

UNIDAD **11**

Áreas y volúmenes

**Arias Cabezas, J. M. y Maza Sánchez, I. (2023).
Matemáticas, 2º ESO, Proyecto 5E. Madrid, Editorial Bruño
del Grupo ANAYA. ISBN: 9788469634004**

¿Para qué sirven las áreas y los volúmenes?

La renovación de aire se puede denominar por sus siglas en inglés *ACH*, *Air Changes per Hour*. Si un aula tiene 1 *ACH* (1 renovación de aire por hora) significa que en una hora entra en ella un volumen de aire exterior igual al volumen de la sala. En una pandemia se recomienda de 5 a 6 *ACH*.

Otra forma de medir la ventilación son los litros de aire por persona y segundo que entran del exterior. Un valor adecuado para reducir riesgo de contagio es 14 litros por persona y segundo.

La relación entre ambos parámetros es:

$$ACH = 14 \frac{\text{litros/persona}}{\text{segundo}} \cdot N.^\circ \text{ personas} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \cdot 0,001 \frac{\text{m}^3/\text{litro}}{\text{m}^3}$$

Estos valores se pueden ajustar según el riesgo que se asuma. El riesgo cero no existe. Mejorar la ventilación disminuye el riesgo de contagio.

En esta unidad descubriremos juntos:

- 1 ¿Qué es el volumen?
- 2 ¿Qué son los prismas y los cilindros?
- 3 ¿Qué son las pirámides, los conos y la esfera?
- 4 ¿Qué son los troncos de pirámide y de cono?

e LABORA

Comienza la unidad en tu cuaderno con una portada. En primer lugar, escribe el número de la unidad y el título: **UNIDAD 11. Áreas y volúmenes**. En el resto de la página haz un dibujo que sea una aplicación de las áreas y los volúmenes (no vale repetir el del libro) y en la parte inferior escribe un texto de 2 o 3 líneas explicando la relación del dibujo con los contenidos de la UNIDAD.

También debes hacer en el cuaderno el Carné calculista y el Explora de la primera sección.

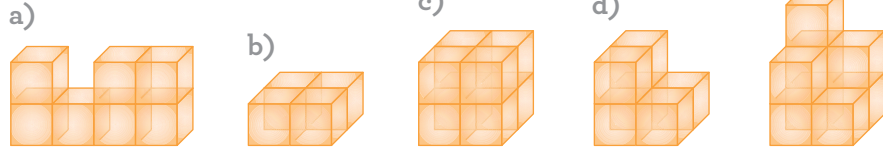
1 ¿Qué es el volumen?



eXPLORA

CARNÉ CALCULISTA
658,9 : 7,6

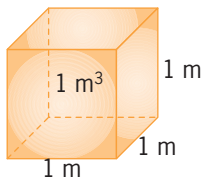
Calcula mentalmente el volumen de las siguientes figuras teniendo en cuenta que cada cubo pequeño es una unidad.



¿Cómo se mide el volumen?

El **volumen** de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.

Un bidón ocupa un volumen. El bidón también tiene una capacidad, que es la cantidad de líquido que cabe en su interior. Se puede decir que la capacidad es el volumen interior del bidón.



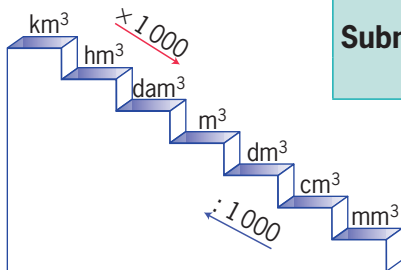
Unidades de volumen

Un **metro cúbico** es el volumen de un cubo que tiene 1 m de arista.

El metro cúbico es la unidad principal de volumen.

• Múltiplos y submúltiplos

	Nombre	Abreviatura	Cantidad de metros
Múltiplos	kilómetro cúbico	km³	1 000 000 000 m ³ = 10 ⁹ m ³
	hectómetro cúbico	hm³	1 000 000 m ³ = 10 ⁶ m ³
	decámetro cúbico	dam³	1 000 m ³ = 10 ³ m ³
	metro cúbico	m³	1 m ³
Submúltiplos	decímetro cúbico	dm³	0,001 m ³ = 10 ⁻³ m ³
	centímetro cúbico	cm³	0,000001 m ³ = 10 ⁻⁶ m ³
	milímetro cúbico	mm³	0,000000001 m ³ = 10 ⁻⁹ m ³



Las unidades de volumen aumentan y disminuyen de 1 000 en 1 000

$$2 \text{ hm}^3 = 2 \times 1\,000\,000 \text{ m}^3 = \mathbf{2\,000\,000 \text{ m}^3}$$

$$3\,000 \text{ cm}^3 = 3\,000 : 1\,000 \text{ dm}^3 = \mathbf{3 \text{ dm}^3}$$

• Relación entre masa, capacidad y volumen


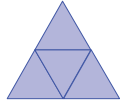

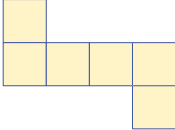

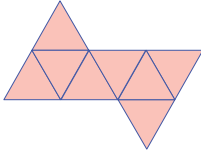

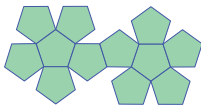

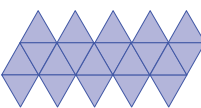
Al nivel del mar y a 4 °C, un litro de agua destilada pesa 1 kilo.

$$\mathbf{1 \text{ kilo} = 1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3}$$

m ³	dm ³	cm ³
kL	L	mL

La unidad más frecuente para medir grandes cantidades de agua, como la de un pantano, es el hectómetro cúbico.

Áreas y volúmenes de los poliedros regulares

Poliedro regular	Desarrollo	Área	Volumen
Tetraedro 		$A = a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Cubo o hexaedro 		$A = 6a^2$	$V = a^3$
Octaedro 		$A = 2a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodecaedro 		$A = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$
Icosaedro 		$A = 5a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})$

Aplicar fórmulas

Para resolver los ejercicios de cálculo de áreas y de volúmenes de poliedros regulares no debes memorizar las fórmulas, excepto la del cubo, que es muy sencilla.

