

UNIDAD

12

Combinatoria y probabilidad

Arias Cabezas, J. M. y Maza Sánchez, I. (2023).
Matemáticas, 4º A ESO, Proyecto 5E. Madrid, Editorial
Bruño del Grupo ANAYA. ISBN: 9788469634042



¿Para qué sirve la estadística?

La combinatoria y la probabilidad se aplican en numerosas situaciones. Así, por ejemplo, puede utilizarse para hallar cuántos menús diferentes se pueden formar si disponemos de 8 primeros, 5 segundos y 6 postres.

En esta unidad descubriremos juntos:

- 1 ¿Qué son las variaciones y permutaciones?
- 2 ¿Qué son los problemas de combinatoria?
- 3 ¿Qué es la probabilidad?
- 4 ¿Qué son los experimentos aleatorios compuestos?

e LABORA

Comienza la unidad en tu cuaderno con una portada. En primer lugar, escribe el número de la unidad y el título: **UNIDAD 12. Combinatoria y probabilidad**. En el resto de la página haz un dibujo que sea una aplicación de la combinatoria o la probabilidad (no vale repetir el del libro) y en la parte inferior escribe un texto de 2 o 3 líneas explicando la relación del dibujo con los contenidos de la UNIDAD.

También debes hacer en el cuaderno el Explora de la primera sección.

1 ¿Qué son las variaciones y permutaciones?

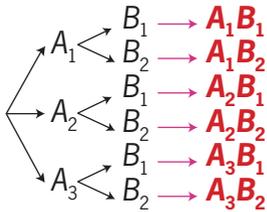


E XPLORA

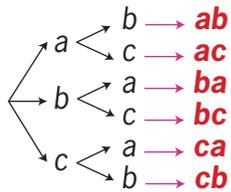
Un restaurante oferta, en el menú del día, 5 platos de primero, 4 de segundo y 3 de postre. ¿Cuántos menús diferentes se pueden pedir?

¿Cómo se calculan las variaciones y permutaciones?

1 Dibuja el árbol correspondiente a los posibles menús que se pueden formar en un restaurante que tiene 3 platos de primero y 2 de segundo.



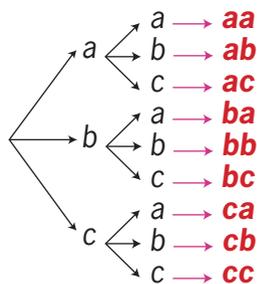
2 Con las letras *a*, *b* y *c* forma todos los grupos que puedas de dos letras **sin repetir ninguna**.



$$3 \cdot 2 = 6$$

$$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$3 \text{ nPr } 2 = 6$$



$$3 \cdot 3 = 9$$

$$3 \text{ x}^2 = 9$$

Diagrama de árbol

- Un **diagrama de árbol** es un gráfico que nace de un tronco y sus brazos se van ramificando como un árbol. Se llama así porque está formado de ramas.
- Una **rama** es cada una de las flechas del diagrama.
- Un **camino** es un conjunto de ramas que van desde el principio al final.

Variaciones ordinarias o sin repetición

Las **variaciones ordinarias o sin repetición** de m elementos tomados de p en p , siendo $p \leq m$, son los diferentes grupos de **p elementos distintos entre sí** que se pueden formar con los m elementos, de forma que, en cada dos grupos:

- el orden de los elementos es distinto o
- alguno de los elementos es distinto.

Se representan por $V_{m,p}$, o bien V_m^p , y se tiene que:

$$V_{m,p} = \underbrace{m(m-1)(m-2)(m-3) \dots [m-(p-1)]}_{p \text{ factores decrecientes en una unidad y consecutivos}}$$

Variaciones con repetición

Las **variaciones con repetición** de m elementos tomados de p en p son los diferentes grupos de **p elementos** que se pueden formar con los m elementos, de forma que en cada dos grupos:

- el orden de los elementos es distinto o
- alguno de los elementos es distinto.

Se representan por $VR_{m,p}$, o bien VR_m^p , y se tiene que:

$$VR_{m,p} = m^p$$

3 Con las letras *a*, *b* y *c* forma todos los grupos que puedas de dos letras.

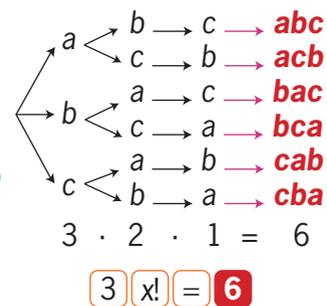
$$VR_{3,2} = 3^2 = 9$$

Permutaciones ordinarias o sin repetición

Las **permutaciones ordinarias o sin repetición** de m elementos son los diferentes grupos de **m elementos distintos entre sí** que se pueden formar de manera que en cada dos grupos el orden de los elementos es distinto.

Se representan por P_m , y se tiene que:

$$P_m = m! = m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$



4 Con las letras **a, b y c** forma todas las palabras que puedas de tres letras **sin repetir ninguna**.

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Las **permutaciones** son un caso particular de las variaciones cuando $m = p$. En realidad una permutación es simplemente un cambio de orden.

