UNIDAD 11

Funciones algebraicas y trascendentes

Arias Cabezas, J. M. y Maza Sánchez, I. (2023). Matemáticas, 4º B ESO, Proyecto 5E. Madrid, Editorial Bruño del Grupo ANAYA. ISBN: 9788469634233

¿Para qué sirven las funciones algebraicas y trascedentes?

Las funciones se utilizan en la Ciencia, la Economía y en nuestra vida cotidiana. Un ejemplo de función de proporcionalidad inversa lo encontramos en la ley de Boyle-Mariotte, que se aplica en el funcionamiento del airbag en los vehículos. En una prueba de impacto, o test de choque, se estudia cómo en un choque una unidad electrónica provoca que una sustancia química genere nitrógeno, lo que hace aumentar la presión y en apenas milésimas de segundo se infla la bolsa del airbag.

En esta unidad descubriremos juntos:

1. ¿Qué es una función racional?
2. ¿Cómo se opera con funciones?
3. ¿Para qué sirve la función exponencial?
4. ¿Para qué sirve la función logarítmica?

eLABORA

Comienza la unidad en tu cuaderno con una portada. En primer lugar, escribe el número de la unidad y el título: **UNIDAD 11. Funciones algebraicas y trascendentes.** En el resto de la página haz un dibujo que sea una aplicación de funciones algebraicas o trascendentes (no vale repetir el del libro) y en la parte inferior escribe un texto de 2 o 3 líneas explicando la relación del dibujo con los contenidos de la UNIDAD. No vale escribir funciones grandes y decoradas.

También debes hacer en el cuaderno el Explora de la primera sección.

1 ¿Qué es una función racional?

ENGÁNCHATE

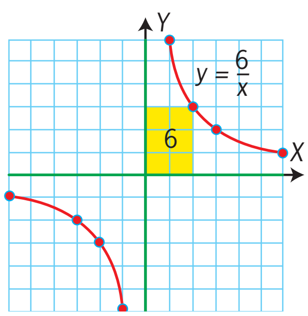
EXPLORA

Despeja y de la expresión $xy = 6$. ¿Qué tipo de función es?

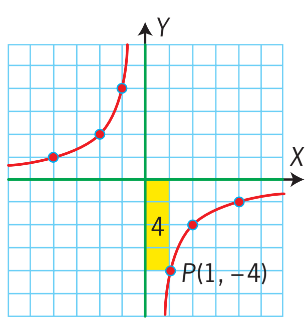
❶ Representa la función $y = \dfrac{6}{x}$

La constante de proporcionalidad inversa: $k = 6 > 0 \Rightarrow$ decreciente.

x	$y = 6/x$
…	…
–6	–1
–3	–2
–2	–3
–1	–6
…	…
1	6
2	3
3	2
6	1
…	…



Se observa que el rectángulo que tiene como vértices opuestos un punto cualquiera de la hipérbola y el punto de corte de las asíntotas contiene siempre 6 unidades cuadradas de área.



¿Qué es la función de proporcionalidad inversa?

Una **función es racional** si es el cociente de dos polinomios.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

El dominio de definición son todos los números reales menos las raíces del denominador.

Función de proporcionalidad inversa

Una **función es de proporcionalidad inversa** si al multiplicar la variable independiente, x, por un número, la variable dependiente, y, queda dividida por dicho número. Su ecuación es:

$$y = \frac{k}{x}; \text{ (}k\text{ es la constante de proporcionalidad inversa, } k \neq 0\text{)}$$

Su representación gráfica es una **hipérbola,** que es discontinua para $x = 0$, tiene como asíntotas los ejes, y es simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$

La **constante de proporcionalidad inversa k** es el área del rectángulo que tiene como vértices opuestos un punto cualquiera $P(x, y)$ de la hipérbola y el punto de corte de las asíntotas.

a) Si $k > 0$, la hipérbola está en el 1.er y 3.er cuadrantes y es **decreciente.**

b) Si $k < 0$, la hipérbola está en el 2.º y 4.º cuadrantes y es **creciente.**

Para dibujar la gráfica se hace una tabla de valores. Los valores más cómodos son los divisores de la constante de proporcionalidad inversa k

Paso de gráfica a ecuación

Dada la **gráfica** de una función de proporcionalidad inversa, para calcular k se hallan las coordenadas de un punto cualquiera de la hipérbola y se multiplica el valor de la abscisa x por el valor correspondiente de la ordenada y. El mejor punto es el primero en el que la abscisa sea positiva y entera, y la ordenada sea entera.

❷ Halla la ecuación de la hipérbola del dibujo de la izquierda.

El primer punto en el que la abscisa es positiva y entera es $P(1, -4)$

$$P(1, -4) \Rightarrow k = 1 \cdot (-4) = -4 \Rightarrow y = -\frac{4}{x}$$

Como $k = -4 < 0$, la función es creciente, como puede verse en la gráfica.

Hipérbola general

Las **hipérbolas** son las gráficas de las funciones racionales cuyo numerador es un polinomio de grado cero o uno, y cuyo denominador es un polinomio de 1.er grado.

Se pueden expresar como traslaciones horizontales y verticales de las funciones de proporcionalidad inversa si se dividen los polinomios.

Recuerda

$$\begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

$$D(x) = d(x)C(x) + R(x)$$

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

3 Dibuja la gráfica de la hipérbola $y = \dfrac{x-1}{x-3}$

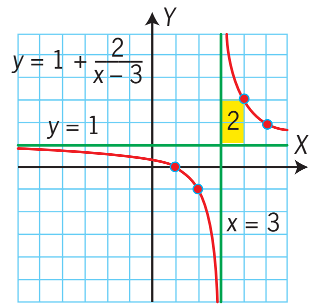
a) Se dividen los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x} - 1 & x - 3 \\ \hline -\cancel{x} + 3 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

b) Se escribe la función en la forma:

$$y = 1 + \frac{2}{x-3}$$

Se tiene la hipérbola $y = \dfrac{2}{x}$, trasladada 1 unidad hacia arriba y 3 unidades hacia la derecha.



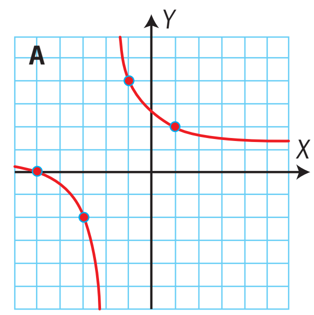
Hipérbola general: paso de gráfica a ecuación

La ecuación que se busca es de la forma: $y = \dfrac{k}{x-s} + r$

Para hallarla se tiene en cuenta:

a) k es el área del rectángulo formado entre un punto cualquiera, $P(x, y)$, de la hipérbola y el punto de corte de las asíntotas. Si la hipérbola es creciente, la constante k es negativa y si la hipérbola es decreciente, es positiva.

b) Para hallar r y s se hallan las ecuaciones de las asíntotas, $y = r$, $x = s$



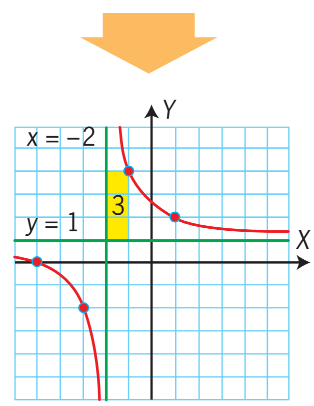
4 Halla la ecuación de la hipérbola del dibujo A del margen.