1. Calcula el área y el volumen de un tetraedro de 5 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

$$A = a^2\sqrt{3} \Rightarrow A = 5^2\sqrt{3} = \mathbf{43,30 \text{ cm}^2}$$

$$5 \times^2 \times \sqrt{\quad} 3 = \mathbf{43,30}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{5^3\sqrt{2}}{12} = \mathbf{14,73 \text{ cm}^3}$$

$$5 \times^3 \times \sqrt{\quad} 2 \div 12 = \mathbf{14,73}$$



1. Transforma mentalmente en metros cúbicos:

- a) 25 dam³ b) 0,02 hm³
 c) 2 560 dm³ d) 32 000 cm³
 e) 45 km³ f) 575 000 mm³

2. Expresa en litros las siguientes cantidades:

- a) 5 m³ b) 0,008 hm³
 c) 250 dm³ d) 12 000 cm³
 e) 10 km³ f) 250 000 mm³

3. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tetraedro de 5 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

4. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cubo de 4 m de arista.

5. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un octaedro de 6 dm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

6. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un dodecaedro de 5 m de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

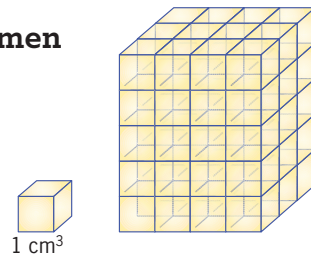
7. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un icosaedro de 9 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

2 ¿Qué son los prismas y los cilindros?



eXPLORA

Calcula el área y el volumen de la figura mayor:



CARNÉ CALCULISTA

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{4} : \frac{6}{5}$$

¿Cómo se calcula el área y el volumen de prismas y cilindros?

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Ortoedro			$A = 2(ab + ac + bc)$	$V = abc$
Prisma			$A_T = 2A_B + A_L$	$V = A_B \cdot H$
Cilindro			$A_B = \pi R^2$ $A_L = 2\pi RH$ $A_T = 2A_B + A_L$	

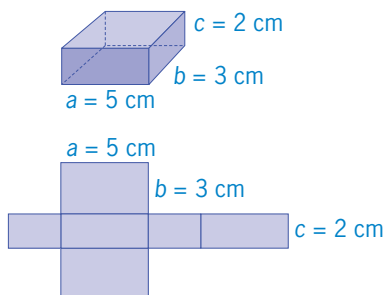
Área y volumen del ortoedro

- El **área del ortoedro** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por 6 rectángulos, iguales dos a dos.

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

- El **volumen del ortoedro** se obtiene multiplicando el largo por el ancho y por el alto.

$$V = abc$$



2 Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 5 cm, 3 cm y 2 cm

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$A = 2(5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = 2(15 + 10 + 6) = 2 \cdot 31 = \mathbf{62 \text{ cm}^2}$$

$$V = abc \Rightarrow V = 5 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{30 \text{ cm}^3}$$

$$2 \times (5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2) = 62$$

$$5 \times 3 \times 2 = 30$$

Área y volumen del prisma

- El **área total del prisma** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por dos bases iguales, que son polígonos regulares, y tantos rectángulos iguales como aristas tenga la base:

$$A_T = 2A_B + A_L$$

- El **volumen del prisma** se obtiene multiplicando el área de la base por la altura:

$$V = A_B \cdot H$$

Volumen de prismas y cilindros

Todos ellos tienen dos bases iguales; por ello el volumen se calcula aplicando la misma fórmula:

$$V = A_B \cdot H$$

3 **Halla el área y el volumen del prisma pentagonal del margen.**

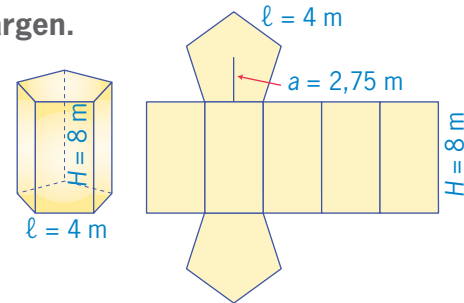
Área total: $A_T = 2A_B + A_L$

a) $A_B = \frac{P \cdot a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2,75}{2} = 27,5 \text{ m}^2$

b) $A_L = 5 \ell H \Rightarrow A_L = 5 \cdot 4 \cdot 8 = 160 \text{ m}^2$

Luego: $A_T = 2 \cdot 27,5 + 160 = 55 + 160 = \mathbf{215 \text{ m}^2}$

Volumen: $V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 27,5 \cdot 8 = \mathbf{220 \text{ m}^3}$



Área y volumen del cilindro

- El **área total del cilindro** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por dos bases iguales, que son círculos, y un rectángulo.

$$A_B = \pi \cdot R^2 \quad A_L = 2\pi RH \quad A_T = 2A_B + A_L$$

- El **volumen del cilindro** se obtiene multiplicando el área de la base por la altura:

$$V = A_B \cdot H$$

4 **Halla el área y el volumen del cilindro recto del margen. Toma $\pi = 3,14$**

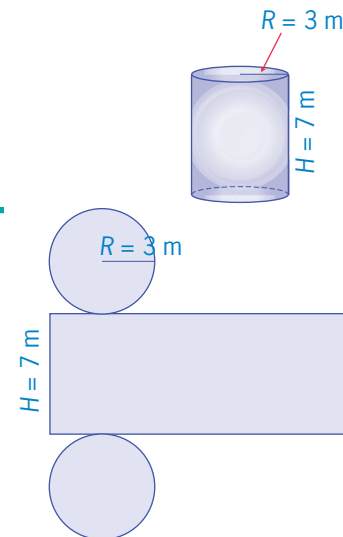
Área total: $A_T = 2A_B + A_L$

a) $A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = 3,14 \cdot 3^2 = 28,26 \text{ m}^2$

b) $A_L = 2\pi RH \Rightarrow A_L = 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 7 = 131,88 \text{ m}^2$

Luego: $A_T = 2 \cdot 28,26 + 131,88 = \mathbf{188,40 \text{ m}^2}$

Volumen: $V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 28,26 \cdot 7 = \mathbf{197,82 \text{ m}^3}$

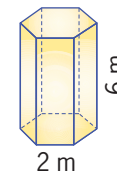


8. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 5 m, 3,5 m y 4 m

9. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un prisma cuadrangular en el que la arista de la base mide 3 cm y la altura del prisma mide 8 cm

10. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cilindro recto cuya base tiene 3 cm de radio y cuya altura mide 6 cm. Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a dos decimales.