Permutaciones circulares

En las **permutaciones circulares** se fija un elemento y se hace permutar al resto.

$$PC_m = (m-1)!$$

5 ¿De cuántas formas se pueden sentar cinco personas alrededor de una mesa circular?

Se deja siempre una de las personas fija y se cambia de todas las formas posibles al resto.

$$PC_5 = 4! = 24$$

Factorial

El **factorial** de un número es el producto de dicho número por todos los números naturales menores que él. Se representa por $m!$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Casos particulares

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$



1. Calcula mentalmente:

a) $V_{10,3}$

b) $VR_{10,3}$

2. Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas en que puede vestirse una persona que tiene dos camisas y tres pantalones. ¿Cuántas son?

3. Con los dígitos 2, 4, 6 y 8 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?

4. Con los dígitos 8 y 9, forma todos los números de tres cifras que puedas. ¿Cuántos son?

5. Con los dígitos 1, 2 y 3 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?

6. ¿De cuántas formas se pueden sentar 10 personas alrededor de una mesa circular, de forma que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

7. El sistema actual de matrículas dice: «En las placas de matrícula se inscribirán dos grupos de caracteres constituidos por un número de cuatro cifras, que irá desde el 0000 al 9999, y de tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales y las letras Ñ y Q».

¿Cuántas matrículas hay con las letras BBB?

8. Calcula, usando la calculadora:

a) $V_{8,5}$

b) $VR_{7,3}$

c) P_6

d) PC_8

2 ¿Qué son los problemas de combinatoria?



EXPLORA

Calcula mentalmente el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{7}{0}$ b) $\binom{8}{1}$ c) $\binom{5}{5}$ d) $\binom{6}{5}$

¿Cómo se resuelven problemas de combinatoria?

Observa

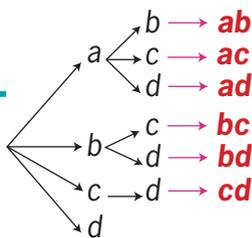
$$C_{m,p} = \frac{V_{m,p}}{P_p}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Casos particulares

$$\binom{m}{0} = 1, \binom{m}{m} = 1, \binom{m}{1} = m$$

$$\binom{5}{0} = 1, \binom{6}{6} = 1, \binom{8}{1} = 8$$



$$4 \text{ nCr } 2 = 6$$

Combinaciones ordinarias o sin repetición

Las **combinaciones ordinarias o sin repetición** de m elementos tomados de p en p , siendo $p \leq m$, son los diferentes grupos de **p elementos distintos entre sí** que se pueden formar con los m elementos de forma que en cada dos grupos alguno de los elementos es distinto.

Se representan por $C_{m,p}$, o bien C_m^p , y se tiene que:

$$C_{m,p} = \binom{m}{p}$$

Para formar las combinaciones ordinarias, se diseña un árbol; en la 1.^a columna se colocan todos los elementos, en la 2.^a columna por cada elemento de la 1.^a columna se colocan todos los elementos que le siguen en orden, etcétera.

Cuando el número de la parte inferior es mayor que la mitad del número de la parte superior, se aplica la siguiente propiedad de los números combinatorios.

$$\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$$

6 Con las letras a, b, c y d forma todos los grupos que puedas de dos letras sin repetir ninguna y de modo que ninguna de las palabras tenga las mismas letras.

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

Cuadro resumen de fórmulas combinatorias

	Fórmula	Ejemplo	Calculadora
Variaciones ordinarias	$V_{m,p} = m(m-1)(m-2) \dots [m-(p-1)]$	$V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$	nPr
Variaciones con repetición	$VR_{m,p} = m^p$	$VR_{5,3} = 5^3 = 125$	\wedge o x^y
Permutaciones	$P_m = m!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$	x!
Combinaciones	$C_{m,p} = \binom{m}{p}$	$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$	nCr

Combinatoria: estrategias de resolución de problemas

La **resolución de problemas de combinatoria** se puede definir como el arte inteligente de contar. Para ello, se sigue este procedimiento:

- a) Se escriben el conjunto E del que se toman los elementos y dos grupos de dicho conjunto que verifiquen las condiciones del problema y sean lo más significativos posibles, prestando atención especial a si:
- El orden de los elementos es importante.
 - En cada grupo entran todos los elementos.
 - Se pueden repetir los elementos.

b) Se clasifica mediante el método de interrogación:

¿Influye el orden? $\left\{ \begin{array}{l} \text{No} \Rightarrow \text{Combinaciones} \\ \text{Sí} \Rightarrow \text{¿En cada grupo entran todos los elementos?} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Sí} \Rightarrow \text{Permutaciones} \\ \text{No} \Rightarrow \text{Variaciones} \Rightarrow \text{¿Hay repetición?} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Sí} \Rightarrow \text{Con repetición} \\ \text{No} \Rightarrow \text{Sin repetición} \end{array} \right.$

c) Se escribe la fórmula y se calcula su valor.