En primer lugar, se añaden al dibujo las asíntotas y un rectángulo relleno.

a) Se observa que el rectángulo tiene de área 3 unidades cuadradas. Como la hipérbola es decreciente, $k = 3$

b) Se hallan las ecuaciones de las asíntotas: $y = 1 \Rightarrow r = 1$; $x = -2 \Rightarrow s = -2$

La ecuación de la hipérbola es $y = \dfrac{3}{x+2} + 1$



1. Representa la gráfica de la función $y = -3/x$. Calcula el valor de la constante de proporcionalidad e indica si es creciente o decreciente.

2. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$

Halla:

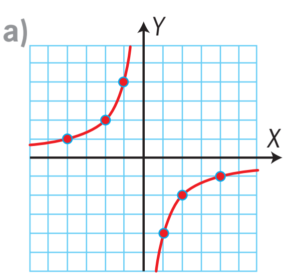
a) Su dominio.

b) Las ecuaciones de las asíntotas.

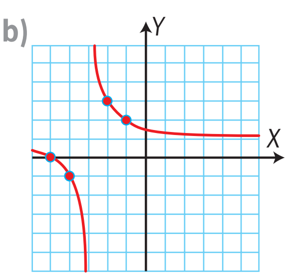
c) Las discontinuidades.

3. Halla la ecuación de las siguientes funciones:

a)



b)



2 ¿Cómo se opera con funciones?

ENGÁNCHATE

EXPLORA

Desarrolla los siguientes polinomios y calcula su suma:

$$(x-3)^2 + (x+3)(x-3)$$

¿Cuáles son las operaciones con funciones?

Suma, resta, multiplicación y división de funciones

Para **sumar, restar, multiplicar y dividir funciones,** se operan las expresiones correspondientes.

5 Halla la suma de las funciones: $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 3x^2 - 9x$

$$(f+g)(x) = 2x + 5 + 3x^2 - 9x = \mathbf{3x^2 - 7x + 5}$$

6 Dadas las funciones $f(x) = 5x^3 + 7x + 1$, $g(x) = 4x + 3$, halla $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x) = 5x^3 + 7x + 1 - (4x+3) = 5x^3 + 7x + 1 - 4x - 3 = \mathbf{5x^3 + 3x - 2}$$

7 Halla el producto de las funciones $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 3x - 5$

$$(f \cdot g)(x) = (3x+5)(3x-5) = \mathbf{9x^2 - 25}$$

8 Dadas las funciones $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x - 1$, halla $(f/g)(x)$

$$(f/g)(x) = \mathbf{\frac{3x+2}{x-1}}$$

Dominio del cociente

En el dominio del cociente de dos funciones hay que excluir las raíces del denominador, ya que no se puede dividir entre cero.

En el ejercicio resuelto 8:

$\mathrm{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{1\} =$

$= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Composición de funciones

La **función compuesta de las funciones f y g** es la función que transforma la variable independiente x en $g(f(x))$

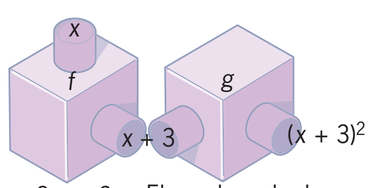
Se representa por **$g \circ f$** y se lee «f compuesta con g»

La composición de funciones no es conmutativa, es decir, $g \circ f$ no tiene por qué ser igual que $f \circ g$

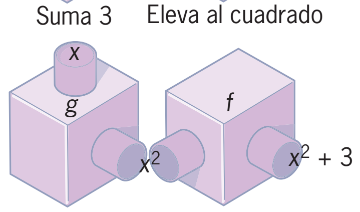
Representación

f compuesto con g se representa por $g \circ f$, para que la función f esté más cerca de la variable x, ya que es la primera que actúa: $g(f(x))$

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \\ x & \longrightarrow & x+3 & \longrightarrow & (x+3)^2 \end{array}$$



Suma 3 Eleva al cuadrado



Eleva al cuadrado Suma 3

9 Halla la composición $g \circ f$ de las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$

Consiste en aplicar primero f y luego g; observa que f le suma tres a lo que hay entre paréntesis y g lo eleva al cuadrado:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2 = \mathbf{x^2 + 6x + 9}$$

10 Halla la composición $f \circ g$ de las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$

$$\begin{array}{ccccc} & & f \circ g & & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 & \longrightarrow & x^2 + 3 \end{array}$$

Consiste en aplicar primero g y luego f

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \mathbf{x^2 + 3}$$

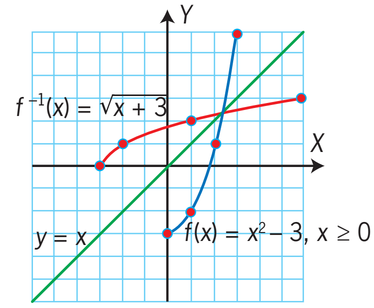
Función inversa

La **función inversa** de la función f se representa por f^{-1}. Verifica que si $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$. Como consecuencia, se verifica que:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la recta bisectriz del 1.er y 3.er cuadrantes, $y = x$

Para que exista la función inversa, se debe cumplir que a cada valor de y le corresponda un único valor de x. De no ser así, la inversa no es función.

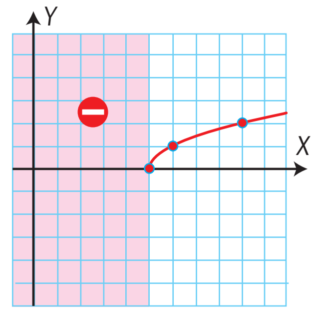


Procedimiento para hallar la función inversa

Para hallar la función inversa, se sigue el procedimiento:

Procedimiento	Ejemplo: $y = x^2 - 3,\ x \geq 0$
a) Se intercambian la x y la y	$x = y^2 - 3$
b) Se despeja la y	$-y^2 = -x - 3 \Rightarrow y^2 = x + 3 \Rightarrow y = \sqrt{x+3}$
c) Se escribe la fórmula.	$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$ **con** $x \geq -3$

12 Halla la fórmula de la siguiente función:



$y = \sqrt{x - 5}$

Función irracional

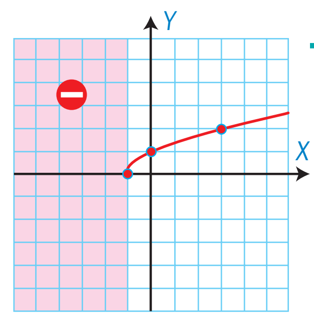
Una **función es irracional** si la variable independiente x está bajo el signo radical. Si el índice es par, el dominio son los valores de x para los que el radicando es mayor o igual que cero; si el índice es impar, el dominio es toda la recta real $\mathbb{R}$.

11 Halla el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ y represéntala.

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow$ **Dom(f) = [−1, +∞)**

La gráfica corresponde a una rama de una parábola.

x	−1	0	3	…
$y = \sqrt{x+1}$	0	1	2	…



4. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = (x - 3)^2 \qquad g(x) = x^2 - 9$$

calcula:

a) $f + g$ b) $f - g$

5. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = (x + 1)^2 \qquad g(x) = (x + 1)(x - 1)$$

calcula:

a) $f \cdot g$ b) f/g c) Dom(f/g)

6. Dadas las siguientes funciones:

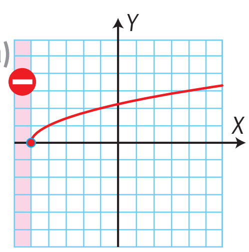
$$f(x) = 5x - 4 \qquad g(x) = x^2 + 3x - 1$$

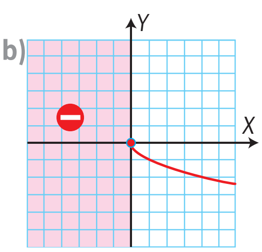
calcula: a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

7. Dada $f(x) = 3x + 1$, calcula f^{-1}, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

8. Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x+4}$, halla su dominio y represéntala.

