunferencia siguientes:

$y = 2x + 5$ $\quad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

calcula la distancia del centro de la circunferencia a la recta y el radio de la circunferencia, y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

9 Estudia la posición relativa de las siguientes circunferencias:

$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$

Haz el dibujo.

3 ELIPSE

ENGÁNCHATE

EXPLORA

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 5 m, y un cateto, 4 m. Halla mentalmente la medida del otro cateto.

Evitar errores

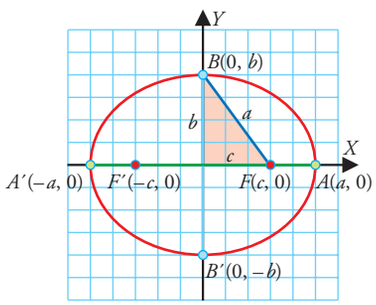
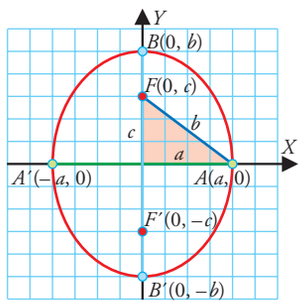
Si los focos están en el eje *Y*, la constante es igual a $2b$

3.1 ELIPSE

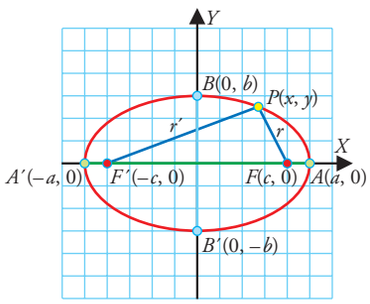
Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

Ecuación reducida

Focos en el eje *X*		Focos en el eje *Y*	
$a > b$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Relación fundamental: $a^2 = b^2 + c^2$		$a < b$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Relación fundamental: $b^2 = a^2 + c^2$	

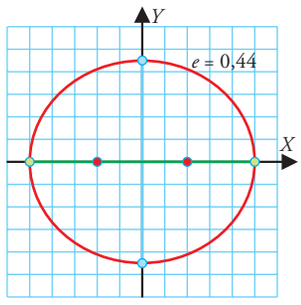
Demostración en detalle en la página 251.

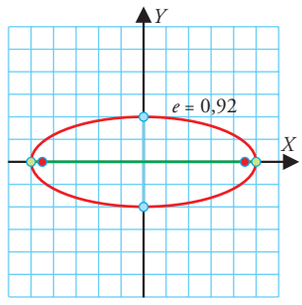


Elementos de la elipse con los focos en el eje *X*

- **Puntos:**
  - a) **Centro:** es el punto de intersección de los ejes: $O(0, 0)$
  - b) **Vértices:** son los puntos: $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$
  - c) **Focos:** son los puntos fijos: $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$
- **Segmentos:**
  - a) **Eje principal** o **eje focal:** es el segmento AA', cuya longitud es $d(A, A') = 2a$
  - b) **Eje secundario:** es el segmento BB', cuya longitud es $d(B, B') = 2b$
  - c) **Distancia focal:** es la longitud del segmento FF': $d(F, F') = 2c$
  - d) **Radiovectores:** son los segmentos $r = PF$ y $r' = PF'$
- **Excentricidad:**

  La **excentricidad de una elipse** es el cociente: $e = c/a$. Como en una elipse $0 < c < a$, la excentricidad será siempre positiva y menor que 1. Si la excentricidad es pequeña, cercana a cero, la elipse se parece a una circunferencia, y si es grande, cercana a uno, estará muy achatada.





EJERCICIO RESUELTO

7 **Se tiene una elipse con focos en el eje X en la que $a = 5$ y $c = 4$. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.**

Aplicando la relación fundamental o teorema de Pitágoras, se tiene:

$b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow$ ecuación reducida: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

- Puntos:
  a) Centro: $O(0, 0)$
  b) Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 3)$ y $B'(0, -3)$
  c) Focos: $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$
- Segmentos:
  a) Eje principal: $2 \cdot 5 = 10$
  b) Eje secundario: $2 \cdot 3 = 6$
  c) Distancia focal: $2 \cdot 4 = 8$
- Excentricidad: $e = \frac{4}{5} = 0{,}8$

3.2 ELIPSE CENTRADA EN EL PUNTO $C(m, n)$

La ecuación reducida de una elipse de centro el punto $C(m, n)$ se obtiene haciendo una traslación; x se sustituye por $x - m$, e y, por $y - n$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

3.3 DIBUJO DE LA ELIPSE: MÉTODO DEL JARDINERO

Construye un jardín con forma de elipse en el que el eje mayor mida 20 m, y el eje menor, 12 m

Por tanto: $2a = 20 \Rightarrow a = 10$ m; $2b = 12 \Rightarrow b = 6$ m

Aplicando la relación fundamental: $c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{100 - 36} = 8$ m

Se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se clavan dos estacas, una en cada foco, que distan $2c = 2 \cdot 8 = 16$ m

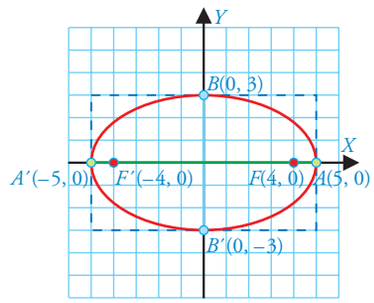
b) Se coge una cuerda de longitud un poco mayor que el eje mayor, algo más de 20 m

c) Se ata cada extremo de la cuerda en la base de cada una de las estacas que están en los focos, de forma que la cuerda libre mida exactamente 20 m

d) Con una estaca móvil se tensa la cuerda apoyada en la base y se hace un surco en el suelo.

Recuerda

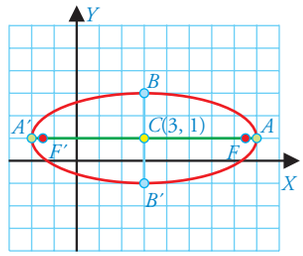
Para dibujar una elipse a mano alzada, se hace un rectángulo centrado en el origen, de longitud $2a$ y altura $2b$, y se inscribe dentro la elipse.

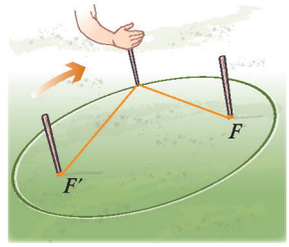


EJERCICIO RESUELTO

8 **Halla la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $C(3, 1)$ y en la que $a = 5$ y $b = 2$**

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$





ELABORA

10 Se tiene una elipse en la que $b = 4$ y $c = 3$. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

11 La ecuación reducida de una elipse es:

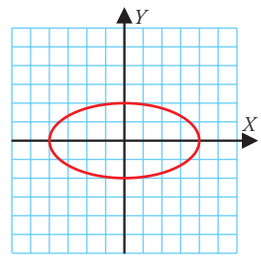
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

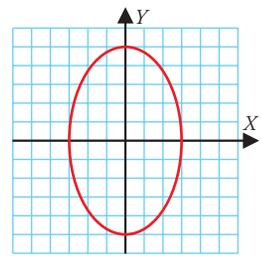
12 Halla la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $C(2, 1)$ y en la que $a = 4$ y $b = 3$. Dibújala.