7 Con los dígitos impares, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar?

a) $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $m = 5$, $p = 3$. Dos ejemplos significativos son: 353, 335

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición. \Rightarrow Variaciones con repetición.

c) $VR_{5,3} = 5^3 = \mathbf{125}$ $5 \times^3 = 125$

8 Un examen consta de 8 preguntas de las que hay que elegir 5. ¿De cuántas formas se pueden elegir?

a) $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $m = 8$, $p = 5$. Dos ejemplos son: $abcde$, $bcegh$.

b) No influye el orden y no hay repeticiones. \Rightarrow Combinaciones.

c) $C_{8,5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{56}$ $8 \text{ nCr } 5 = 56$

9 En una carrera de velocidad de 100 m participan 5 atletas. ¿De cuántas formas pueden entrar en meta?

a) $E = \{a, b, c, d, e\}$, $m = 5$, $p = 5$. Dos ejemplos son: $abcde$, $dbeac$.

b) Influye el orden, entran todos los elementos. \Rightarrow Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$ $5 \text{ x! } = 120$



¿De cuántas formas pueden entrar en meta estos 5 atletas?



9. Calcula mentalmente: $C_{5,2}$ y $C_{6,4}$

10. Con las letras A, B, C, D y E forma todas las combinaciones que puedas de dos letras sin que se repita ningún par de palabras de modo que ningún par de palabras tenga las mismas letras.

11. ¿Cuántas columnas de quinielas hay que cubrir como mínimo para acertar en una los 14 primeros?

12. En una clase hay 25 alumnos. ¿De cuántas formas se puede elegir un delegado y un subdelegado?

13. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

14. Con 8 jugadores, ¿cuántos equipos de baloncesto se pueden formar, si cada jugador puede jugar en cualquier puesto?

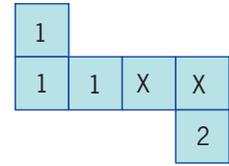
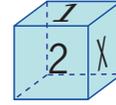
15. Halla, usando la calculadora: $C_{10,5}$ y $C_{15,7}$

3 ¿Qué es la probabilidad?

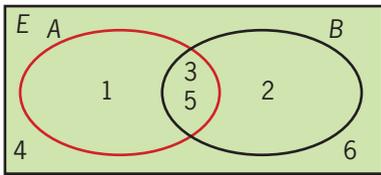
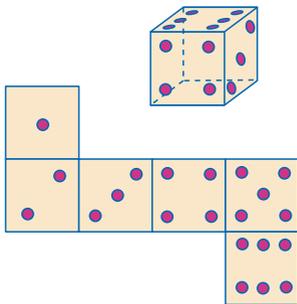


EXPLORA

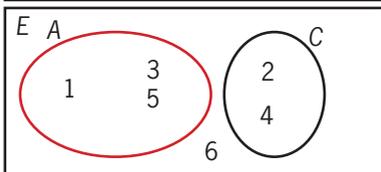
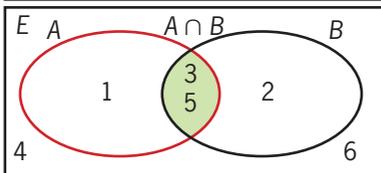
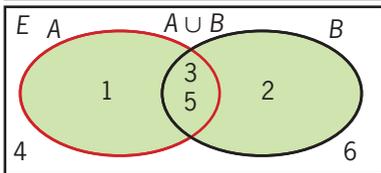
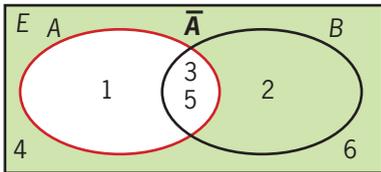
¿Cuántas caras tiene un dado de quinielas?
¿Qué cara es más probable obtener: 1, X o 2?



¿Qué son los experimentos aleatorios simples?



Contrario de A
 $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$



Espacio muestral

El **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio simple está formado por el conjunto de todos los resultados que se pueden presentar. Se representa por la letra **E**

- **Suceso elemental:** es cada uno de los resultados del espacio muestral.
- **Suceso:** es un conjunto de sucesos elementales. Se representan por letras mayúsculas, poniendo sus elementos entre llaves y separados por comas.
- **Suceso seguro:** es el que siempre se presenta; es el espacio muestral E
- **Suceso imposible:** es el que nunca se presenta. Se representa por \emptyset

En el experimento de lanzar un dado de seis caras:

- Espacio muestral o suceso seguro: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sucesos elementales: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ y $\{6\}$
- Sucesos: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$
- Suceso imposible: $\emptyset = \{\text{obtener } 8 \text{ o } 9\}$

Operaciones con sucesos

Suceso contrario: el **suceso contrario de un suceso A** está formado por todos los sucesos elementales que no están en A. Se representa por \bar{A}

Unión de sucesos: la **unión de dos sucesos A y B** es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B. Se representa por $A \cup B$

$$\text{Sea } A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

• **Intersección de sucesos:** la **intersección de dos sucesos A y B** es el suceso formado por todos los sucesos elementales comunes a A y a B, es decir, que están en los dos sucesos a la vez. Se representa por $A \cap B$