9. Halla la fórmula de las siguientes funciones:

a) 

b) 

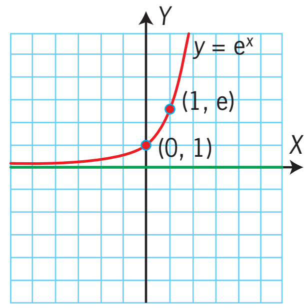
3 ¿Para qué sirve la función exponencial?

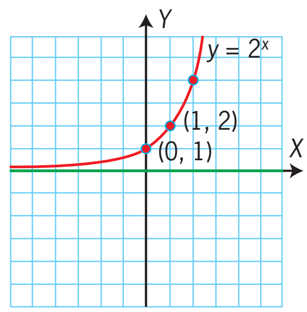
ENGÁNCHATE

EXPLORA

Calcula mentalmente las 10 primeras potencias enteras positivas de 2

¿Cómo es la función exponencial?





Una **función es exponencial** si la variable independiente está en el exponente. Es de la forma:

$$f(x) = a^x \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Las características generales de las funciones exponenciales son:

a) El dominio de definición son todos los números reales.

b) Son continuas y siempre pasan por el punto $(1, a)$

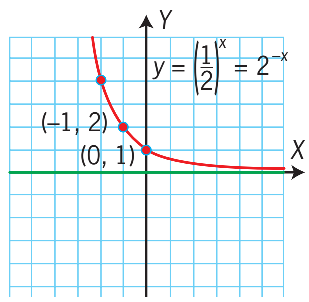
c) El eje X es una asíntota horizontal.

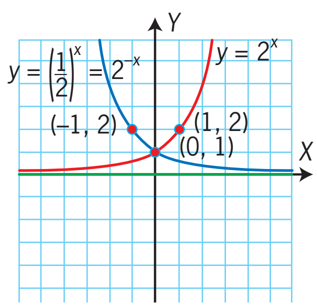
d) Cortan al eje Y en el punto $(0, 1)$. No cortan al eje X

e) Son crecientes si $a > 1$, y decrecientes si $0 < a < 1$

f) Son siempre convexas ($\cup$)

g) El recorrido o imagen es: $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$





13 Representa la función $f(x) = 2^x$

Se hace una tabla de valores:

x	…	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
$y = 2^x$	…	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	…

14 Representa la gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

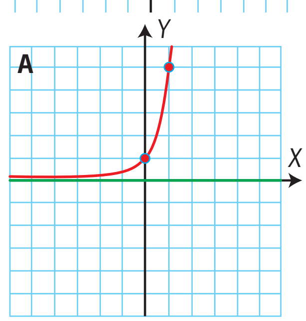
x	…	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
$y = (1/2)^x$	…	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	…

Observando los dos ejercicios resueltos anteriores se puede afirmar que las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$, $f(x) = (1/2)^x$ son simétricas respecto del eje Y. Esto es debido a que la función exponencial $f(x) = (1/2)^x$ es igual a la función $f(x) = 2^{-x}$

Paso de gráfica a ecuación

En el cálculo de a, se pueden presentar dos casos:

- Si la función es creciente, $a > 1$, a es la ordenada de la curva para $x = 1$
- Si la función es decreciente, $0 < a < 1$, a es el inverso de la ordenada de la curva para $x = -1$



15 Halla la ecuación de la función exponencial del dibujo A.

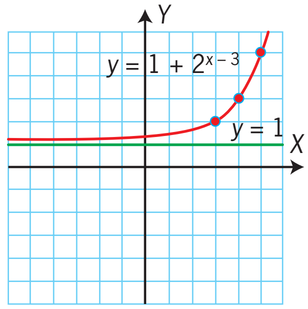
Como es creciente, $a > 1$. La ordenada para $x = 1$ es $5 \Rightarrow y = 5^x$

BS010656_11_4eso_mates.indd 216 6/2/23 14:07

Traslaciones de las funciones exponenciales

Si **la función exponencial $y = a^x$** se **traslada r unidades verticalmente y s unidades horizontalmente,** en la nueva fórmula se tiene que sumar r y sustituir x por $x - s$. Se obtiene: $\mathbf{y = r + a^{x-s}}$

La asíntota horizontal también se traslada r unidades. Su ecuación es $y = r$



16 Representa la función $y = 2^x$ trasladada tres unidades hacia la derecha y una hacia arriba. Halla la ecuación de la función trasladada.

El dibujo está en el margen.

La nueva ecuación es $\mathbf{y = 1 + 2^{x-3}}$. La ecuación de la asíntota es $y = 1$

Paso de gráfica a ecuación en el caso general

La fórmula general de una función exponencial es $\mathbf{y = r + a^{x-s}}$

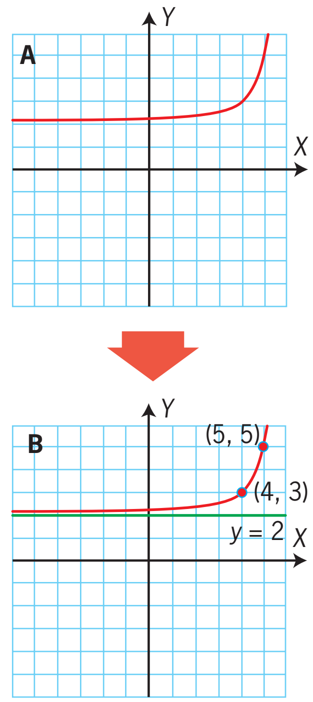
Para hallar r, s y a se sigue el procedimiento:

a) Se dibuja la asíntota horizontal y se halla su ecuación $y = r$

b) Se marca el punto de ordenada $r + 1$. La abscisa correspondiente es s

c) En el cálculo de a, se pueden presentar dos casos:

- Si la función es creciente, $a > 1$, se marca el punto de la gráfica cuya abscisa sea $s + 1$, y a es la distancia que hay desde el punto a la asíntota.
- Si la función es decreciente, $0 < a < 1$, se marca el punto de la gráfica cuya abscisa sea $s - 1$, y a es el inverso de la distancia que hay desde el punto a la asíntota.



17 Halla la ecuación de la función exponencial del dibujo A del margen.

a) Se dibuja la asíntota, $y = 2 \Rightarrow r = 2$

b) Se marca el punto de ordenada $r + 1$, que es $(4, 3) \Rightarrow s = 4$

c) Como la función es creciente $\Rightarrow a > 1$, se marca el punto de abscisa $s + 1$, que es $(5, 5)$. La distancia del punto $(5, 5)$ a la asíntota es $3 \Rightarrow a = 3$

La ecuación es $\mathbf{y = 2 + 3^{x-4}}$

10. Representa la función: $f(x) = 4^x$

11. Representa la siguiente función: $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

12. Representa la función: $f(x) = -3 + 4^{x-2}$

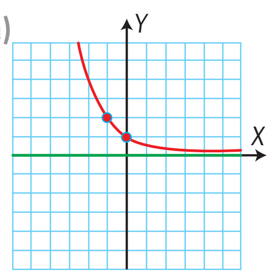
13. Representa la siguiente función:

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

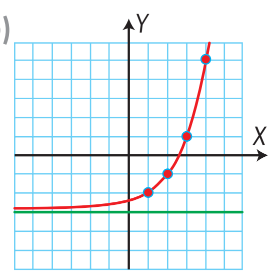
14. Una célula se reproduce por bipartición cada minuto. Halla la función que expresa el número de células en función del tiempo y represéntala gráficamente.