11. Calcula el área y el volumen del siguiente prisma hexagonal. Redondea el resultado a dos decimales.



12. Un recipiente con forma de ortoedro, para envasar leche, tiene unas dimensiones de 8 cm, 5 cm y 25 cm. Dibújalo, calcula su volumen y exprésalo en litros.

3 ¿Qué son las pirámides, los conos y la esfera?

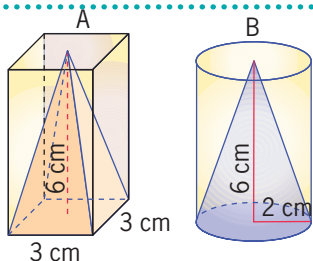


eXPLORA

CARNÉ CALCULISTA
Resuelve la ecuación:
$$2x - \frac{3x - 6}{4} = \frac{x}{5} + \frac{x - 8}{2}$$

- a) Calcula el volumen del prisma de la figura A. Si el volumen de la pirámide mide 18 cm^3 , halla la razón de los volúmenes.
- b) Calcula el volumen del cilindro de la figura B en función de π . Si el volumen del cono mide $8\pi \text{ cm}^3$, halla la razón de los volúmenes.

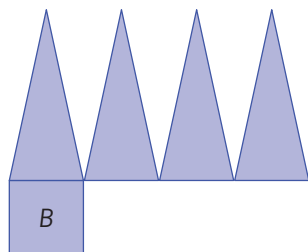
¿Cómo se calcula el área y el volumen de las pirámides y los conos?



Volumen de pirámides y conos

Todos ellos tienen una base y un vértice, por ello el volumen se calcula aplicando la misma fórmula:

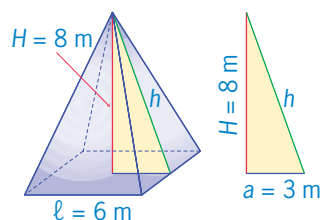
$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$



Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Pirámide			$A_T = A_B + A_L$	$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
Cono			$A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi R G$ $A_T = A_B + A_L$	
Esfera		No tiene desarrollo plano	$A_B = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Área y volumen de la pirámide

- El **área total de la pirámide** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por un polígono regular y tantos triángulos isósceles iguales como aristas tenga la base: $A_T = A_B + A_L$
- El **volumen de la pirámide** se obtiene multiplicando un tercio por el área de la base y por la altura: $V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$



1 ÷ 3 × 36 × 8 = 96

5 Halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular de 6 m de arista de la base y 8 m de altura. Redondea el resultado a dos decimales.

Área total: $A_T = A_B + A_L$. Se calcula el área de la base y el área lateral:

$$A_B = \ell^2 \Rightarrow A_B = 6^2 = 36 \text{ m}^2 \quad A_L = 4 \ell h : 2$$

Hay que calcular la apotema de la pirámide; $h = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} = 8,54 \text{ m}$

$$A_L = 4 \cdot 6 \cdot 8,54 : 2 = 204,96 : 2 = 102,48 \text{ m}^2$$

$$\text{Luego: } A_T = 36 + 102,48 = \mathbf{138,48 \text{ m}^2}$$

$$\text{Volumen: } V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 8 = \mathbf{96 \text{ m}^3}$$

Área y volumen del cono

- El **área total** del cono se deduce de su desarrollo plano, que está formado por una base, que es un círculo, y un sector circular:

$$A_B = \pi R^2 \quad A_L = \pi R G \quad A_T = A_B + A_L$$

- El **volumen del cono** se obtiene multiplicando por un tercio el área de la base por la altura:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

6 Halla el área y el volumen de un cono recto de 5 m de radio de la base y 12 m de altura. Toma $\pi = 3,14$

Área total: $A_T = A_B + A_L$. Se calcula el área de la base y el área lateral:

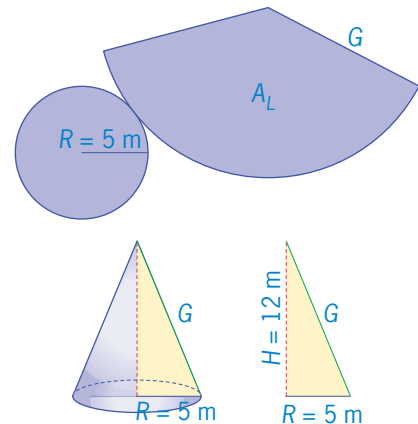
$$A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5 \text{ m}^2 \quad A_L = \pi R G$$

Hay que calcular la generatriz: $G = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$

$$A_L = 3,14 \cdot 5 \cdot 13 = 204,1 \text{ m}^2$$

$$\text{Luego: } A_T = 78,5 + 204,1 = \mathbf{282,6 \text{ m}^2}$$

$$\text{Volumen: } V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 78,5 \cdot 12 = \mathbf{314 \text{ m}^3}$$



Área y volumen de la esfera

La esfera no tiene desarrollo plano.