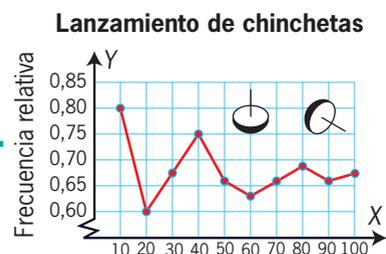
• **Sucesos compatibles e incompatibles:** dos sucesos son **compatibles** si se pueden presentar al mismo tiempo, es decir, si $A \cap B \neq \emptyset$, y son **incompatibles** si no se pueden presentar a la vez, es decir, si $A \cap B = \emptyset$

- Si $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow A \cap B = \{3, 5\} \Rightarrow A$ y B son compatibles.
- Si $A = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4\} \Rightarrow A \cap C = \emptyset \Rightarrow A$ y C son incompatibles.

Ley de los grandes números

La **ley de los grandes números** dice que la **probabilidad** de un suceso es la constante a la que se aproxima la frecuencia relativa cuando el experimento se repite muchísimas veces.

10 Se repite muchas veces el experimento de lanzar al aire una chincheta, y se anota el número de veces que queda con la punta hacia arriba. Halla la probabilidad de este suceso.



N.º de lanzamientos	N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	...
Frecuencia absoluta	n	8	12	20	30	33	38	46	55	59	67	...
Frecuencia relativa	f	0,8	0,6	0,67	0,75	0,66	0,63	0,66	0,69	0,66	0,67	...

Se puede inferir que: $P(\uparrow) = 2/3$

Regla de Laplace

La **regla de Laplace** dice: la probabilidad de un suceso A , de un espacio muestral E , formado por sucesos elementales **equiprobables**, es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables al suceso } A}{\text{N.º de casos posibles}}$$

11 Halla la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado de seis caras.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Espacio muestral } E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \text{Suceso } A = \{2, 3, 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Propiedades de la probabilidad

- La probabilidad del suceso seguro es uno, $P(E) = 1$
- La probabilidad del suceso imposible es cero, $P(\emptyset) = 0$
- La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre cero y uno, $0 \leq P(A) \leq 1$
- La probabilidad del suceso contrario es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si los sucesos A y B son incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si los sucesos A y B son compatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sucesos equiprobables

Los sucesos elementales de un espacio muestral son **equiprobables** si tienen la misma posibilidad de ocurrir; solo en estos casos se puede aplicar la **regla de Laplace**.

Resolución de problemas

En los **problemas de probabilidad** se debe escribir siempre el espacio muestral y el suceso del que se tiene que calcular la probabilidad.

12 Si $P(A) = 1/3$, $P(B) = 2/3$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Calcula $P(A \cup B)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{4 + 8 - 3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

16. Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{3, 6\}$. Calcula: $A \cup B$, $A \cap B$, \bar{A} y \bar{B}

17. Halla la probabilidad de obtener múltiplo de 3 al lanzar un dado de 6 caras.

18. Se sabe que $P(A) = 2/5$. Halla $P(\bar{A})$

19. Se lanzan 100 chinchetas al aire y 65 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta quede con la punta hacia arriba.

20. Se sabe que:

$$P(A) = 3/4, P(B) = 2/5 \text{ y } P(A \cup B) = 8/9$$

Calcula: $P(A \cap B)$

4 ¿Qué son los experimentos aleatorios compuestos?



EXPLORA

Diseña un árbol de probabilidades para el experimento de lanzar dos monedas al aire.

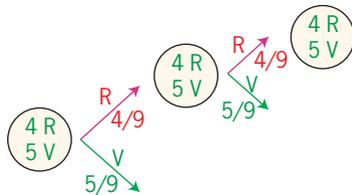
¿Cómo se resuelven problemas de probabilidad compuesta?

- Lanzar dos monedas.
- Lanzar tres monedas.
- Lanzar dos dados.
- Lanzar una moneda y un dado.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Observa

Cuando se extraen dos bolas de una urna «**con devolución**», los sucesos son **independientes**, y cuando se extraen «**sin devolución**», son **dependientes**.



La mejor estrategia

La mejor estrategia para resolver un problema de probabilidad cuando el experimento es compuesto consiste en diseñar un árbol de probabilidades, de modo que en cada **rama** se pone arriba el suceso y abajo la probabilidad.

Experimento compuesto

Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples.

Diagrama cartesiano

Un **diagrama cartesiano** es una tabla de doble entrada, que tiene utilidad en algunos experimentos compuestos formados por dos simples. En la fila superior se colocan los sucesos elementales de un experimento simple, y en la columna de la izquierda, los sucesos elementales del otro experimento simple.

13 **Calcula la probabilidad de que, al lanzar dos dados de seis caras, la suma de los números obtenidos sea 5**

$$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Sucesos dependientes e independientes

Los sucesos A y B son **independientes** si la probabilidad de uno de ellos no depende de que se haya verificado el otro. En otro caso, se llaman **dependientes**.

14 **Una urna tiene 4 bolas rojas y 5 verdes. Se extrae una bola, se observa el color y se vuelve a introducir; luego se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas? ¿Son dependientes o independientes?**

$$P(RR) = P(R) \cdot P(R) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

Son **independientes** porque la probabilidad de que la 2.^a bola sea roja no depende del color de la 1.^a bola.