15. Halla la ecuación de cada una de las siguientes funciones exponenciales que están definidas por su gráfica.

a)



b)



BS010656_11_4eso_mates.indd 217 6/2/23 14:07

4 ¿Para qué sirve la función logarítmica?

ENGÁNCHATE

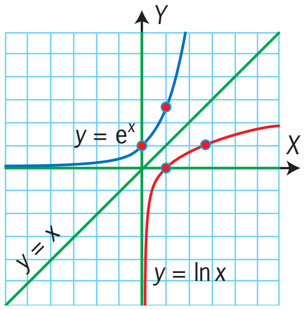
EXPLORA

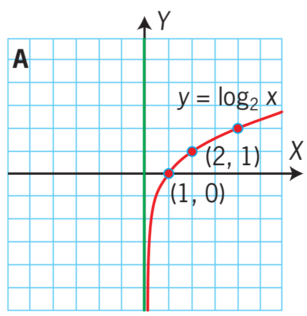
Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

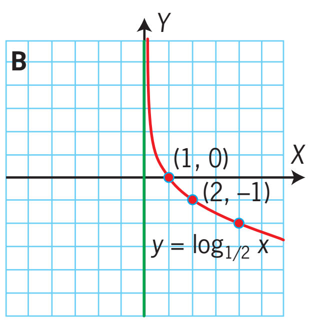
a) $\log_2 8$ b) $\log_2 1/8$ c) $\log_{1/2} 8$ d) $\log_{1/2} 1/8$ e) $\log_2 1$

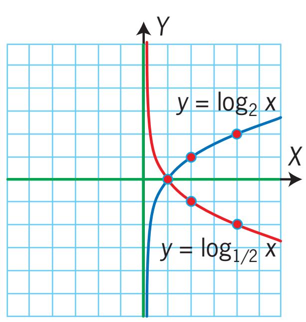
La función logaritmo neperiano

La función $y = \ln x$ es la inversa de $y = e^x$, y se utiliza con mucha frecuencia. Su gráfica es simétrica de $y = e^x$ respecto de la recta $y = x$









¿Cómo es la función logarítmica?

La **función logarítmica** es la inversa de la función exponencial $y = a^x$ y se representa por: $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, siendo $\boldsymbol{a > 0}$ y $\boldsymbol{a \neq 1}$

Las características generales de la función logarítmica son:

a) El dominio de definición son los números reales positivos: $(0, +\infty)$

b) Son continuas y siempre pasan por el punto $(a, 1)$

c) El eje Y es una asíntota vertical.

d) Cortan al eje X en el punto $(1, 0)$. No cortan al eje Y

e) Son crecientes si $a > 1$, y decrecientes si $0 < a < 1$

f) Son cóncavas ($\cap$) si $a > 1$, y convexas ($\cup$) si $0 < a < 1$

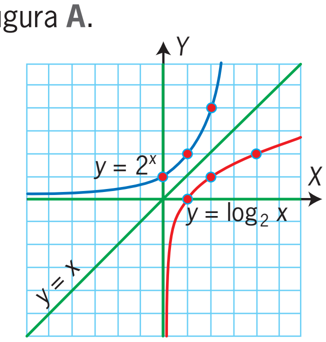
g) El recorrido o imagen son todos los números reales: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

18 Representa la función logarítmica $f(x) = \log_2 x$

Se hace una tabla de valores y se representa la figura **A**.

x	…	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	…
$y = \log_2 x$	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…

Como la función logarítmica $y = \log_2 x$ es la inversa de la función exponencial $y = 2^x$, sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$. Esto se observa en la figura de la derecha.

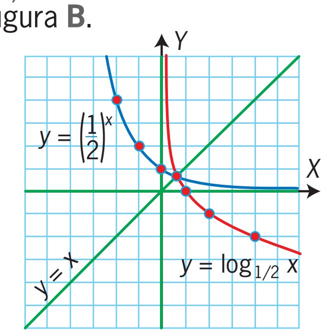


19 Representa la función logarítmica $f(x) = \log_{1/2} x = -\log_2 x$

Se hace una tabla de valores y se representa la figura **B**.

x	…	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	…
$y = \log_{1/2} x$	…	3	2	1	0	−1	−2	−3	…

Como la función logarítmica $y = \log_{1/2} x$ es la inversa de la función exponencial $y = (1/2)^x$, sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$. Esto se observa en la figura de la derecha.



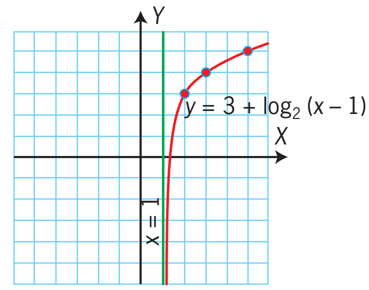
Observando los dos ejercicios resueltos anteriores se puede afirmar que las gráficas de las funciones logarítmicas $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = \log_{1/2} x$ son simétricas respecto del eje X. Esto es debido a que la función logarítmica $f(x) = \log_{1/2} x$ es igual a la función $f(x) = -\log_2 x$

Traslaciones de las funciones logarítmicas

Si se **traslada la función logarítmica $y = \log_a x$, r unidades verticalmente y s unidades horizontalmente,** en la nueva fórmula se tiene que sumar r y sustituir x por $x - s$. Se obtiene:

$$y = r + \log_a (x - s)$$

La asíntota vertical también se traslada s unidades. Su ecuación es $x = s$



20 Representa la función $y = \log_2 x$ trasladada una unidad hacia la derecha y tres hacia arriba. Halla la ecuación de la función trasladada.

La nueva ecuación es $y = 3 + \log_2 (x - 1)$. La ecuación de la asíntota es $x = 1$

Paso de gráfica a ecuación

La fórmula general de una función logarítmica es: $y = r + \log_a (x - s)$

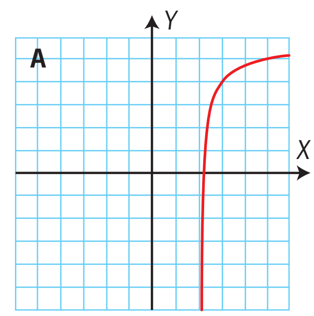
Para hallar r, s y a se sigue el procedimiento:

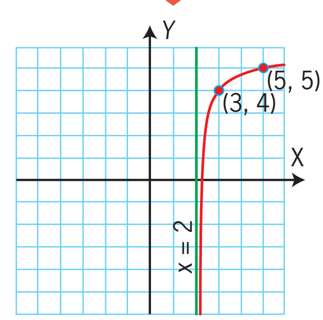
a) Se dibuja la asíntota vertical y se halla su ecuación $x = s$

b) Se marca el punto de abscisa $s + 1$. La ordenada correspondiente es r

c) En el cálculo de a se pueden presentar dos casos:

- Si la función es creciente, $a > 1$, se marca el punto de la gráfica cuya ordenada sea $r + 1$, y a es la distancia que hay desde el punto a la asíntota.
- Si la función es decreciente, $0 < a < 1$, se marca el punto de la gráfica cuya ordenada sea $r - 1$, y a es el inverso de la distancia que hay desde el punto a la asíntota.