13 Halla la ecuación de las siguientes elipses:

a)



b)



4 HIPÉRBOLA

ENGÁNCHATE

EXPLORA

Halla mentalmente las pendientes de las siguientes rectas: *a*) $y = \frac{3x}{4}$ *b*) $y = -\frac{3x}{4}$

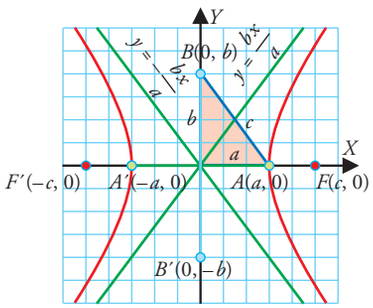
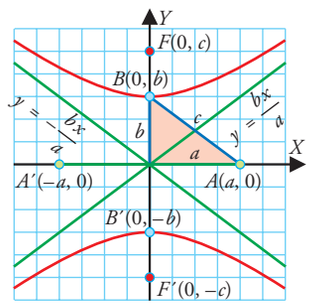
Evitar errores

Si los focos están en el eje *Y*, la constante es igual a $2b$

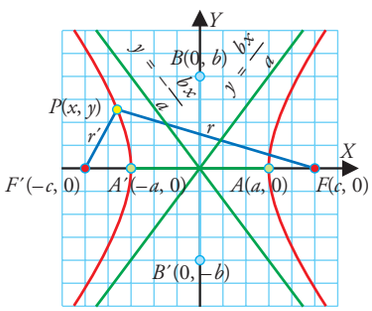
4.1 HIPÉRBOLA

Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$. La hipérbola tiene dos ramas.

Ecuación reducida

Focos en el eje *X*		Focos en el eje *Y*	
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Relación fundamental: $c^2 = a^2 + b^2$		$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Relación fundamental: $c^2 = a^2 + b^2$	

■ Demostración en detalle en la página 252.



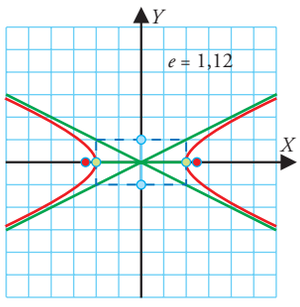
Elementos de la hipérbola con los focos en el eje *X*

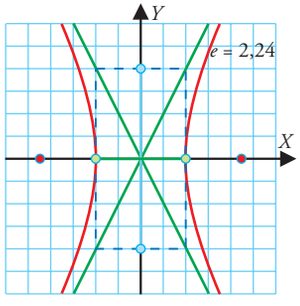
- **Puntos:**
  a) **Centro:** es el punto de intersección de los ejes: $O(0, 0)$
  b) **Vértices:** son los puntos: $A(a, 0)$, $A\ (-a, 0)$, $B(0, b)$ y $B\ (0, -b)$
  c) **Focos:** son los puntos fijos: $F(c, 0)$, $F\ (-c, 0)$
- **Segmentos:**
  a) **Eje principal** o **eje focal:** es el segmento AA', cuya longitud es $d(A, A') = 2a$
  b) **Eje secundario:** es el segmento BB', cuya longitud es $d(B, B') = 2b$
  c) **Distancia focal:** es la longitud del segmento FF': $d(F, F') = 2c$
  d) **Radiovectores:** son los segmentos $r = PF$ y $r' = PF'$
- **Rectas:**
  Asíntotas: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

  Para dibujar una hipérbola a mano alzada, se hace un rectángulo centrado en el origen, de longitud $2a$ y altura $2b$; las diagonales prolongadas son las asíntotas. Se trazan estas y la hipérbola.
- **Excentricidad:**

  La **excentricidad de una hipérbola** es el cociente: $e = c/a$

  Como en una hipérbola $0 < a < c$, la excentricidad será siempre positiva y mayor que 1. Si la excentricidad es pequeña, cercana a uno, las ramas de la hipérbola se cierran, y si es grande, se abren.



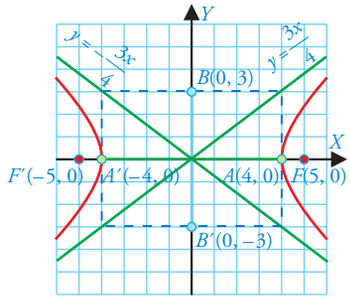


EJERCICIO RESUELTO

9 **Se tiene una hipérbola en la que $a = 4$, $c = 5$ y los focos están en el eje *X*. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.**

Aplicando la relación fundamental o teorema de Pitágoras, se tiene:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow \text{ecuación reducida: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

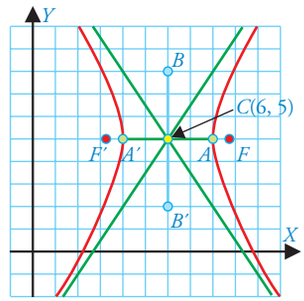


- Puntos:
  - a) Centro: $O(0, 0)$
  - b) Vértices: $A(4, 0)$, $A\ (-4, 0)$, $B(0, 3)$ y $B\ (0, -3)$
  - c) Focos: $F(5, 0)$, $F\ (-5, 0)$
- Segmentos:
  - a) Eje principal: $2 \quad 4 = 8$
  - b) Eje secundario: $2 \quad 3 = 6$
  - c) Distancia focal: $2 \quad 5 = 10$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4} = 1{,}25$
- Rectas, asíntotas: $y = \frac{3x}{4}$, $y = -\frac{3x}{4}$

4.2 HIPÉRBOLA CENTRADA EN EL PUNTO $C(m, n)$

La ecuación reducida de una hipérbola de centro el punto $C(m, n)$ se obtiene haciendo una traslación; x se sustituye por $x - m$, e y, por $y - n$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



EJERCICIO RESUELTO

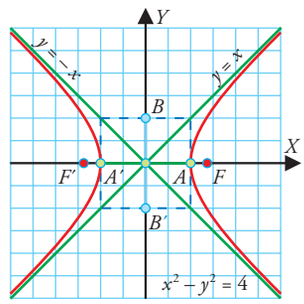
10 **Halla la ecuación de una hipérbola que tiene el centro en el punto $C(6, 5)$ y en la que $a = 2$ y $b = 3$**

$$\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$$

4.3 HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

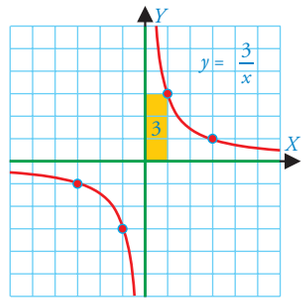
Una **hipérbola equilátera** es una hipérbola en la que $a = b$; por tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$