Probabilidad condicionada

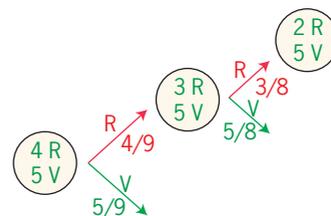
La **probabilidad del suceso B condicionado por el suceso A** es la probabilidad de que se realice B sabiendo que se ha realizado A . Se representa por $P(B/A)$

Las probabilidades condicionadas son las segundas ramas y sucesivas de los árboles.

15 En una urna hay 4 bolas rojas y 5 verdes. Se extraen dos bolas sin devolución. Halla la probabilidad de que la 2.^a bola sea roja con la condición de que la 1.^a haya sido roja también.

$A = \text{«Extraer bola roja la 1.ª vez»}$ $B = \text{«Extraer bola roja la 2.ª vez»}$

Hay que hallar $P(B/A)$. En el árbol se observa que $P(B/A) = 3/8$

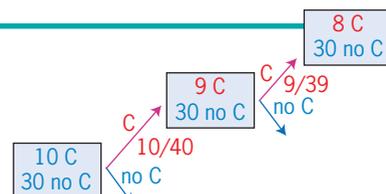


Regla del producto o de la probabilidad compuesta

La **regla del producto o de la probabilidad compuesta** dice que la probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas que lo forman.

16 Halla la probabilidad de obtener dos copas al extraer sin devolución dos cartas de una baraja española de 40 cartas.

$$P(CC) = P(C) \cdot P(C/C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$$



Regla de la suma o de la probabilidad total

La **regla de la suma o de la probabilidad total** dice que la probabilidad de varios caminos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los caminos.

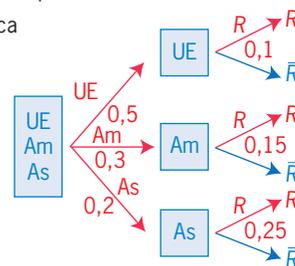
Intuitivamente se observa que si hay varios caminos que se pueden verificar, la probabilidad aumenta; luego parece lógico que se sumen las probabilidades.

17 Una empresa realiza el 50% de sus operaciones en la Unión Europea, el 30% en América y el 20% en Asia. Las operaciones sufren un retraso del 10% en la Unión Europea, del 15% en América y del 25% en Asia. Halla la probabilidad de que una operación sufra retraso.

$$P(\text{Retraso}) = P(\text{UE}) \cdot P(R/\text{UE}) + P(\text{Am}) \cdot P(R/\text{Am}) + P(\text{As}) \cdot P(R/\text{As})$$

$$P(\text{Retraso}) = 0,5 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,145 = 14,5\%$$

UE = Unión Europea
Am = América
As = Asia
R = Retraso



21. Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 9

22. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas, se observa si ha sido de copas y se vuelve a introducir; luego se extrae otra carta. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

23. Se extraen de una vez dos bolas de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

24. Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Si se cogen dos tornillos, halla la probabilidad de que al coger el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?

25. Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que uno sea varón.

26. Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de que las tres sean cruz.

REPASA Y ELABORA

REPASA EJERCICIOS

18 ¿Cuántos grupos de letras se pueden formar con las letras de la palabra SONIA, tengan o no sentido?



a) $E = \{S, O, N, I, A\} \Rightarrow m = 5, p = 5$

Dos ejemplos significativos: SONIA, OSNIA

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no hay repetición. \Rightarrow Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

19 Con las cifras impares, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?

a) $E = \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow m = 5, p = 4$. Dos ejemplos significativos: 1 157, 5 711

b) Influye el orden, no entran todos los elementos, sí hay repetición. \Rightarrow Variaciones con repetición.

c) $VR_{5,4} = 5^4 = 625$

20 ¿Cuántas diagonales tiene un heptágono?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow m = 7, p = 2$. Dos ejemplos significativos: 13, 14. Hay que eliminar los consecutivos: 12, 23...

b) No influye el orden, no entran todos los elementos, no hay repetición. \Rightarrow Combinaciones.

c) $C_{7,2} - 7 = \binom{7}{2} - 7 = \frac{7 \cdot 6}{2!} - 7 = 21 - 7 = 14$

21 ¿De cuántas formas se pueden sentar seis personas en una mesa hexagonal?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow m = 6, p = 6$. Dos ejemplos significativos: dejamos siempre el 1 fijo: 123456, 132456

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no hay repetición. \Rightarrow Permutaciones circulares.

c) $PC_6 = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

22 ¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en la liga profesional de fútbol de primera división de España?

a) $E = \{1, 2, 3, \dots, 20\} \Rightarrow m = 20, p = 2$. Dos ejemplos significativos: 12, 21

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no hay repetición. \Rightarrow Variaciones ordinarias.

c) $V_{20,2} = 20 \cdot 19 = 380$

ELABORA EJERCICIOS

27. ¿Cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden formar con las cifras impares de forma que no se repita ninguna cifra? ¿Cuántos de ellos son impares?