21 Halla la ecuación de la función logarítmica del dibujo A del margen.

a) Se dibuja la asíntota, $x = 2 \Rightarrow s = 2$

b) Se marca el punto de abscisa $s + 1$, que es $(3, 4) \Rightarrow r = 4$

c) Como la función es creciente $\Rightarrow a > 1$, se marca el punto de ordenada $r + 1$, que es $(5, 5)$. La distancia del punto $(5, 5)$ a la asíntota es $3 \Rightarrow a = 3$

La ecuación es $y = 4 + \log_3 (x - 2)$

16. Representa la siguiente función: $f(x) = \log_3 x$

17. Representa la siguiente función: $f(x) = \log_{1/4} x$

18. Representa la función: $f(x) = 1 + \log_3 (x - 2)$

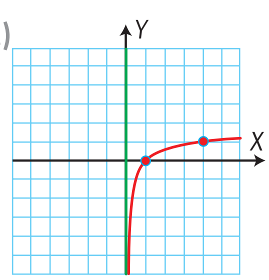
19. Representa la siguiente función:

$$f(x) = -3 + \log_{1/4} (x - 2)$$

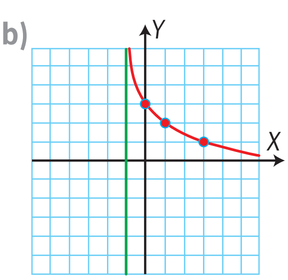
20. Dada la función siguiente: $y = -1 + 2^{x-3}$, calcula la función inversa, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

21. Halla la ecuación de cada una de las siguientes funciones logarítmicas que están definidas por su gráfica:

a)



b)



REPASA Y ELABORA

REPASA EJERCICIOS

22 Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{-x+5}{x-3}$$

Halla:

a) Su dominio.

b) Las ecuaciones de las asíntotas.

c) Las discontinuidades.

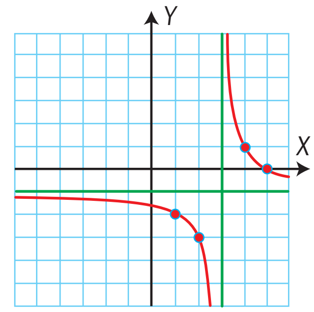
$$\begin{array}{r|l} -\cancel{x} + 5 & x-3 \\ \cancel{x} - 3 & -1 \\ \hline 2 & \end{array} \Rightarrow f(x) = -1 + \frac{2}{x-3}$$

a) Dom $(f) = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Asíntota vertical: $x = 3$
- Asíntota horizontal: $y = -1$

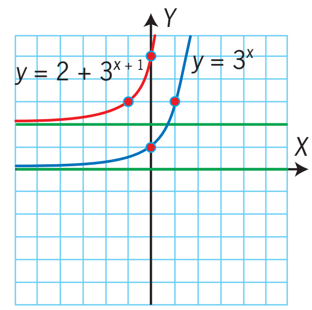
c) Es **discontinua en $x = 3$**



23 Dibuja la gráfica de la siguiente función y descríbela como traslación:

$$f(x) = 2 + 3^{x+1}$$

Es la función $y = 3^x$ trasladada 2 unidades hacia arriba y 1 unidad hacia la izquierda.



24 Dada la función

$$y = x^2 - 5; \quad x \geq 0$$

halla la función inversa.

Representa ambas funciones en los mismos ejes y di qué observas.

a) Se intercambian la x y la y

$y = x^2 - 5 \Rightarrow x = y^2 - 5$

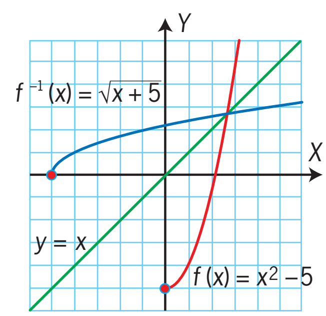
b) Se despeja la y

$-y^2 = -x - 5 \Rightarrow y^2 = x + 5 \Rightarrow y = \sqrt{x+5}$

c) Se escribe la función inversa:

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}; \quad x \geq -5$

Las funciones son simétricas respecto de la bisectriz del 1.er y 3.er cuadrantes, que es la recta $y = x$



ELABORA EJERCICIOS

22. Halla el dominio de las funciones:

a) $y = \dfrac{2x-7}{x-3}$ b) $y = \sqrt{x-2}$

23. Halla el dominio de las funciones:

a) $y = 3^{x+5}$ b) $y = \log_2 (x-1)$

24. Halla las discontinuidades de las funciones:

a) $y = \dfrac{x+1}{x-4}$ b) $y = \dfrac{x-5}{x+3}$

Clasifica las siguientes funciones. Represéntalas y halla su crecimiento:

25. a) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ b) $y = \sqrt{x-2}$

26. a) $y = -4 + 2^{x+3}$ b) $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$

27. a) $y = \sqrt{x+4}$ b) $y = 3 + \log_2 (x+2)$

28. a) $y = -3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ b) $y = \log_{1/2} (x-3)$

BS010656_11_4eso_mates.indd 220 6/2/23 14:07

REPASA PROBLEMAS

25 **La temperatura de un alimento que se introduce en un frigorífico sigue la función**

$$f(x) = \frac{4x + 15}{x + 1}$$

donde x es el tiempo transcurrido en horas y $f(x)$ la temperatura en °C

a) Representa la gráfica.

b) ¿Qué temperatura tenía el alimento al introducirlo en el frigorífico?

c) ¿Qué significado tiene la asíntota horizontal?

1. Datos:

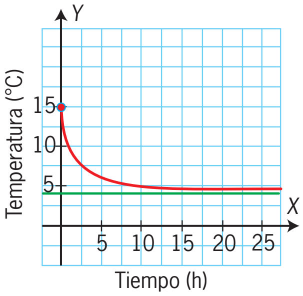
$f(x)$ da la temperatura en función del tiempo, x, en horas.

2. Preguntas:

- Representa la gráfica.
- ¿Cuál es la temperatura inicial del alimento?
- ¿Qué significa la asíntota horizontal?

3. Planteamiento y operaciones:

a) Gráfica:



b) $f(0) = 15$ °C

c) Asíntota horizontal:

$$\begin{array}{rl} \cancel{4x} + 15 & \underline{|\ x + 1} \\ -\cancel{4x} - \ \ 4 & \ \ 4 \\ \hline 11 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{11}{x + 1} + 4$$

La asíntota horizontal es $y = 4$ y significa que la temperatura a la que se aproxima con el paso del tiempo es 4 °C

4. Solución: La temperatura inicial es de **15 °C** y esta tiende a **4 °C**

26 **La concentración de material radiactivo en unos minerales viene dado por la función:**

$$f(t) = 1\,000 \cdot 4^{-t}$$

donde t es el tiempo transcurrido medido en cientos de años. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que se tenga una concentración de 250?

1. Datos:

- $f(t)$ da la concentración en función del tiempo, t, en cientos de años.

2. Pregunta:

- ¿Qué tiempo debe pasar para que la concentración sea de 250?

3. Planteamiento y operaciones:

$$1\,000 \cdot 4^{-t} = 250$$

$$4^{-t} = 0{,}25$$

$$-t \log 4 = \log 0{,}25$$

$$t \log 4 = -\log 0{,}25$$

$$t = -\frac{\log 0{,}25}{\log 4} = 1$$

4. Solución: Deben pasar **100 años.**

ELABORA PROBLEMAS

29. Un fármaco, cuya dosis inicial es de 500 mg, disminuye su presencia en el cuerpo un 20 % cada hora.

a) Calcula la función que da la cantidad de medicamento que queda en el cuerpo en función del tiempo.

b) ¿Qué cantidad de medicamento habrá en el organismo 4 horas después de la ingestión inicial?

c) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que la cantidad de medicamento en el cuerpo sea de 94 mg?

30. Se desea pintar una nave por 12 000 €. El dinero se lo reparten en partes iguales los pintores que hacen el trabajo. Calcula la función que expresa lo que cobra cada uno en función del número de pintores.

31. Un coche eléctrico tiene una autonomía de 240 km. Se sabe que sus baterías tienen una pérdida media de almacenamiento de 2,3 % al año.

a) Calcula la función que expresa la autonomía en función del tiempo.

b) Calcula la autonomía del coche a los 5 años de uso.

c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que la autonomía sea de 190 km?