Las asíntotas son: $y = x$, $y = -x$

Si se gira 45°, se obtiene la hipérbola correspondiente a la función de proporcionalidad inversa: $xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$



EJERCICIO RESUELTO

11 **Dibuja la hipérbola equilátera: $y = \frac{3}{x}$**

ELABORA

14 Se tiene una hipérbola en la que $b = 4$, $c = 5$ y los focos están en el eje X. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

15 Halla la ecuación de una hipérbola que tiene el centro en el punto $C(1, -2)$ y en la que $a = 4$ y $b = 3$

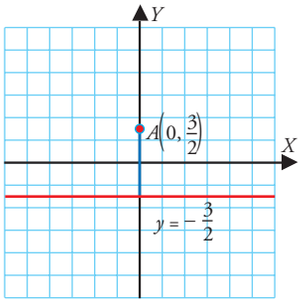
16 La ecuación reducida de una hipérbola es:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

5 PARÁBOLA Y PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

ENGÁNCHATE



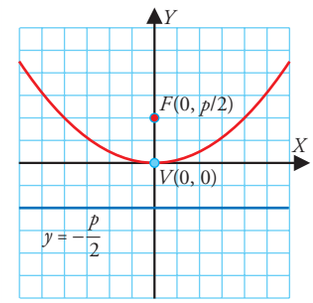
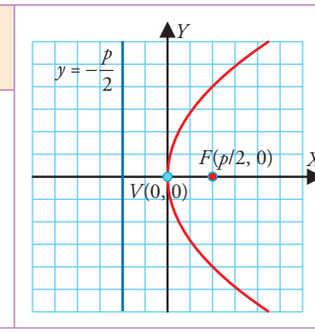
EXPLORA

Halla mentalmente la distancia que hay entre el punto $A(0, 3/2)$ y la recta $y = -3/2$

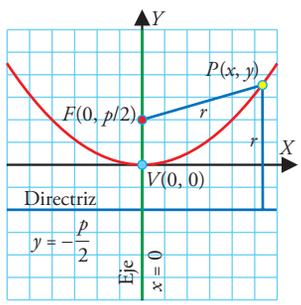
5.1 PARÁBOLA

Una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo que se llama foco y de una recta fija que se llama directriz.

Ecuación reducida

Foco en el eje Y		Foco en el eje X	
$y = \frac{x^2}{2p}$		$x = \frac{y^2}{2p}$	

Demostración en detalle en la página 253.



Elementos de la parábola con los focos en el eje X

- **Puntos:**
  - a) **Vértice:** $V(0, 0)$
  - b) **Foco:** es el punto fijo: $F(0, p/2)$
- **Segmentos:**
  - a) **Distancia focal:** es la distancia del foco a la directriz: $d(F, d) = p$
  - b) **Radiovector:** es el segmento $r = PF$
- **Excentricidad:** es el cociente entre la distancia de un punto cualquiera P al foco y la distancia de P a la directriz; como son iguales, $e = 1$
- **Rectas**
  - a) **Directriz:** $y = -p/2$
  - b) **Eje:** es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco, $x = 0$

Para dibujar una parábola, se hace una tabla de valores simétricos respecto del eje.

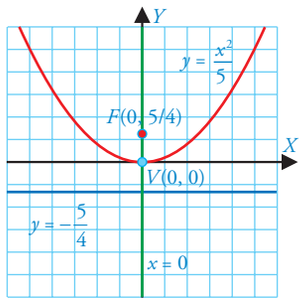
Tabla de valores

x	$y = x^2/5$
0	0
5	5
−5	5

EJERCICIO RESUELTO

12 **Se tiene una parábola en la que $p = 5/2$ y en la que el foco está en el eje Y. Halla la ecuación reducida, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.**

Se halla el valor de $2p = 2\ \frac{5}{2} = 5 \Rightarrow$ ecuación reducida: $y = \frac{x^2}{5}$



Puntos	Segmentos	Rectas
Vértice: $V(0, 0)$	Distancia focal: $\frac{5}{2}$	Directriz: $y = -\frac{5}{4}$
Foco: $F(0, 5/4)$		Eje: $x = 0$

5.2 PARÁBOLA QUE TIENE EL VÉRTICE EN EL PUNTO $V(m, n)$

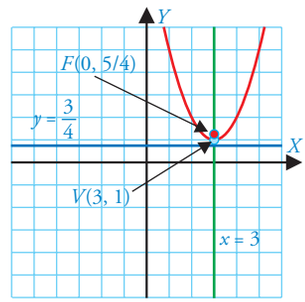
La ecuación reducida de una parábola que tiene el vértice en el punto $V(m, n)$ y cuyo eje es paralelo al de ordenadas, Y, se obtiene haciendo una traslación; x se sustituirá por $x - m$, e y, por $y - n$

$$y - n = \frac{(x-m)^2}{2p} \Rightarrow y = \frac{(x-m)^2}{2p} + n$$

EJERCICIO RESUELTO

13 **Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto $V(3, 1)$ y en la que $p = 1/2$**

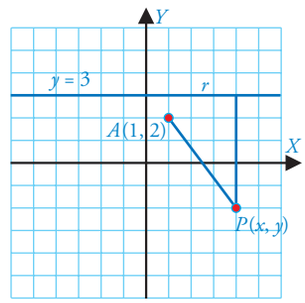
$$2p = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{(x-3)^2}{1} + 1 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 10$$



5.3 PROBLEMA TIPO DE LUGARES GEOMÉTRICOS

EJERCICIO RESUELTO

14 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual distancia al punto $A(1, 2)$ que a la recta $y = 3$**

a) La incógnita es un punto variable del plano.	$P(x, y)$
b) Se hace un dibujo lo más fielmente posible con los datos que se tienen del lugar geométrico y se representa un punto $P(x, y)$ que verifique la propiedad.	
c) Se expresa mediante una igualdad la propiedad que tienen que verificar los puntos del lugar geométrico.	$d(A, P) = d(P, r)$
d) Se expresan mediante fórmulas los dos miembros de la igualdad.	$d(A, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ $d(P, r) = \lvert -y + 3 \rvert$
e) Se sustituyen los valores en la igualdad.	$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \lvert -y + 3 \rvert$
f) Se opera y simplifica hasta obtener una fórmula lo más reducida posible: • Se elevan al cuadrado ambos miembros. • Se desarrollan los cuadrados. • Se reducen términos y se pasan todos al 2.º miembro, excepto y • Se divide entre 2	$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (-y+3)^2$ $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 6y + 9$ $2y = -x^2 + 2x + 4$ $y = -\frac{x^2}{2} + x + 2$
g) Se interpreta el resultado.	**Es una parábola.**

ELABORA

17 Se tiene una parábola en la que $p = 3/2$ y el foco está en el eje Y. Halla la ecuación reducida, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

18 El foco de una parábola es el punto $F(0, 3)$ y la directriz es la recta $y = -3$. Halla la ecuación de la parábola y dibújala.

19 Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto $V(2, 1)$ y en la que $p = 3/2$. Dibújala.