- El **área de la esfera** es igual a la de cuatro círculos máximos:

$$A = 4\pi R^2$$

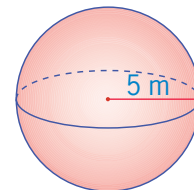
- El **volumen de la esfera** se obtiene multiplicando cuatro tercios por π y por el radio al cubo:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

7 Halla el área y el volumen de una esfera de 5 m de radio. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4 \cdot 3,14 \cdot 5^2 = \mathbf{314 \text{ m}^2}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 = \mathbf{523,33 \text{ m}^3}$$



13. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular en la que la arista de la base mide 10 cm y la altura de la pirámide mide 12 cm

14. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 6 m y la altura del cono, 8 m. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

15. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 6 cm. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

16. Se ha construido un adorno de metacrilato con forma de pirámide hexagonal cuya base tiene 4 cm de arista y cuya altura mide 12 cm. El metacrilato cuesta 28,5 €/m². Dibuja el adorno y calcula el precio del material. Redondea el resultado a dos decimales.

4 ¿Qué son los troncos de pirámide y de cono?



eXPLORA

CARNÉ CALCULISTA
Resuelve la ecuación:
 $3x^2 - x - 2 = 0$

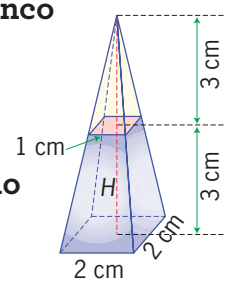
Volumen de troncos de pirámides y conos
Todos ellos tienen dos bases desiguales; por ello el volumen se calcula aplicando la misma fórmula.

a) Calcula mentalmente el volumen del tronco de pirámide azul restando, del volumen del total de la pirámide, el volumen de la pirámide amarilla.

b) Comprueba que el resultado es el mismo que aplicando la fórmula:

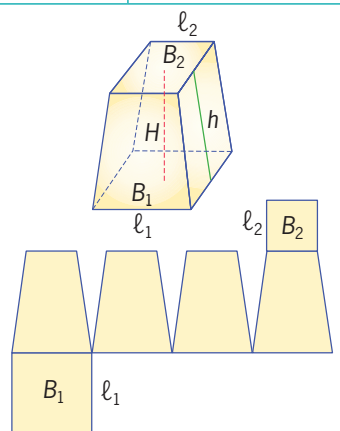
$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

donde H es la altura del tronco de pirámide.



¿Cómo se calcula el área y el volumen de los troncos?

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Tronco de pirámide			$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$	$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$
Tronco de cono			$A_{B_1} = \pi R^2$ $A_{B_2} = \pi r^2$ $A_L = \pi(R + r)G$ $A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$	



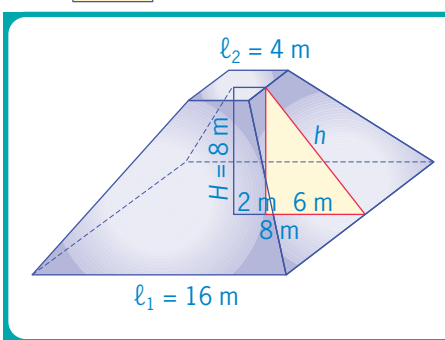
Área y volumen del tronco de pirámide

• El **área total de un tronco de pirámide** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por dos bases que son polígonos regulares desiguales, y tantos trapecios isósceles iguales como aristas tenga la base.

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

• El **volumen de un tronco de pirámide** se obtiene multiplicando un tercio por la suma de las áreas de las bases más la raíz cuadrada del producto de las áreas, y multiplicando todo por la altura.

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$



8 Halla el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrada en el que la arista de la base mayor mide 16 m; la arista de la base menor, 4 m, y la altura, 8 m

Área total: $A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$. Se calcula el área de las bases y el área lateral:

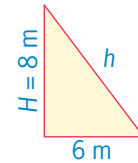
- $A_{B_1} = \ell_1^2 \Rightarrow A_{B_1} = 16^2 = 256 \text{ m}^2$
- $A_{B_2} = \ell_2^2 \Rightarrow A_{B_2} = 4^2 = 16 \text{ m}^2$
- $A_L = 4 \cdot \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \cdot h$

Hay que calcular la apotema del tronco de la pirámide: $h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ m

$$A_L = 4 \cdot \frac{16 + 4}{2} \cdot 10 = 400 \text{ m}^2$$

Luego: $A_T = 256 + 16 + 400 = \mathbf{672 \text{ m}^2}$

Volumen: $V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} (256 + \sqrt{256 \cdot 16}) \cdot 8 = \mathbf{896 \text{ m}^3}$



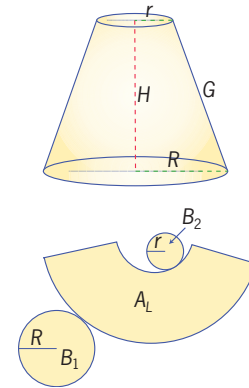
Área y volumen del tronco de cono

- El **área total de un tronco de cono** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por dos bases que son dos círculos desiguales, y un trapecio circular:

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L \quad A_{B_1} = \pi R^2 \quad A_{B_2} = \pi r^2 \quad A_L = \pi(R + r)G$$

- El **volumen de un tronco de cono** se obtiene multiplicando un tercio por la suma de las áreas de las bases más la raíz cuadrada del producto de las áreas de las bases, y multiplicando todo por la altura:

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$



9 **Halla el área y el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 15 m; el radio de la base menor, 5 m, y la altura, 24 m. Toma $\pi = 3,14$**

Área total: $A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$

Se calcula el área de las bases y el área lateral:

- $A_{B_1} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_1} = 3,14 \cdot 15^2 = 706,5 \text{ m}^2$
- $A_{B_2} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_2} = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5 \text{ m}^2$
- $A_L = \pi(R + r)G$

Hay que calcular la generatriz: $G = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ m

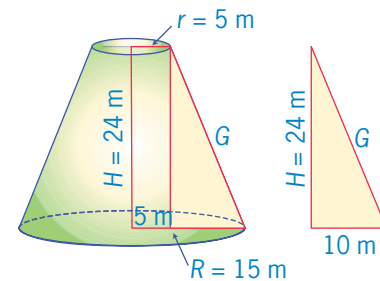
$$A_L = 3,14 \cdot (15 + 5) \cdot 26 = 1\,632,8 \text{ m}^2$$