32. Un grifo con un caudal de 25 L/min tarda en llenar un depósito de 4 h. Calcula la función que da el caudal del grifo en L/h en función del tiempo en horas. Clasifica la función obtenida.

ACTIVIDADES FINALES

ELABORA ACTIVIDADES DE LAS SECCIONES

1 ¿Qué es una función racional?

33. Representa la gráfica de la función $y = 2/x$, calcula el valor de la constante de proporcionalidad, e indica si esta es creciente o decreciente.

34. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$

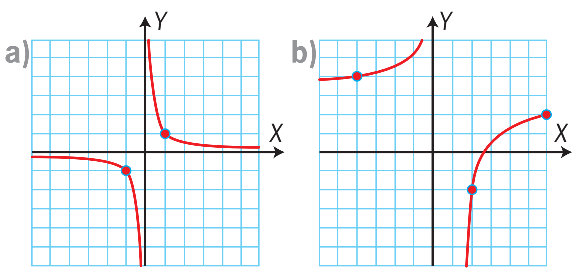
Halla:

a) Su dominio.

b) Las ecuaciones de las asíntotas.

c) Las discontinuidades.

35. Halla la ecuación de las siguientes funciones:



2 ¿Cómo se opera con funciones?

36. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = (x+5)^2 \qquad g(x) = (x-5)^2$$

calcula:

a) $f + g$ b) $f - g$

37. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - 16 \qquad g(x) = (x+4)^2$$

calcula:

a) $f \cdot g$ b) f/g c) $\text{Dom}(f/g)$

38. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x + 5 \qquad g(x) = x^2$$

calcula:

a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

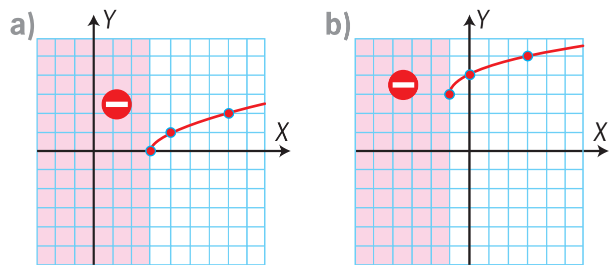
39. Calcula f^{-1} dada la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

40. Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x-1}$, halla su dominio y represéntala.

41. Halla la fórmula de las siguientes funciones:



3 ¿Para qué sirve la función exponencial?

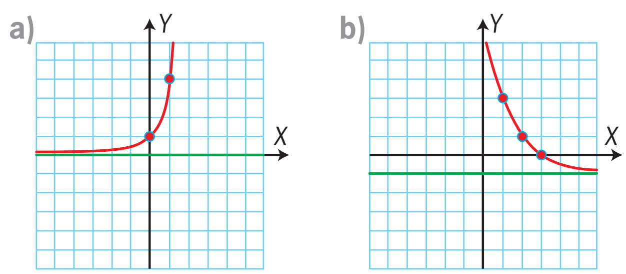
42. Representa la siguiente función: $f(x) = 3^x$

43. Representa la función $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

44. Representa la siguiente función: $f(x) = 2 + 3^{x-1}$

45. Representa la función $f(x) = 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+3}$

46. Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:



47. Un estanque contiene 8 hectolitros de agua y cada mes se gasta la mitad de su contenido. Halla la función que define la capacidad que queda en el estanque en función del tiempo y represéntala gráficamente.

4 ¿Para qué sirve la función logarítmica?

48. Representa la siguiente función:

$$f(x) = \log_4 x$$

49. Representa la siguiente función:

$$f(x) = \log_{1/3} x$$

50. Representa la siguiente función:

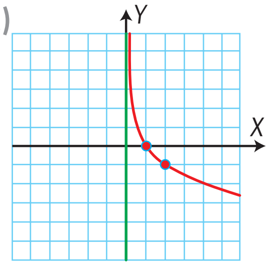
$$f(x) = 2 + \log_4 (x-3)$$

51. Representa la siguiente función:

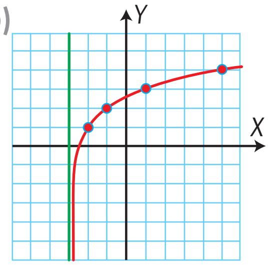
$$f(x) = -1 + \log_{1/3} (x+2)$$

52. Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



53. Halla la función inversa de $y = 3 + \log_2 (x - 1)$, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

54. Halla la función inversa de:

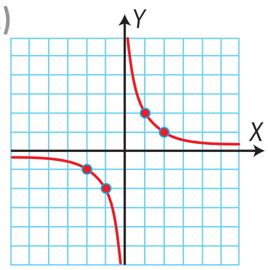
$$y = 3 + 2^{x-1}$$

Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

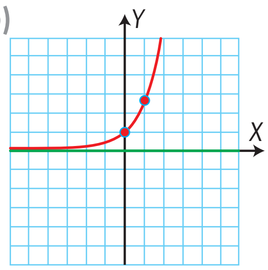
ELABORA PROBLEMAS

55. Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



56. Un árbol crece durante los tres primeros años según la función $y = -1 + 2^x$. Representa dicha función en los tres primeros años de vida del árbol.

57. Dadas las funciones:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = \sqrt{x - 1},\ x \geq 1$$

calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

58. Dada la siguiente función: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ calcula:

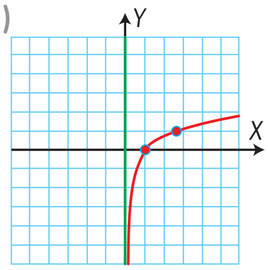
a) $f \circ f$

b) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

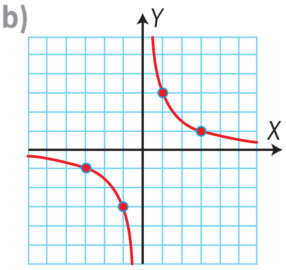
59. Calcula la función inversa de $f(x) = x^2 - 5,\ x \geq 0$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

60. Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



61. Calcula la función inversa de $f(x) = \sqrt{x + 1}$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

Representa en unos mismos ejes coordenados las siguientes funciones y luego halla los puntos de corte:

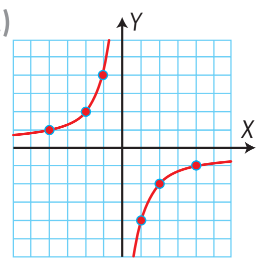
62. $y = x^2$ $\qquad y = \sqrt{x}$

63. $y = 2^x$ $\qquad y = \dfrac{2}{x}$

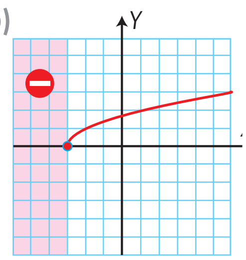
64. $y = 2^{x-2}$ $\qquad y = 2 + \log_2 (x - 2)$

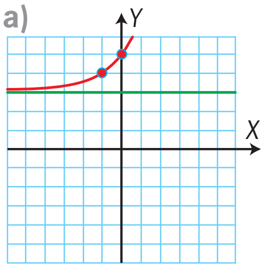
Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

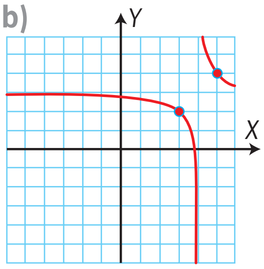
65. a)