20 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen doble distancia al punto $A(2, 3)$ que a la recta $y = 5$

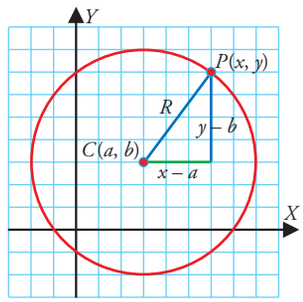
21 Se tiene una parábola de ecuación $y = x^2/2$. Halla el valor del parámetro p, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

PROFUNDIZACIÓN: DEMOSTRACIONES

1.2 CIRCUNFERENCIA DE CENTRO C (*a*, *b*) Y RADIO *R*

La **circunferencia de centro *C*(*a*, *b*) y radio *R*** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro es *R;* su ecuación es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Procedimiento para deducir la ecuación	Demostración
a) La incógnita es un punto variable del plano.	$P(x, y)$
b) Se hace un dibujo lo más fielmente posible con los datos que se tienen del lugar geométrico y se representa un punto $P(x, y)$ que verifique la propiedad.	
c) Se expresa mediante una igualdad la propiedad que tienen que verificar los puntos del lugar geométrico.	$d(C, P)=R$
d) Se expresan mediante fórmulas los dos miembros de la igualdad.	$d(C, P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$
e) Se sustituyen los valores en la igualdad.	$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$
f) Se elevan al cuadrado los dos miembros.	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

CENTRO Y RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA

Dada la ecuación general de la circunferencia

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

se tiene que el centro y el radio vienen dados por:

$$C(a, b)=C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$$

$$R=\sqrt{a^2+b^2-p}$$

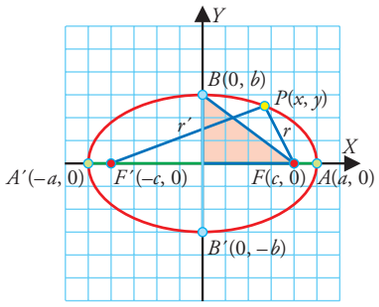
Demostración

a) Circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio R	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	
b) Se desarrollan los cuadrados de los binomios.	$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=R^2$	
c) Se ordenan los términos.	$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$	(I)
d) Se escribe la ecuación general.	$x^2+y^2+mx+ny+p=0$	(II)
e) Se igualan los coeficientes de la ecuación (I) con los de la ecuación general (II) y se despejan *a*, *b* y *R*	$-2a=m \Rightarrow a=-\frac{m}{2}$ $\quad -2b=n \Rightarrow b=-\frac{n}{2}$ $a^2+b^2-R^2=p \Rightarrow -R^2=-a^2-b^2+p$ $R^2=a^2+b^2-p \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-p}$	

3.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN REDUCIDA DE LA ELIPSE

Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$. Cuando los focos están en el eje X, la ecuación reducida es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

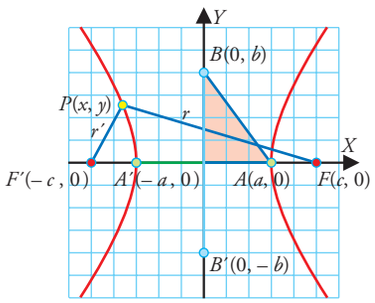
Procedimiento	Demostración
a) La incógnita es un punto variable del plano.	$P(x, y)$
b) Se hace un dibujo lo más fielmente posible con los datos que se tienen del lugar geométrico. Se representa un punto $P(x, y)$ que verifique la propiedad.	
c) Se expresa mediante una igualdad la propiedad que tienen que verificar los puntos del lugar geométrico.	$d(F, P) + d(F', P) = 2a$
d) Se expresan mediante fórmulas los dos miembros de la igualdad.	$d(F, P) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ $d(F', P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
e) Se sustituyen los valores en la igualdad.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$
f) Se opera y simplifica hasta obtener una ecuación lo más reducida posible.	
• Se pasa un radical al segundo miembro.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se elevan al cuadrado ambos miembros.	$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$
• Se desarrollan las potencias.	$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$
• Se deja solo el radical en un miembro.	$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se simplifica dividiendo entre -4	$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se cambian los miembros.	$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2$
• Se elevan otra vez al cuadrado ambos miembros.	$\left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = (cx + a^2)^2$
• Se desarrollan las potencias.	$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$
• Se aplica la propiedad distributiva.	$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$
• Se transponen términos.	$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$
• Se agrupan los términos.	$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$
• Se aplica que $a^2 - c^2 = b^2$	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
• Se divide toda la ecuación entre a^2b^2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

PROFUNDIZACIÓN: DEMOSTRACIONES

4.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN REDUCIDA DE LA HIPÉRBOLA

Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$. Cuando los focos están en el eje X, la **ecuación reducida** es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

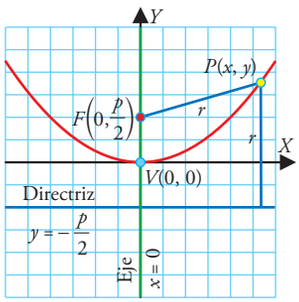
Procedimiento	Demostración
a) La incógnita es un punto variable del plano.	$P(x, y)$
b) Se hace un dibujo lo más fielmente posible con los datos que se tienen del lugar geométrico. Se representa un punto $P(x, y)$ que verifique la propiedad.	
c) Se expresa mediante una igualdad la propiedad que tienen que verificar los puntos del lugar geométrico.	$\lvert d(F, P) - d(F', P) \rvert = 2a \Rightarrow \begin{cases} d(F, P) - d(F', P) = 2a \\ d(F', P) - d(F, P) = 2a \end{cases}$
d) Se expresan mediante fórmulas los dos miembros de la igualdad.	$d(F, P) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ $\quad d(F', P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
e) Si se verifica que $d(F, P) - d(F', P) = 2a$, se sustituyen los valores en la igualdad.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$
f) Se opera y simplifica hasta obtener una ecuación lo más reducida posible.	
• Se pasa un radical al segundo miembro.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se elevan al cuadrado ambos miembros.	$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$
• Se desarrollan las potencias.	$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$
• Se deja solo el radical en un miembro.	$-4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se simplifica dividiendo entre -4	$cx + a^2 = -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se elevan otra vez al cuadrado ambos miembros.	$(cx + a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$
• Se desarrollan las potencias.	$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$
• Se aplica la propiedad distributiva.	$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$
• Se agrupan los términos.	$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$
• Se aplica que $c^2 - a^2 = b^2$	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
• Se divide toda la ecuación entre a^2b^2	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
g) Si se verifica que $d(F', P) - d(F, P) = 2a$, se llega al mismo resultado.	

5.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN REDUCIDA DE LA PARÁBOLA

Una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo que se llama **foco** y de una recta fija que se llama **directriz.** Cuando el foco está en el eje *X,* la **ecuación reducida** es:

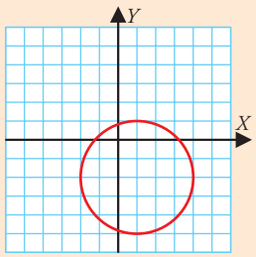
$$y = \frac{x^2}{2p}$$

Se aplica el procedimiento de los lugares geométricos.