28. Un alumno de 4.º B tiene 5 camisetas, 4 pantalones y 3 pares de zapatillas de deporte. ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse para ir a entrenar?

29. Si lanzamos al aire un dado y una moneda, ¿cuántos resultados diferentes podemos obtener?

30. Cinco amigos van al cine y sacan las entradas seguidas. ¿De cuántas formas se pueden sentar?

REPASA PROBLEMAS

23. Calcula la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado de forma de dodecaedro.

Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Suceso $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

24. Sabiendo que:

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{7}{12}$$

calcula $P(B)$

1. Datos:

$$P(A) = 2/3, P(A \cup B) = 5/6, P(A \cap B) = 7/12$$

2. Pregunta:

Calcula $P(B)$

4. Solución: $P(B) = \frac{3}{4}$

3. Planteamiento y operaciones:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{7}{12} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

25. En una determinada ciudad se sabe que si hoy llueve, la probabilidad de que mañana llueva es de $5/6$, y si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana llueva es de $1/8$. Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que llueva el próximo domingo?

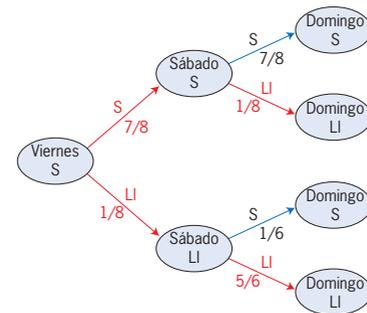
1. Datos:

Árbol de probabilidades:

2. Pregunta:

¿Cuál es la probabilidad de que llueva el próximo domingo?

3. Planteamiento y operaciones:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(\text{domingo llueva}) =$$

$$= P(S) \cdot P(LI/S) + P(LI) \cdot P(LI/LI)$$

$$P(\text{domingo llueva}) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{41}{192}$$

4. Solución: $P(\text{domingo llueva}) = \frac{41}{192}$

ELABORA PROBLEMAS

31. Se lanzan dos dados al aire. Halla la probabilidad de que los dos números obtenidos no sean primos entre sí.

32. Si $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, calcula $P(A \cap B)$

33. Se extrae una carta de una baraja española de 48 cartas. Calcula la probabilidad de que sea un nueve.

34. Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se observa el color; se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que sean las dos rojas.

ACTIVIDADES FINALES

ELABORA ACTIVIDADES DE LAS SECCIONES

1 ¿Qué son las variaciones y permutaciones?

35. Calcula mentalmente:

- a) $V_{5,3}$ b) $VR_{6,2}$ c) P_4 d) PC_6

36. Calcula mentalmente:

- a) P_5 b) PC_4

37. Organizamos una fiesta y llevamos tres clases de bocadillos y dos clases de refrescos. Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas de elegir un bocadillo y un refresco. ¿Cuántas son?

38. Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?

39. Con las letras A y B forma todas las palabras posibles de tres letras, tengan sentido o no. ¿Cuántas son?

40. Con los dígitos 1, 3, 5 y 7 forma todos los números de cuatro cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?

41. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa circular para que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

42. En el sistema actual de matrículas, ¿de cuántas formas se pueden colocar las letras sabiendo que cada matrícula contiene tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales, y las letras Ñ y Q?



43. Halla, usando la calculadora:

- a) $V_{10,4}$ b) $VR_{6,4}$
c) P_{10} d) PC_{12}

2 ¿Qué son los problemas de combinatoria?

44. Calcula mentalmente:

- a) $C_{10,2}$ b) $C_{11,9}$

45. Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de dos cifras que puedas sin que se repita ninguna y de modo que ningún par de números tenga las mismas cifras.

46. Disponemos de 5 frutas diferentes para preparar zumos de dos sabores. ¿Cuántos zumos podemos hacer?



47. En una comunidad que está formada por 20 vecinos se quiere elegir una junta formada por un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas se puede elegir la junta?

48. De una baraja española de 40 cartas se cogen 4 cartas sin devolución. ¿De cuántas formas se pueden coger?

49. ¿De cuántas formas se pueden colocar 6 personas alrededor de una mesa circular?

50. Halla, usando la calculadora:

- a) $C_{7,3}$ b) $C_{8,4}$

3 ¿Qué es la probabilidad?

51. Sean los sucesos $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$. Calcula:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) ¿ A y B son compatibles o incompatibles?
- d) \bar{A}
- e) \bar{B}

52. Halla la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado de seis caras.

53. Se sabe que $P(A) = 5/6$. Halla $P(\bar{A})$

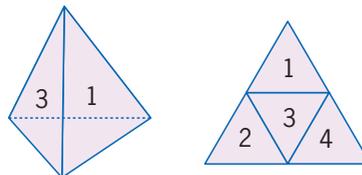
54. Se lanzan 100 chinchetas al aire y 66 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta no quede con la punta hacia arriba.



55. Si $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/5$, calcula $P(A \cup B)$

4 ¿Qué son los experimentos aleatorios compuestos?

56. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4 la suma de los números obtenidos sea 6. ¿Qué suma es la más probable?



57. Se extrae una bola de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes, se observa si ha sido roja y se vuelve a introducir; luego se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

58. Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

59. Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Se coge un tornillo, se mira si es defectuoso y se devuelve. Halla la probabilidad de que al coger aleatoriamente el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?

60. Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que los tres sean varones.

61. Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de obtener dos caras y una cruz.

ELABORA PROBLEMAS

62. ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar?

63. Con las letras de la palabra MESA, ¿cuántas palabras se pueden formar, tengan o no sentido?

64. Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se observa el color; se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que sean las dos rojas.

65. Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las dos sean de espadas.

66. Se lanzan al aire dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea mayor que 5.

ACTIVIDADES FINALES

ELABORA PROBLEMAS

67. En un dado de quinielas, halla la probabilidad de no obtener el 2

68. En la carta de un restaurante se puede elegir un menú compuesto de un primer plato, un segundo plato y un postre. Hay para elegir 8 primeros platos, 5 segundos y 6 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

69. Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar sin repetir los dígitos? ¿Cuántos de ellos son pares?

70. En un trofeo de verano juegan cuatro equipos. ¿De cuántas formas se pueden emparejar?

71. Existen 5 pueblos colocados en los vértices de un pentágono regular, y se quiere construir una carretera para unir cada dos pueblos. ¿Cuántas carreteras hay que hacer?

72. El AVE que va de Madrid a Sevilla tiene cinco estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes se pueden sacar?

73. Un byte está formado por ceros y unos, y en total son 8. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden presentar?

74. Tenemos siete clases de fruta para preparar batidos de tres sabores. ¿Cuántos sabores se pueden obtener?

75. En un certamen literario hay tres premios: ganador, finalista y accésit. Si participan 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden dar los tres premios?

76. ¿Cuántas banderas de tres colores diferentes se pueden formar con ocho colores?

77. Una familia tiene 5 hijos. ¿Cuántas posibilidades hay con respecto al sexo de los hijos?

78. Con las letras de la palabra RATÓN, ¿cuántas combinaciones de cinco letras se pueden formar, tengan o no sentido? ¿Cuántas empiezan por consonante?

79. Calcula la probabilidad de acertar una quiniela de pleno al 15 si se cubre una apuesta.

80. En un grupo de 80 personas, 50 escuchan la radio, 60 ven la televisión y 30 oyen la radio y ven la televisión. Halla la probabilidad de que, elegida una persona al azar, no escuche la radio, ni vea la televisión.

81. Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 verdes. Se extrae una bola y se observa el color, se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que una sea roja y otra sea verde.

82. Se extraen de una vez tres cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres sean de bastos.

83. Se compran 50 ordenadores de una marca A y 70 de una marca B. De la marca A hay 2 que no funcionan; y de la marca B hay 3 que no funcionan. Si se elige al azar uno de los ordenadores, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione?

84. En una clase hay 15 chicos y 10 chicas. Si se eligen dos alumnos al azar, calcula la probabilidad de que los dos sean chicas.



85. Una persona cruza dos semáforos para ir al trabajo. La probabilidad de que cada uno de ellos esté rojo es de 0,4; de que esté ámbar, 0,2, y de que esté verde, 0,4. Calcula la probabilidad de que uno esté verde y el otro rojo.

86. Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de 0,6 de hacer un triple. Si hace dos lanzamientos de triple, ¿qué probabilidad tiene de no encestar ninguno?



87. Un equipo de fútbol está formado por 11 jugadores. Seis se ponen de pie, y delante los otros cinco agachados. ¿De cuántas formas se pueden colocar para hacer una foto si el portero siempre está de pie el primero por la izquierda?

88. ¿De cuántas formas un entrenador puede elegir un equipo de fútbol (formado por un portero, 3 defensas, 2 medios, 2 extremos y 3 delanteros) que tiene 25 jugadores, de los que 3 son porteros; 6, defensas; 4, medios; 4, extremos, y el resto, delanteros?

89. ¿Cuántas matrículas totales se pueden hacer con el sistema actual, que se compone de cuatro números y tres letras? Las letras disponibles son 20

90. Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos una bola, anotamos el número y la volvemos a introducir; volvemos a repetir el proceso otras dos veces. ¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?

91. Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos tres bolas de una vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden presentar?

92. Con las cifras impares, ¿cuántos números de 3 cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 500?

93. Se extraen, de una baraja española de 40 cartas, tres cartas al azar. Calcula la probabilidad de que sean caballos las tres.

94. Se lanzan al aire dos dados, uno de 6 caras numeradas del 1 al 6 y el otro de 4 caras numeradas del 1 al 4. ¿Qué probabilidad hay de que sumen 7?

95. En un cajón tenemos 8 calcetines blancos y 6 negros. Si sacamos dos aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean de distinto color?