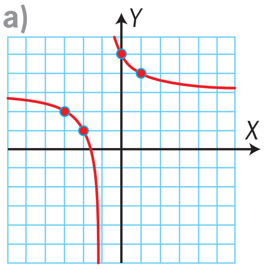


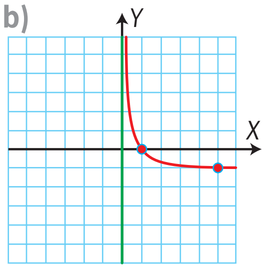
b)

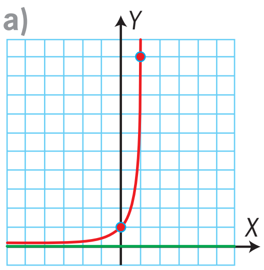


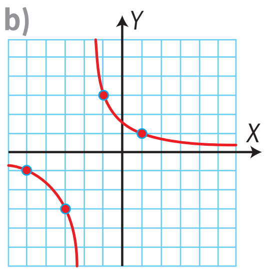
66. a)


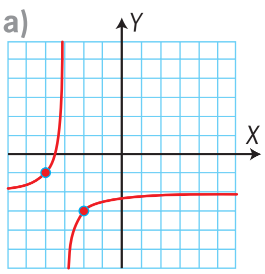
b)


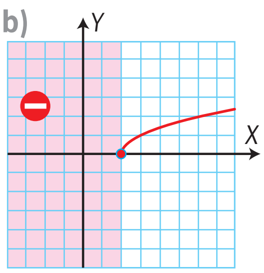
67. a)


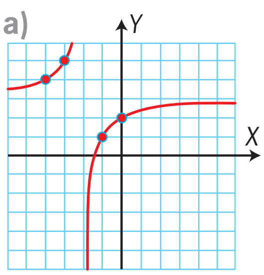
b)


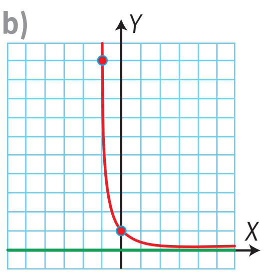
68. a)


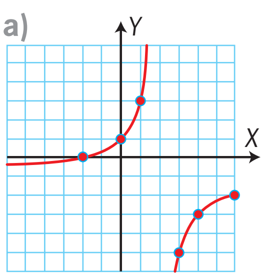
b)


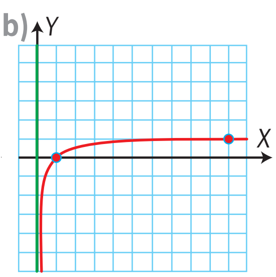
69. a)


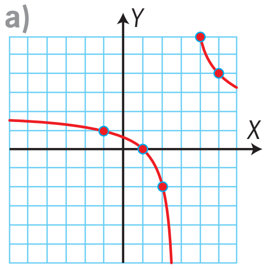
b)


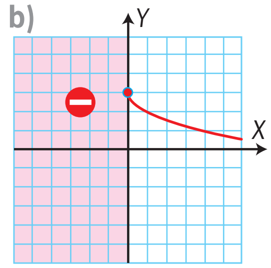
70. a)


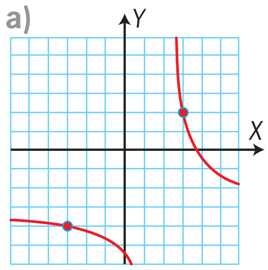
b)


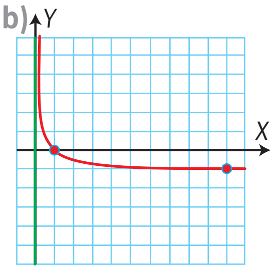
71. a)


b)


72. a)


b)


73. a)


b)


74. En una granja se dispone de pienso para alimentar 1 000 pollos durante 40 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de pollos. Clasifica dicha función.

75. La bacteria *Eberthella typhosa* se reproduce por bipartición cada hora. Si partimos de un millón de bacterias, calcula:

a) la función que expresa el número de bacterias en función del tiempo;

b) ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 24 horas? Da el resultado en notación científica.

c) ¿qué tiempo tiene que transcurrir para tener 1 024 millones de bacterias?

76. Los ingresos y gastos, en millones de euros, de una empresa en función del número de años que lleva funcionando vienen dados por:

$$i(x) = 8x - x^2 \qquad g(x) = 3x$$

a) Calcula la función que da los beneficios de dicha empresa.

b) ¿Cuándo empieza a ser deficitaria la empresa?

77. Las diferencias de presiones, que aparecen al ascender por una montaña, son la causa del mal de montaña y del dolor de oídos. Se ha probado experimentalmente que la presión viene dada por la fórmula $y = 0{,}9^x$, donde y se mide en atmósferas, y x, en miles de metros.

a) Representa dicha función.

b) ¿Qué presión hay a 3 000 m de altura?

c) ¿A qué altura tendremos que ascender para que la presión sea de 0,59 atmósferas?

78. Halla la función que calcula la longitud del lado de un cuadrado de área x m^2. Clasifica la función obtenida.

79. Un barco de vela deportivo cuesta un millón de euros. Si se devalúa un 18 % anualmente, calcula:

a) la función que expresa el valor en función del número de años;

b) el valor que tendrá al cabo de 10 años;

c) ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que valga la mitad del precio inicial?

80. El alquiler de un piso es de 500 € mensuales. Si en el contrato se hace constar que se subirá un 3 % anual, calcula:

a) la función que expresa el precio del alquiler en función del número de años;

b) el precio del alquiler al cabo de 10 años;

c) ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el alquiler?

81. Un bosque tiene 5 m^3 de madera. Si el ritmo de crecimiento es de un 10 % al año, calcula:

a) la función que expresa el volumen de madera en función del número de años;

b) el volumen que tendrá al cabo de 15 años;

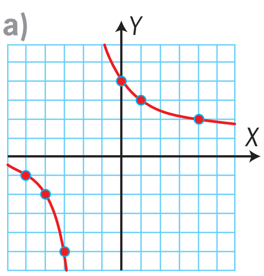
c) ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que se triplique el volumen?

82. Calcula la función inversa de $f(x) = e^x$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

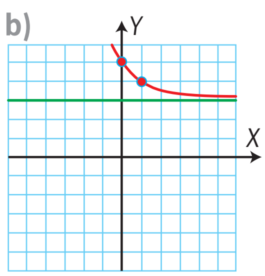
83. Calcula la función inversa de $f(x) = \frac{4}{x}$. ¿Qué puedes afirmar viendo el resultado que has obtenido?

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

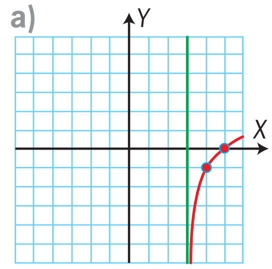
84. a)



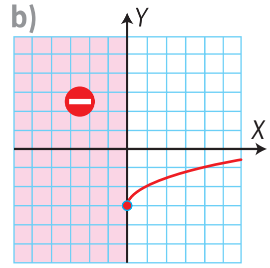
b)



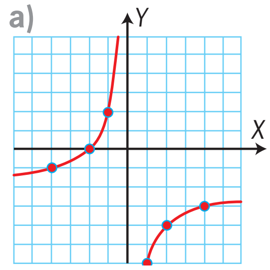
85. a)



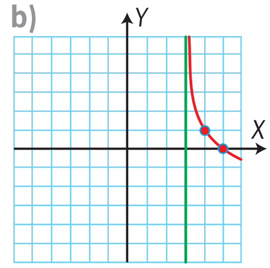
b)



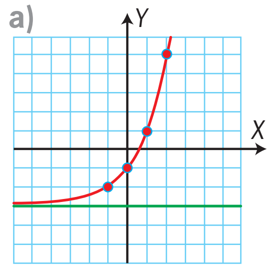
86. a)



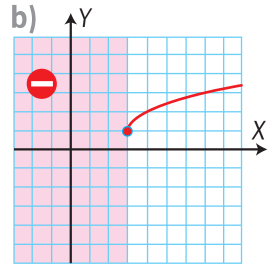
b)



87. a)



b)



88. Para recolectar las fresas de una huerta, 20 trabajadores tardan 5 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de trabajadores. Clasifica la función obtenida.