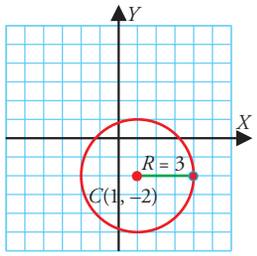
Procedimiento	Demostración
a) La incógnita es un punto variable del plano.	$P(x, y)$
b) Se hace un dibujo lo más fielmente posible con los datos que se tienen del lugar geométrico y se representa un punto $P(x, y)$ que verifique la propiedad.	
c) Se expresa mediante una igualdad la propiedad que tienen que verificar los puntos del lugar geométrico.	$d(F, P) = d(P, d)$
d) Se expresan mediante fórmulas los dos miembros de la igualdad.	$d(F, P) = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$ $d(P, d) = \left\lvert y + \frac{p}{2} \right\rvert$
e) Se sustituyen los valores en la igualdad.	$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left\lvert y + \frac{p}{2} \right\rvert$
f) Se opera y simplifica hasta obtener una ecuación lo más reducida posible.	
• Se elevan al cuadrado ambos miembros.	$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$
• Se desarrollan las potencias.	$x^2 + \cancel{y^2} - py + \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{4}} = \cancel{y^2} + py + \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{4}}$
• Se reducen términos.	$-2py = -x^2$
• Se cambia de signo.	$2py = x^2$
• Se despeja y	$y = \frac{x^2}{2p}$

EJERCICIOS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

15 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



Se le añaden los datos significativos al dibujo:



$C\,(1, -2)$

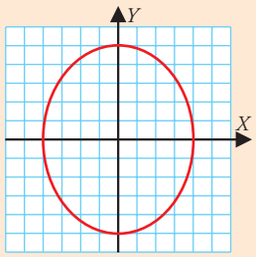
$R = 3$

Ecuación:

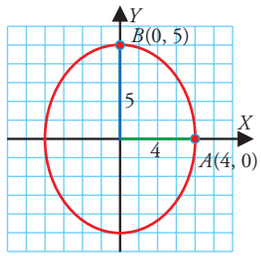
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

16 Halla la ecuación de la siguiente elipse:



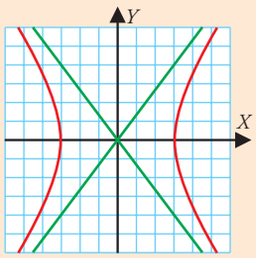
Se le añaden los datos significativos al dibujo:



$a = 4,\ b = 5$

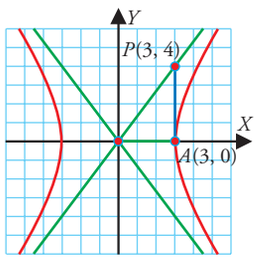
Ecuación: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

17 Halla la ecuación de la siguiente hipérbola y de sus asíntotas:



Se le añaden los datos significativos al dibujo:

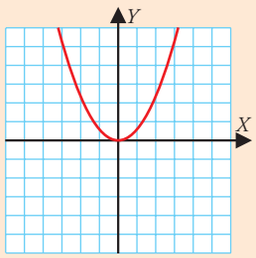
$a = 3,\ b = 4$



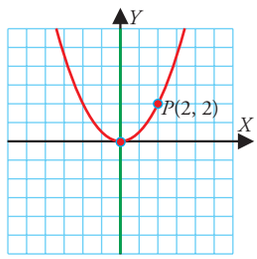
- Ecuación: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- Asíntotas: $y = \frac{4x}{3}$

$y = -\frac{4x}{3}$

18 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Se le añaden los datos significativos al dibujo:



$P(2, 2)$

Ecuación: $y = \frac{x^2}{2}$

PROBLEMAS DE CÓNICAS

19 Halla la excentricidad de la órbita de la Luna sabiendo que es una elipse y que la distancia de los vértices a la Tierra es aproximadamente de 356 000 km y de 407 000 km. ¿Qué deduces del valor obtenido?

Datos y pregunta

La distancia de los vértices a la Tierra es 356 000 km y 407 000 km

Pregunta: Halla la excentricidad y qué se deduce de ese valor.

Planteamiento y operaciones

Eje principal: $356\,000 + 407\,000 = 763\,000$ km

$a = \dfrac{763\,000}{2} = 381\,500$ km

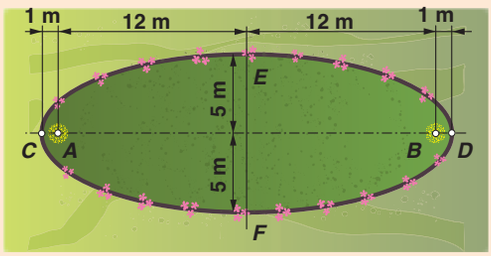
$c = 381\,500 - 356\,000 = 25\,500$ km

$e = \dfrac{25\,500}{381\,500} = 0{,}067$

Solución

La excentricidad de la órbita de la Luna es **0,067. Se deduce que prácticamente es una circunferencia.**

20 Se tiene un jardín de forma rectangular de 30 m de largo por 14 m de ancho. Se quiere construir en su interior una elipse de flores lo mayor posible de forma que sobren 2 m por cada lado. Halla los semiejes y la posición de los focos para dibujarla por el método del jardinero.



Datos y pregunta

Jardín rectangular de $30 \times 14 \Rightarrow$ La elipse es de 26×10

Pregunta: Dibuja la elipse y halla los focos.

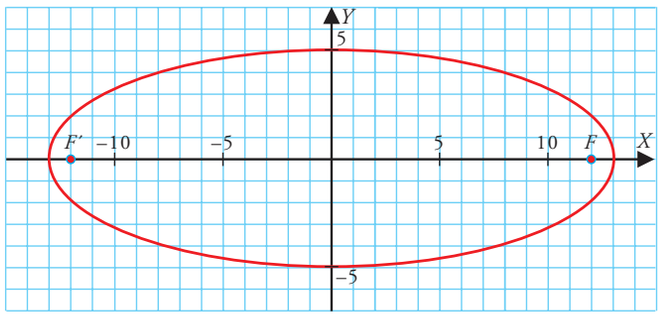
Planteamiento y operaciones

$2a = 26 \Rightarrow a = 13$; $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

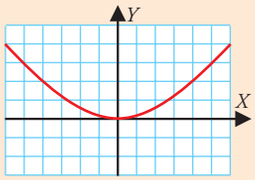
$c = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ m

Solución

Los semiejes miden $a = 13$, $b = 5$. **Los focos se encuentran a 1 m de los vértices.**



21 La sección de una antena parabólica es la siguiente curva:



Halla su ecuación y el foco, que es el punto donde se coloca el reflector, ya que todas las ondas que llegan paralelas al eje se reflejan sobre el foco.