96. Se tienen dos máquinas produciendo tornillos. Una produce 100 tornillos, de los que 3 son defectuosos, y la otra produce 200 tornillos, de los que 5 son defectuosos. Si se escoge al azar uno de los 300 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

97. Se elige aleatoriamente una ficha de un dominó. ¿Qué probabilidad hay de que sea doble?



98. Se ha trucado un dado de forma que:

$$P(1) = P(3) = P(5), P(2) = P(4) = P(6) = 2P(1)$$

a) Halla la probabilidad de obtener un 3

b) Halla la probabilidad de obtener un 6

1 Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Escribe todos los números que se pueden formar con los números primos de un dado con las caras numeradas del 1 al 6

SOLUCIÓN

Se hace con **CalcMe** eligiendo en **Combinatoria** la opción **Permutaciones** y escribiendo $P_{\{2, 3, 5\}}$

Solución = **{235, 253, 325, 352, 523, 532}**

2 Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

En una urna hay 4 bolas rojas, 5 verdes y 6 negras. Halla la probabilidad de sacar una bola verde.

SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Regla de Laplace.**

$P(V) = \mathbf{5/15 = 1/3 = 0,33}$

3 Problema (Calificación: 2,5 puntos)

Con las cifras impares, ¿cuántos números de 4 cifras se pueden formar?

SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Combinatoria: Estrategias de resolución de problemas.**

¿Influye el orden? **Sí** ¿En cada grupo entran todos los elementos? **No**

¿Hay repetición? **Sí** son $\mathbf{VR_{5,4} = 625}$

4 Problema (Calificación: 2,5 puntos)

Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una comunidad autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. Por el control de calidad se sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que no sea defectuoso.

SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Regla de la suma o de la probabilidad total 3x2**

Probabilidad de resultado negativo = **0,958**

Regla de la suma o de la probabilidad total
EJERCICIO RESUELTO

Una empresa realiza el 50 % de sus operaciones en la Unión Europea, el 30 % en América y el 20 % en Asia. En la Unión Europea sufren un retraso del 10 %, en América del 15 % y en Asia del 25 %
 Halla la probabilidad de que una operación sufra retraso.

Solo hay que introducir las casillas de fondo blanco como fracción o decimal Teoría

```

graph LR
    ABC[ABC] -- 0.3 --> A[A]
    ABC -- 0.2 --> B[B]
    ABC -- 0.5 --> C[C]
    A -- 0.04 --> AD[D]
    A -- 0.96 --> AD_bar[D-bar]
    B -- 0.1 --> BD[D]
    B -- 0.9 --> BD_bar[D-bar]
    C -- 0.02 --> CD[D]
    C -- 0.98 --> CD_bar[D-bar]
                    
```

EJERCICIO PROPUESTO

Durante 10 días, en una carretera ha hecho 5 días sol, 3 días ha llovido y 2 días hubo niebla. La probabilidad de que haya un accidente de coche en un día soleado es de 0,006; en un día lluvioso, de 0,04, y en un día con niebla, de 0,07
 Halla la probabilidad de que un día haya accidente.

SOLUCIÓN EP

En la regla de la suma o de la probabilidad total y en el teorema de Bayes puedes realizar la operación:
 Operación: **Solución : 0.958**

Autores. José María Anas Cabezas e Ildelfonso Maza Sáez © Grupo Editorial Bruño, S. L.

COMPRUEBO mis COMPETENCIAS

La combinatoria y el sistema binario de los ordenadores

Se define un *byte* como una secuencia de 8 cifras formadas por 0 y 1. Se suelen llamar palabras de 8 caracteres.

26 ¿Cuántas palabras hay de 8 caracteres?

- a) $E = \{0, 1\}$, $m = 2$, $p = 8$. Dos ejemplos significativos son: 10010111, 11111111
- b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición. \Rightarrow Variaciones con repetición.
- c) $VR_{2,8} = 2^8 = 256$



- 99. ¿Cuántas palabras hay de 10 caracteres?
- 100. ¿Cuántas palabras hay de 30 caracteres?
- 101. ¿Cuántas palabras hay de 20 caracteres?
- 102. ¿Cuántas palabras hay de 40 caracteres?

e VALÚATE

COMPRUEBA
TUS RESPUESTAS



- 1 Escribe el enunciado de la regla de Laplace y pon un ejemplo.
- 2 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 300?
- 3 Con las letras de la palabra LIBRO, ¿cuántas combinaciones de letras, tengan o no se pueden formar?
- 4 En una clase hay 25 alumnos y se quiere hacer una comisión formada por tres alumnos ¿cuántas formas se puede elegir?
- 5 Se sabe que: $P(A) = 3/5$, $P(B) = 2/5$ y $P(A \cap B) = 1/3$
Halla: $P(A \cup B)$
- 6 Se lanzan al aire dos dados de seis caras numeradas del 1 al 6 y se suman los puntos obtenidos. ¿Qué suma de puntuaciones tiene mayor probabilidad? Halla su probabilidad.
- 7 Se prueba en 30 personas una vacuna A contra la gripe y enferman 5. Se prueba en 20 personas otra vacuna B y enferman 4. Si se elige una de las personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que no haya enfermado?
- 8 Un jugador de fútbol mete 4 goles de cada 10 tiros a puerta. Si tira 3 tiros a puerta, halla la probabilidad de que, al menos, meta un gol.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12