Luego: $A_T = 706,5 + 78,5 + 1\,632,8 = \mathbf{2\,417,8 \text{ m}^2}$

Volumen:

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} (706,5 + 78,5 + \sqrt{706,5 \cdot 78,5}) \cdot 24 = \mathbf{8\,164 \text{ m}^3}$$



$$\begin{aligned} & (706.5 + 78.5 + \sqrt{ } \\ & (706.5 \times 78.5)) \\ & \times 24 \div 3 = \mathbf{8164} \end{aligned}$$

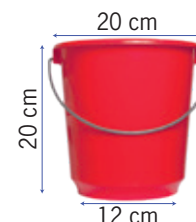


17. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular en el que la arista de la base mayor mide 18 m, la arista de la base menor, 8 m, y la altura del tronco mide 12 m

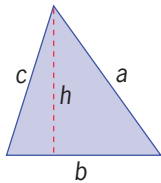
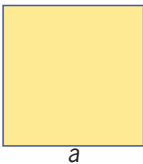
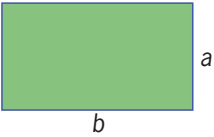
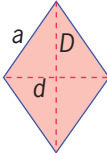
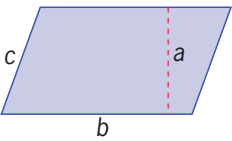
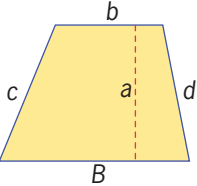
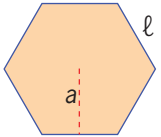
18. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de cono de 12 m de altura y en el que los radios de las bases miden 10 m y 4 m. Toma $\pi = 3,14$. Redondea los resultados a dos decimales.

19. Calcula la cantidad de agua que cabe en el cubo de la figura. Toma $\pi = 3,14$

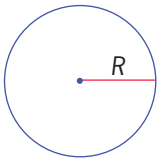
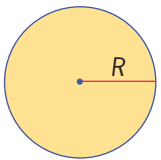
Redondea el resultado a un decimal.



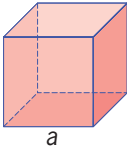
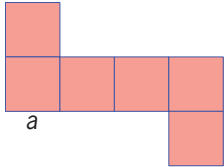
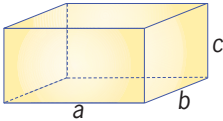
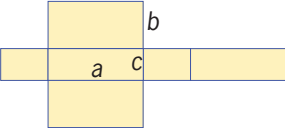
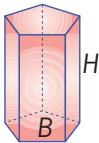
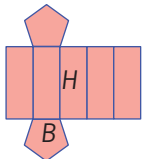
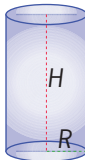
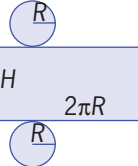
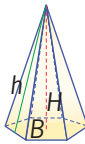
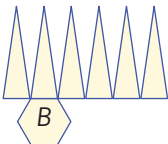
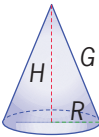
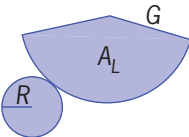
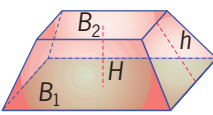
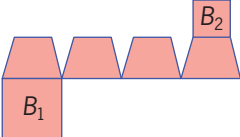
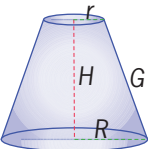
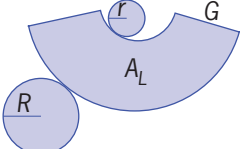
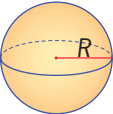
Perímetros y áreas de los polígonos

Polígono	Dibujo	Perímetro	Área
Triángulo		$P = a + b + c$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ Fórmula de Herón: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $p = \text{semiperímetro}$
Cuadrado		$P = 4a$	$A = a^2$
Rectángulo		$P = 2(b + a)$	$A = b \cdot a$
Rombo		$P = 4a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide		$P = 2(b + c)$	$A = b \cdot a$
Trapezio		$P = B + c + b + d$	$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$
Polígono regular		$P = n\ell$ $n = \text{número de lados}$	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

Longitudes y áreas de las figuras circulares

Polígono	Dibujo	Longitud	Área
Circunferencia		$L = 2\pi R$	
Círculo			$A = \pi R^2$

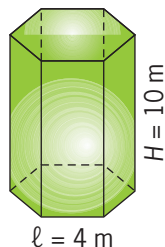
Área y volumen de los cuerpos

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Cubo o hexaedro			$A = 6a^2$	$V = a^3$
Ortoedro o paralelepípedo			$A = 2(ab + ac + bc)$	$V = abc$
Prisma			$A_T = 2A_B + A_L$	$V = A_B \cdot H$
Cilindro			$A_B = \pi R^2$ $A_L = 2\pi R H$ $A_T = 2A_B + A_L$	
Pirámide			$A_T = A_B + A_L$	$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
Cono			$A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi R G$ $A_T = A_B + A_L$	
Tronco de pirámide			$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$	$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$
Tronco de cono			$A_{B_1} = \pi R^2$ $A_{B_2} = \pi r^2$ $A_L = \pi(R + r) G$ $A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$	
Esfera		No tiene desarrollo plano	$A = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

REPASA Y ELABORA

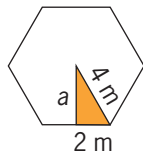
REPASA EJERCICIOS

10. Halla el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 4 m, y la altura, 10 m



Área total: $A_T = 2A_B + A_L$

- a) Para calcular el área de la base hay que calcular la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras.