Datos y pregunta

Parábola del dibujo.

Pregunta: Halla la ecuación y el vértice.

Planteamiento y operaciones

Ecuación: $y = \dfrac{x^2}{2p}$

Pasa por el punto $P(4, 2) \Rightarrow 2 = \dfrac{4^2}{2p} \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4$

Foco: $F(0, p/2) \Rightarrow F(0, 2)$

Solución

Ecuación: $y = \dfrac{x^2}{8}$; foco: $F(0, 2)$

ELABORA ACTIVIDADES DE LAS SECCIONES

1 SECCIONES CÓNICAS Y CIRCUNFERENCIA

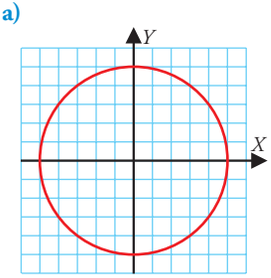
22 Dibuja la circunferencia que tiene el centro en el origen de coordenadas y radio $R = 3$, y halla mentalmente su ecuación.

23 Dibuja y halla la ecuación general de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(-3, 1)$ y radio $R = 2$

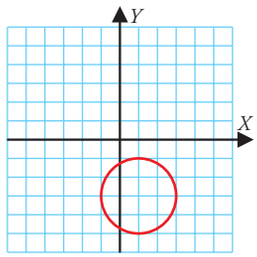
24 Halla el centro y el radio de la siguiente circunferencia: $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$. Haz el dibujo.

25 Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a)

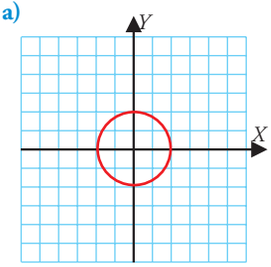


b)

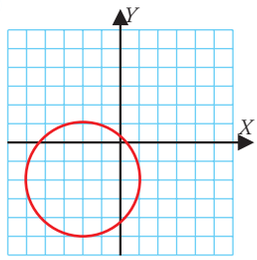


26 Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a)



b)



27 Halla la potencia de punto $P(2, 4)$ respecto de la siguiente circunferencia. Haz el dibujo. Relaciona el signo de la potencia con la situación del punto P

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$

28 Halla el eje radical de las siguientes circunferencias. Haz el dibujo con las dos circunferencias y el eje radical.

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$

29 Halla el centro radical de las siguientes circunferencias. Haz el dibujo.

$x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x + 10y + 16 = 0$

2 POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

30 Dibuja la recta y la circunferencia siguientes y estudia mentalmente su posición relativa.

$x = 1$

$x^2 + y^2 = 16$

31 Halla los puntos de corte de la recta y la circunferencia siguientes y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

$3x - 2y = -3$

$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$

32 Dadas la recta y la circunferencia siguientes:

$y = x + 2$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

calcula la distancia del centro de la circunferencia a la recta, el radio de la circunferencia y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

33 Estudia la posición relativa de las siguientes circunferencias. Haz el dibujo.

$x^2 + y^2 + 6x - 11 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 13 = 0$

3 ELIPSE

34 Se tiene una elipse en la que $a = 4$ y $b = 2$. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

35 La ecuación reducida de una elipse es:

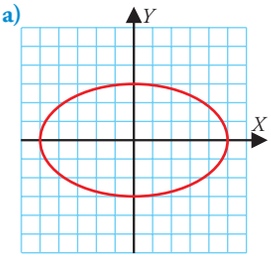
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

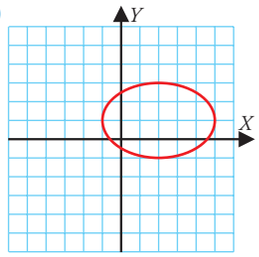
36 Halla la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $C(3, -2)$ y en la que $a = 5$ y $b = 4$

37 Halla la ecuación de las siguientes elipses:

a)

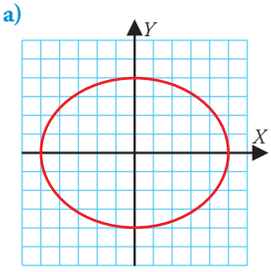


b)

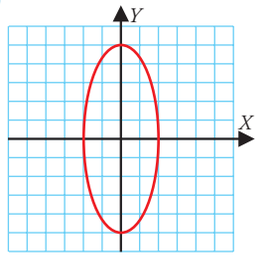


38 Halla las ecuaciones de las siguientes elipses:

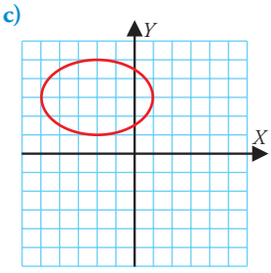
a)



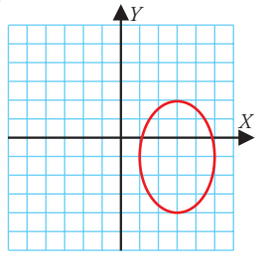
b)



c)



d)



4 HIPÉRBOLA

39 Se tiene una hipérbola en la que $a = 2$ y $b = 1$, y los focos están en el eje X. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

40 La ecuación reducida de una hipérbola es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

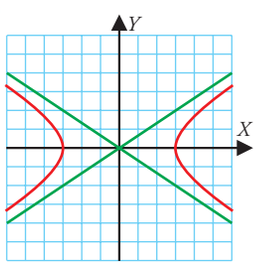
Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

41 Halla la ecuación de una hipérbola que tiene el centro en el punto $C(2, -1)$ y en la que $a = 3$ y $b = 4$

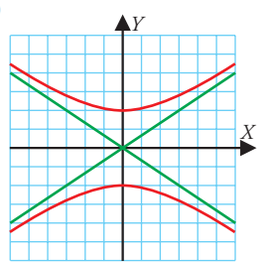
42 Se tiene una hipérbola equilátera en la que $a = 3$ y los focos están en el eje X. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

43 Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas y de sus asíntotas:

a)

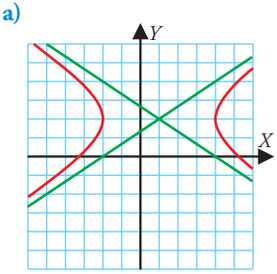


b)

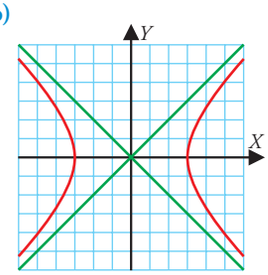


44 Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas y de sus asíntotas:

a)



b)



5 PARÁBOLA Y PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

45 Se tiene una parábola en la que el foco está en el eje Y y $p = 2$. Halla la ecuación reducida, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje.

Dibuja la parábola.

46 El foco de una parábola es el punto $F(2, 0)$ y la directriz es la recta $x = -2$

Halla la ecuación de la parábola y dibújala.