89. Halla la función que calcula la longitud del radio de un círculo de área x m^2. Clasifica la función obtenida.

90. Se define el periodo radioactivo como el tiempo necesario para que la mitad de los átomos de un isótopo se hayan desintegrado, emitiendo radiaciones. El actinio tiene un periodo de desintegración de 30 años. Escribe la función que calcula la cantidad de actinio en función del número de años. Si tenemos inicialmente 25 g de actinio, al cabo de 150 años ¿cuánto actinio tendremos?

91. Un capital de 30 000 € se deposita en un banco a interés compuesto del 5 %. Calcula:

a) la función que expresa el valor del capital en función del número de años;

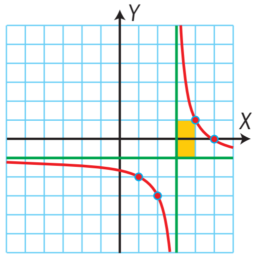
b) el valor que tendrá al cabo de 15 años;

c) ¿Cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el capital inicial?

COMPETENCIA digital
con GeoGebra y CalcMe en Moodle

1 Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Halla la ecuación de la siguiente función:



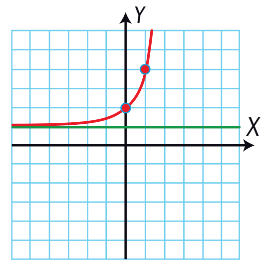
SOLUCIÓN

En GeoGebra elige el *applet*: **CUESTIONARIO: Hipérbola general, $y = k/(x - s) + r$ Representación.**

Si $y = k/(x - s) + r$, escribe los valores de los coeficientes: $k = \boxed{2}$ $r = \boxed{-1}$ $s = \boxed{3}$

2 Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Halla la ecuación de la siguiente función:



SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Traslaciones de las funciones exponenciales.**

$y = \boxed{1 + 3^x}$

3 Problema (Calificación: 2,5 puntos)

Una tormenta ha anegado un garaje. Sabemos que 2 autobombas lo desaguan en 18 horas.

a) Halla la función que calcule el tiempo que se tarda en desaguar en función del número de autobombas.

b) ¿Cuántas autobombas se necesitarán si se quiere desaguar el garaje en 4 horas?

SOLUCIÓN

a) $f(x) = \boxed{36/x}$ b) N.º de autobombas = $\boxed{9}$

4 Problema (Calificación: 2,5 puntos)

Un cultivo de bacterias tiene una población inicial de 1 000 individuos y se sabe que se reproduce de forma exponencial al ritmo del 5 % cada hora.

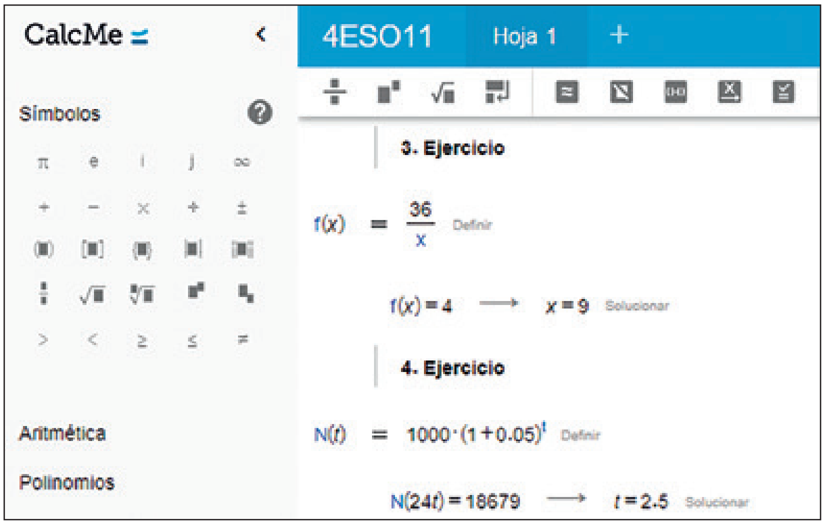
a) Escribe una función que exprese el número de bacterias en el cultivo en función del tiempo en horas.

b) Calcula cuánto tiempo, en días, transcurrirá para que haya 18 679 bacterias.

SOLUCIÓN

a) $N(t) = \boxed{1\,000(1 + 0.05)^t}$

b) Tiempo = $\boxed{2{,}5}$ $\boxed{\text{días}}$



COMPRUEBO mis COMPETENCIAS

Ley de Boyle-Mariotte

En Química se estudia la ley de Boyle-Mariotte, que dice que dada una determinada cantidad de gas a temperatura constante, la presión es inversamente proporcional al volumen.

92. Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, y clasifícala.

93. Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, sabiendo que para una determinada cantidad de gas $P = 3$ atmósferas, $V = 4$ litros. Represéntala gráficamente.

eVALÚATE

COMPRUEBA TUS RESPUESTAS

1 Define función exponencial y pon un ejemplo.

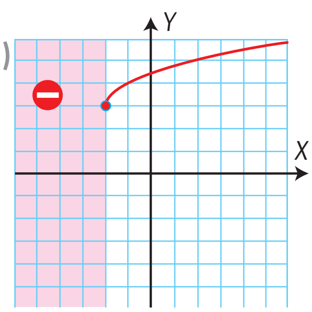
2 Clasifica y representa la función $y = 4/x$, calcula el valor de la constante de proporcionalidad, indica si la función es creciente o decreciente y di si es continua.

3 Halla la función inversa de $f(x) = x^2 - 1$, $x \geq 0$. Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

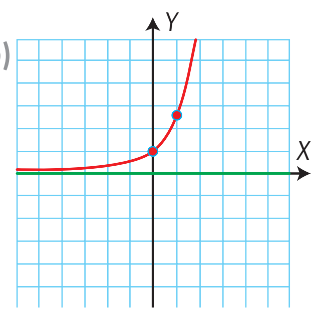
4 Clasifica, halla el dominio y representa la función: $f(x) = 3 + \log_2 (x + 1)$

5 Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)

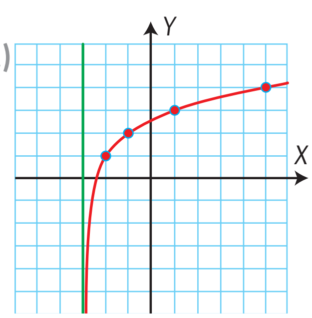


b)

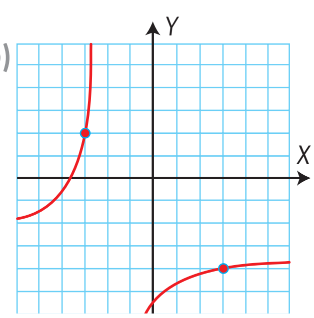


6 Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



b)



7 Para hacer la revista del centro, 8 alumnos tardan 6 días. Calcula la función que expresa el número de días en función del número de alumnos. Clasifica la función obtenida.

8 Una ciudad tiene un índice de crecimiento de población del 0,5 %. Si en el año 2000 tenía 3 millones de habitantes, escribe la función que calcula la población en función del número de años. ¿Cuántos habitantes tendrá en el año 2050?