$$a^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow a^2 + 4 = 16 \Rightarrow a^2 = 12$$

$$a = \sqrt{12} = 3,46 \text{ m}$$

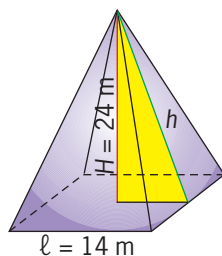
$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,46}{2} = 41,52 \text{ m}^2$$

- b) $A_L = 6 \cdot \ell \cdot H \Rightarrow A_L = 6 \cdot 4 \cdot 10 = 240 \text{ m}^2$

Luego: $A_T = 2 \cdot 41,52 + 240 = 323,04 \text{ m}^2$

Volumen: $V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 41,52 \cdot 10 = 415,2 \text{ m}^3$

11. Halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular en la que la arista de la base mide 14 m, y la altura, 24 m



Área total: $A_T = A_B + A_L$

Se calcula el área de la base y el área lateral:

- a) $A_B = \ell^2 \Rightarrow A_B = 14^2 = 196 \text{ m}^2$

b) $A_L = 4 \cdot \frac{\ell \cdot h}{2}$

Hay que calcular la apotema de la pirámide, h



$$h^2 = H^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 24^2 + 7^2 \Rightarrow h^2 = 625$$

$$h = \sqrt{625} = 25 \text{ m}$$

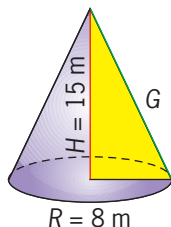
$$A_L = 4 \cdot \frac{\ell \cdot h}{2} \Rightarrow A_L = 4 \cdot \frac{14 \cdot 25}{2} = 700 \text{ m}^2$$

Luego: $A_T = 196 + 700 = 896 \text{ m}^2$

Volumen: $V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 196 \cdot 24 = 1568 \text{ m}^3$

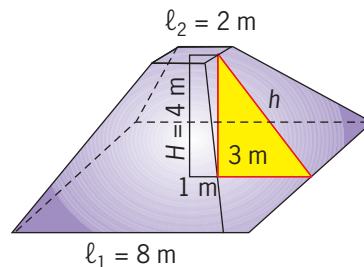
ELABORA EJERCICIOS

20. Halla el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 8 m, y la altura, 15 m. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$



21. Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 2,5 cm. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

22. Halla el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular en el que la arista de la base mayor mide 8 m; la arista de la base menor, 2 m, y la altura 4 m



REPASA PROBLEMAS

12. Calcula el número de renovaciones de aire por hora (ACH) para un aula de 6,5 m de ancho por 10 m de largo y 2,9 m de alto, con 16 estudiantes y un docente, aplicando la relación de la introducción de la unidad.

1. Datos:

- Dimensiones del aula: Ancho \times Largo \times Alto: $6,5 \times 10 \times 2,9$ m
- Aire del exterior: 14 litros por persona y segundo y hay 17 personas.

2. Pregunta:

- Número de renovaciones de aire por hora.

3. Planteamiento y operaciones:

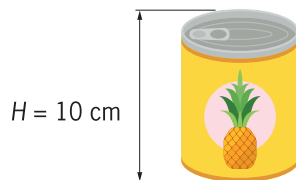
Se necesita el volumen del aula:

$$V = 6,5 \cdot 10 \cdot 2,9 = 188,5 \text{ m}^3$$

$$\text{ACH} = 14 \frac{\text{L/persona}}{\text{s}} \cdot 17 \text{ personas} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \cdot 0,001 \frac{\text{m}^3/\text{litro}}{188,5 \text{ m}^3} = 4,55$$

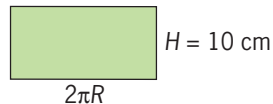
4. Solución: Se necesitan **5 ACH** lo que supone un caudal necesario de: **$5 \cdot 188,5 = 942 \text{ m}^3/\text{h}$**

13. Calcula las dimensiones de la etiqueta que cubre el área lateral de un bote con forma de cilindro de 33 cL de zumo de piña y con 10 cm de altura. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$



1. Datos:

- Un cilindro de 33 cL de volumen y 10 cm de altura.



2. Pregunta:

- ¿Cuáles son las dimensiones de la etiqueta de la cara lateral?

3. Planteamiento y operaciones:

Las dimensiones de la etiqueta son $2\pi R$ por $H = 10$ cm

Hay que calcular el radio de la base:

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = \pi R^2 H$$

$$3,14 \cdot R^2 \cdot 10 = 330$$

$$R^2 = 33 : 3,14 = 10,51$$

$$R = \sqrt{10,51} = 3,24 \text{ cm}$$

$$2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,24 = 20,35 \text{ cm}$$

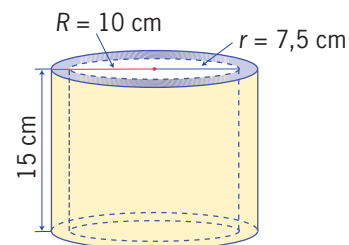
4. Solución: Las dimensiones son **20,35 cm** por **10 cm**

ELABORA PROBLEMAS

23. Un depósito esférico de 1,8 m de radio se llena de gas. Si 1 m^3 de gas equivale a 11,7 kWh y el precio en una tarifa TUR es de 0,06 €/kWh, ¿cuál será el precio del gas depositado? Toma $\pi = 3,14$ y redondea el resultado a dos decimales.

24. El material con el que se hace una tulipa cuesta 16,50 €/m². Se quiere hacer una con forma de tronco de cono cuya altura mide 15 cm, el radio de la mayor, 15 cm, y el radio de la base menor, 7 cm. ¿Cuánto costará? Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

25. Un metro cúbico del material con el que está construida la pieza del dibujo pesa 7 850 kg. Calcula el peso de la pieza. Toma $\pi = 3,14$ y redondea el resultado a dos decimales.



ACTIVIDADES FINALES

ELABORA ACTIVIDADES DE LAS SECCIONES

1 ¿Qué es el volumen?