47 Halla la ecuación de una parábola cuyo vértice es el punto $V(1, 2)$, el eje es paralelo al de ordenadas y en la que $p = 1/2$

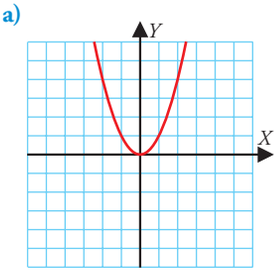
Haz el dibujo.

48 Se tiene una parábola de ecuación $y = x^2/3$. Halla el valor del parámetro p, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje.

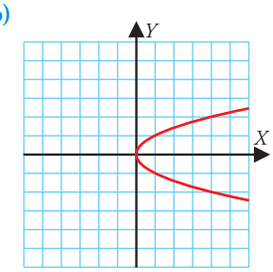
Dibuja la parábola.

49 Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a)

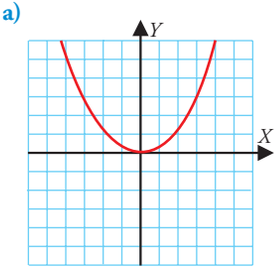


b)

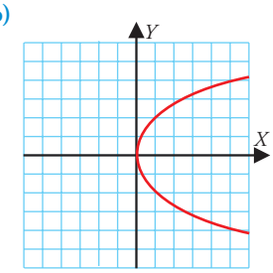


50 Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a)



b)



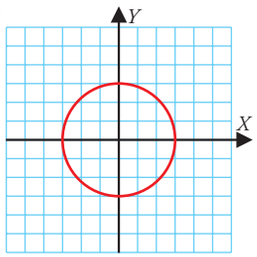
ELABORA ACTIVIDADES PARA REFORZAR

51 Dibuja la circunferencia que tiene el centro en $C(2, 2)$ y radio $R = 2\sqrt{2}$

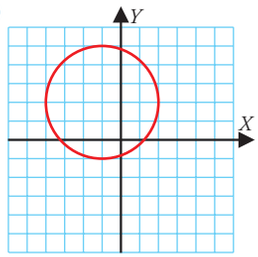
Halla mentalmente su ecuación.

52 Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a)



b)



53 Dibuja la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 0)$, $B(5, 0)$ y $C(0, 5)$. Halla el centro, el radio y su ecuación.

54 Dibuja la recta y las circunferencias siguientes:

$$r \equiv y = 5$$

$$c \equiv x^2 + y^2 = 25$$

y estudia su posición relativa.

55 Halla los puntos de corte de la recta y la circunferencia siguientes y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

$$r \equiv 2x - y = -4$$

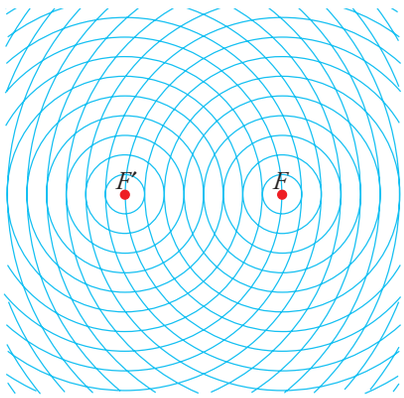
$$c \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

56 Halla los puntos de corte de las siguientes circunferencias y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

57 Utilizando la siguiente trama y la definición de elipse, dibuja cinco elipses distintas en tu cuaderno.



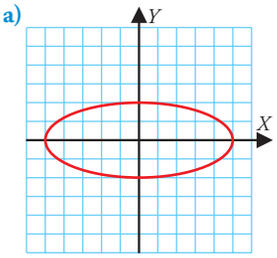
58 La ecuación reducida de una elipse es:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

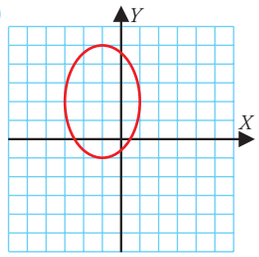
Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

59 Halla las ecuaciones de las siguientes elipses:

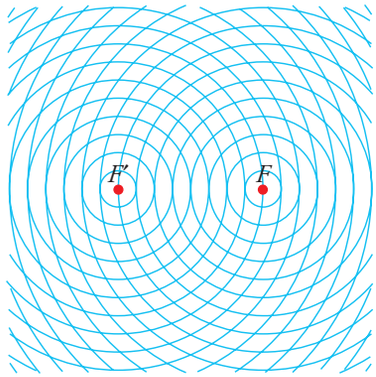
a)



b)



60 Utilizando la siguiente trama y la definición de hipérbola, dibuja cinco hipérbolas distintas en tu cuaderno.

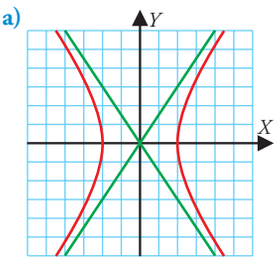


61 La ecuación de una hipérbola es: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

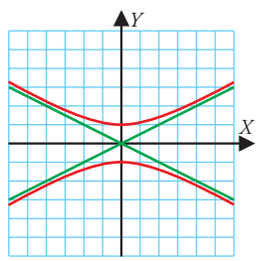
Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la hipérbola.

62 Halla las ecuaciones de las hipérbolas y de sus asíntotas:

a)

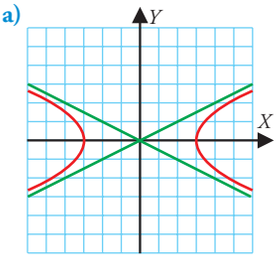


b)

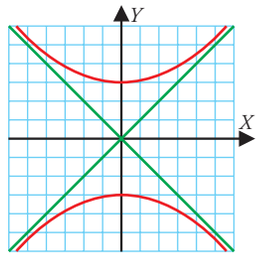


63 Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas y sus asíntotas:

a)

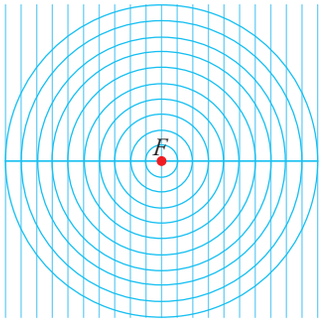


b)



ELABORA PROBLEMAS

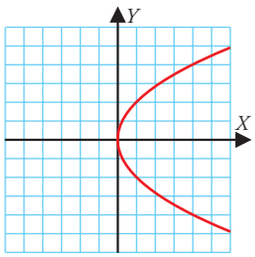
64 Utilizando la siguiente trama y la definición de parábola, dibuja cinco parábolas distintas en tu cuaderno.