26. Completa:

- a) $15 \text{ dm}^3 = \blacksquare \text{ cm}^3$ b) $0,05 \text{ dam}^3 = \blacksquare \text{ m}^3$
 c) $250 \text{ dm}^3 = \blacksquare \text{ m}^3$ d) $32\,500\,000 \text{ cm}^3 = \blacksquare \text{ dam}^3$

27. Expresa en metros cúbicos las siguientes cantidades:

- a) $1\,300 \text{ dm}^3$ b) 6 hm^3
 c) $0,005 \text{ km}^3$ d) $400\,000 \text{ cm}^3$

28. Expresa en litros las siguientes cantidades:

- a) $1,5 \text{ m}^3$ b) $0,04 \text{ dam}^3$
 c) 25 dm^3 d) 750 cm^3

29. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tetraedro de 6 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

30. Haz el dibujo y calcula mentalmente el área y el volumen de un cubo de 5 m de arista.

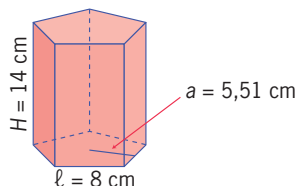
31. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un octaedro de 7 dm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

2 ¿Qué son los prismas y los cilindros?

32. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 10 m, 5 m y 3 m

33. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 5 cm, y la altura del prisma, 8 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

34. Calcula el área y el volumen de un prisma pentagonal en el que la arista de la base mide 8 cm, la apotema de la base mide 5,51 cm y la altura del prisma mide 14 cm. Redondea el resultado a dos decimales.



35. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cilindro recto de 4 cm de radio de la base y 7 cm de altura. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

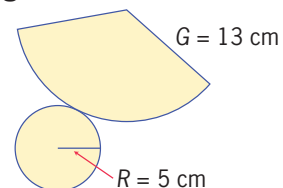
3 ¿Qué son las pirámides, los conos y la esfera?

36. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 3 m de arista y cuya altura mide 6 m. Redondea el área a dos decimales.

37. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 6 m y la altura de la pirámide mide 10 m. Redondea el área a dos decimales.

38. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 2 m y la altura mide 8 m. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

39. Calcula el área y el volumen de un cono cuyo desarrollo plano es el siguiente. Redondea el área a un decimal.



40. Calcula cuánto cuesta el helado de la figura, que es media esfera, si el litro de helado cuesta 5 €. Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a dos decimales.



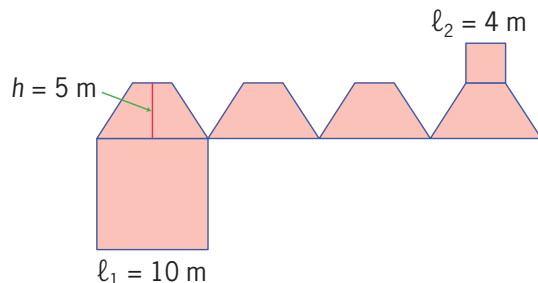
4 ¿Qué son los troncos de pirámide y de cono?

41. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrada en el que la arista de la base mayor mide 14 m; la arista de la base menor, 4 m, y la altura, 12 m.

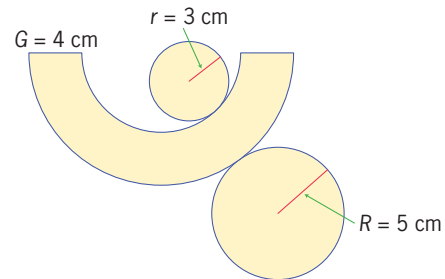
42. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 10 m; el radio de la base menor, 4 m, y la altura, 15 m. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$.

ELABORA ACTIVIDADES DE LAS SECCIONES

43. Calcula el área y el volumen del tronco de pirámide cuyo desarrollo plano es el siguiente. Toma $\pi = 3,14$



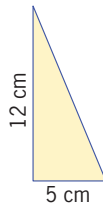
44. Calcula el área y el volumen del tronco de cono cuyo desarrollo plano es el siguiente. Toma $\pi = 3,14$. Redondea los resultados a dos decimales.



ELABORA PROBLEMAS

45. Haz el dibujo y calcula el área lateral de un cono de 4 m de altura cuya base tiene una superficie que mide $9\pi \text{ m}^2$. Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a un decimal.

46. Haz el dibujo y calcula el área lateral del cono que se genera al hacer que el triángulo rectángulo de la figura gire alrededor del cateto mayor. Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a un decimal.



47. Las dimensiones de un depósito de agua son 9 m, 6 m y 4 m. Dibuja el depósito y calcula cuántos litros de agua contendrá cuando esté completamente lleno.

48. Se quiere alicatar un cuarto de baño cuyas dimensiones son 3 m, 2 m y 2,50 m. Si se cobra a 24 €/m^2 , ¿cuánto costará alicatar el cuarto de baño?

49. Se ha construido una caja de madera sin tapa, con forma de ortoedro, cuyas dimensiones exteriores son $10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. Si la madera tiene un grosor de 1 cm, ¿cuál será la capacidad de la caja?

50. Un depósito de agua, con forma de ortoedro, tiene unas dimensiones de 6 m, 5 m y 3,5 m. Si está al 45% de su capacidad, ¿cuántos litros tiene?

51. La tulipa de una lámpara tiene forma de tronco de cono. El radio de la base mayor mide 15 m; el radio de la base menor, 10 cm, y su altura, 12 cm. Si el material con el que está construida cuesta a $12,5 \text{ €/m}^2$, ¿cuál será el precio del material utilizado? Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a dos decimales.

52. Un bote de refresco, con forma de cilindro, contiene 33 cl. Calcula el radio de la base sabiendo que su altura es de 11 cm. Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a dos decimales.

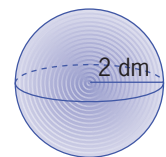
53. El envase de un yogur es un cilindro en el que el diámetro de la base mide 5 cm, y la altura, 6 cm. Calcula la superficie de la etiqueta que rodea completamente la superficie lateral del envase. Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a un decimal.