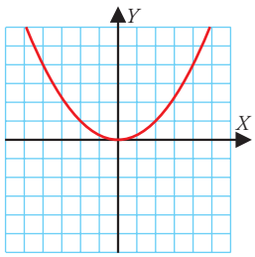
65 Se tiene una parábola en la que el foco está en el eje X y $p = 1$. Halla la ecuación reducida, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

66 Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a)

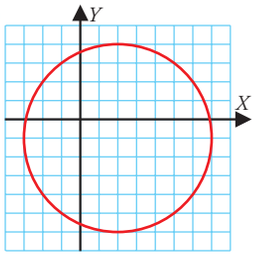


b)

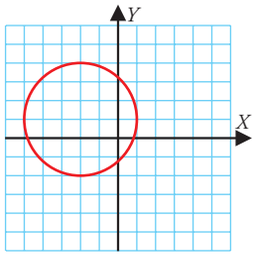


67 Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a)



b)



68 Halla la potencia de los puntos $P_1(2, 3)$, $P_2(-5, -1)$, $P_3(-2, 1)$ respecto de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$$

Di cuál es interior, cuál está en la circunferencia y cuál es exterior.

69 Halla el centro radical las siguientes circunferencias. Haz el dibujo.

$x^2 + y^2 + 8y + 6 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

$x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$

70 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por: $A(4, 2)$, $B(-2, 2)$ y $C(1, 5)$

71 Estudia la posición relativa de la recta y la circunferencia siguientes. Haz el dibujo.

$r \equiv 3x - y = -6$

$c \equiv x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$

72 Se tiene una elipse en la que $a = 3$ y $b = 3$. Halla la ecuación reducida y dibújala. Interpreta el resultado.

73 De una elipse sabemos que la distancia entre los focos es de 8 unidades, y entre los vértices A y A es de 10 unidades. Halla su ecuación y dibújala.

74 La primera ley de Kepler dice:

«La órbita que describe la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol es una elipse, en uno de cuyos focos está el Sol».

La distancia máxima de la Tierra al Sol es de 15,2 10^7 kilómetros, y la distancia mínima es de $14{,}7 \cdot 10^7$ km. Calcula la excentricidad e interpreta el resultado.

75 Se tiene una hipérbola en la que $a = 2$ y $b = 2$ y los focos están en el eje X. Halla la ecuación reducida y dibújala. Interpreta el resultado.

76 De una hipérbola se sabe que la distancia entre los focos es de 10 unidades, y entre los vértices A y A es de 6 unidades. Halla su ecuación y dibújala.

77 Los vértices de una hipérbola equilátera son $A(3, 0)$ y A $(-3, 0)$. Halla su ecuación y dibújala.

78 El foco de una parábola es el punto $F(0, -2)$, y la directriz es la recta $y = 2$. Halla la ecuación de la parábola y dibújala.

ELABORA PROBLEMAS DE MÁS NIVEL

79 La excentricidad de una cónica es 0,6, y la distancia focal, 6 unidades. ¿De qué cónica se trata?

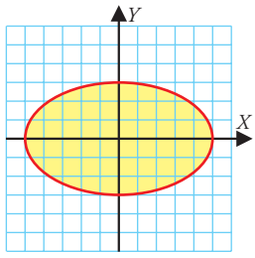
Halla su ecuación.

80 Dados los puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$, halla el lugar geométrico de los puntos C, de forma que ABC sea un triángulo de perímetro 16 unidades.

81 La excentricidad de una cónica es 1,25, y la distancia focal, 10 unidades. ¿De qué cónica se trata?

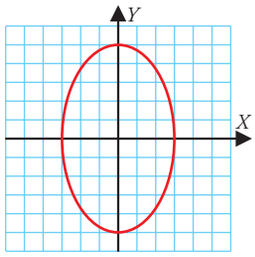
Halla su ecuación.

82 Halla el área de la elipse de la siguiente figura, sabiendo que la fórmula es $A = \pi ab$, siendo a y b los semiejes.



1. Ejercicio (calificación: 2,5 puntos)

Mediante *ensayo-acierto* halla la ecuación de la siguiente cónica:



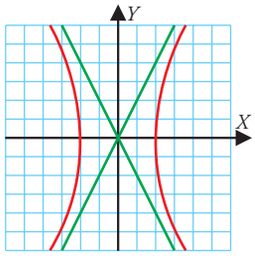
SOLUCIÓN:

En **GeoGebra** elige el *applet:* **Elipse.**

- Nombre: **Elipse**
- Ecuación: $x^2/9 + y^2/25 = 1$
- Focos: $F(0,\ 4);\ F'(0, -4)$

2. Ejercicio (calificación: 2,5 puntos)

Mediante *ensayo-acierto* halla la ecuación de la siguiente cónica:



SOLUCIÓN:

En **GeoGebra** elige el *applet:* **Hipérbola.**

- Nombre: **Hipérbola**
- Ecuación: $x^2/4 - y^2/16 = 1$
- Asíntotas: $y = \pm 2x$
- Focos: $F(4{,}47,\ 0);\ F'(-4{,}47,\ 0)$

3. Problema (calificación: 2,5 puntos)

Halla el centro radical de las siguientes circunferencias:

$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$, $x^2 + y^2 + 10y + 15 = 0$

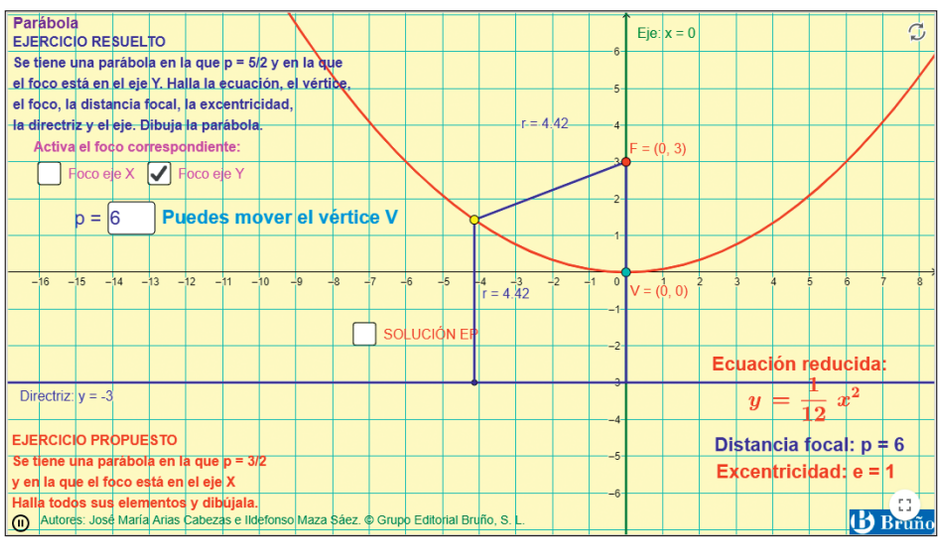
SOLUCIÓN:

En **GeoGebra** elige el *applet:* **Centro radical de tres circunferencias.** Centro radical: $C(3, -1)$

4. Problema (calificación: 2,5 puntos)

Halla la cónica que se obtiene al cortar una antena parabólica por un plano que pasa por el eje *y* en el que el vértice es el origen de coordenadas, sabiendo que distancia focal es 6

SOLUCIÓN:

En **GeoGebra** elige el *applet:* **Parábola.**

Ecuación: $y = x^2/12$ Foco: $F(0,\ 3)$ Directriz: $y = -3$ Excentricidad: 1