54. Se quiere hacer una pieza de plástico con forma de cono recto, que debe llenarse de agua. Si la pieza debe tener 12 cm de diámetro de la base y una altura de 20 cm, ¿cuál será su volumen? Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a un decimal.

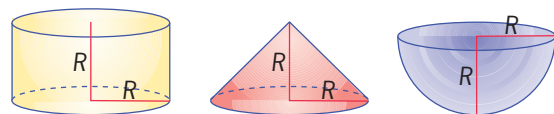
55. La diagonal de un cubo mide 4 m. Calcula el área total del cubo.

56. Se introduce una esfera en un recipiente completamente lleno de agua y se derraman $36\pi \text{ dm}^3$ de agua. Calcula el radio de la esfera. Toma $\pi = 3,14$

57. Calcula el peso de la esfera de la figura sabiendo que es maciza y su densidad es de $7,5 \text{ kg/dm}^3$. Toma $\pi = 3,14$. Redondea el resultado a un decimal.



58. Compara los volúmenes de los tres cuerpos. ¿Qué relación encuentras entre ellos?



1 Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Calcula el área total y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 7,5 m y la altura 17,5 m. Redondea el resultado a dos decimales.

SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Área y volumen de la pirámide**.

Área total = Volumen =

2 Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Calcula el área total y el volumen de un cilindro de radio de la base $R = 3,25$ m y altura $H = 12,5$ m. Redondea el resultado a dos decimales.

SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Área y volumen del cilindro**.

Área total = Volumen =

3 Problema (Calificación: 2,5 puntos)

Un balón de baloncesto tiene un diámetro de 25 cm. Calcula su superficie y su volumen.

SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Área y volumen de la esfera**.

Introduce $R = 12.5$ Área = Volumen =

4 Problema (Calificación: 2,5 puntos)

Calcula el volumen de agua necesaria para llenar una piscina con forma de paralelepípedo de dimensiones: 10 m \times 6 m \times 3 m dejando 25 cm en la parte superior sin llenar.

SOLUCIÓN

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Área y volumen del ortoedro**.

En la altura debes poner 2,75 m Volumen =

Ortoedro o paralelepípedo
o prisma rectangular
EJERCICIO RESUELTO
Halla el área y el volumen de un ortoedro o paralelepípedo de aristas $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm
 $a = 10$
 $b = 6$
 $c = 2,75$
Unidad, $u =$ cm
Hazle girar
Girar

Ortoedro o paralelepípedo: Desarrollo plano
El desarrollo plano de un ortoedro está formado por 6 rectángulos, iguales 2 a 2
Caras = 6
Vértices = 8
Aristas = 12
Teorema de Euler
 $C + V = A + 2$
 $C + V = 14$
 $A + 2 = 14$

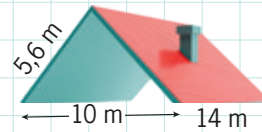
EJERCICIO PROPUESTO
Hazle girar y halla el área y el volumen de un ortoedro o paralelepípedo de aristas: $a = 8$ m, $b = 3$ m, $c = 6$ m
 $A = 2(ab + ac + bc)$
 $V = abc$
Área = 208 cm²
Volumen = 165 cm³

Puedes hacer Zoom con la rueda del ratón.

© Autores: José María Arias Cabezas, Ildefonso Maza Sáez. Editorial: Bruño

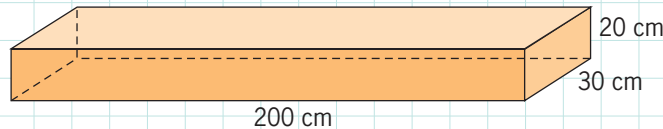
COMPRUEBO mis COMPETENCIAS

59. Se quieren poner tejas en un tejado como el de la figura adjunta. Si cada teja cubre aproximadamente 5 dm^2 , ¿cuántas tejas harán falta para cubrir el tejado?



60. A Pedro le ha recetado el médico que se tome 10 cm^3 de jarabe para la tos tres veces al día. Si el frasco contiene 240 mL, ¿cuántos días puede tomar jarabe?

61. Una viga de hormigón tiene forma de ortoedro de dimensiones $200 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Si la densidad del hormigón es $2,4 \text{ kg/dm}^3$, ¿cuánto pesará la viga?



e VALÚATE

COMPRUEBA TUS RESPUESTAS



1 Escribe los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico. Pon un ejemplo de cómo se pasa hectómetro cúbico a metro cúbico.

2 Completa:

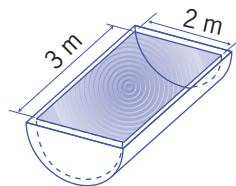
a) $17 \text{ hm}^3 = \blacksquare \text{ litros}$ b) $250 \text{ cL} = \blacksquare \text{ dm}^3$ c) $2000 \text{ cm}^3 = \blacksquare \text{ litros}$ d) $5 \text{ mL} = \blacksquare \text{ cm}^3$

3 Calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 2 m y la altura del prisma mide 6 m. Redondea el resultado a dos decimales.

4 Haz el dibujo y halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 3 m de arista y cuya altura mide 6 m. Redondea el resultado a dos decimales.

5 Halla el área y el volumen de un tronco de cono en el cual el radio de la base mayor mide 5 m; el radio de la base menor, 2 m, y la altura, 4 m. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

6 ¿Cuántas garrafas de 5 litros se llenarán con el agua del depósito de la figura? Toma $\pi = 3,14$



7 Se introduce una esfera en un recipiente completamente lleno de agua y se derraman $36\pi \text{ dm}^3$ de agua. Calcula el radio de la esfera.

8 Se quiere construir un farolillo con forma de tronco de pirámide y con las caras laterales de cristal. Si la arista de la base mayor mide 24 cm, la arista de la base menor mide 8 cm, y la altura mide 15 cm, ¿cuánto costará el cristal de las caras laterales si se cobra a 24 €/m^2 ? Redondea el resultado a dos decimales.

