

Arias Cabezas, J. M. y Maza Sánchez, I. (2023). Matemáticas II, 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, Nueva etapa. Madrid, Ed Bruño del Grupo ANAYA. ISBN: 9788469634219

Sistemas lineales con parámetros

- 1 Teorema de Rouché
- 2 Regla de Cramer y forma matricial
- 3 Discusión de sistemas con parámetros

¿Para qué sirven los sistemas lineales con parámetros?

El modelo de análisis *input-output* de una compañía se centra en observar los datos de los diferentes sectores productivos. Cada sector produce unos bienes (*outputs*) y consume los producidos por otros (*inputs*). El modelo trabaja con una matriz A representando las transacciones entre sectores productivos y una matriz Y , que es la demanda final. La ecuación matricial $A \cdot X + Y = X$ permite calcular la matriz X de producción que se debe hacer para satisfacer la demanda.

ELABORA

en tu cuaderno una imagen y un breve texto de una aplicación de los sistemas lineales con parámetros.



EXPLORA

Dado el siguiente sistema en forma matricial, escribe sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Expresión matricial de un sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1.1 MATRICES DE UN SISTEMA LINEAL

En un sistema de n ecuaciones lineales con p incógnitas

[illegible]

se distinguen las siguientes matrices:

De los coeficientes	De las incógnitas	De los términos independientes	De los coeficientes ampliada con los términos independientes
$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$

En la matriz ampliada se separa con una barra vertical la columna de los términos independientes.

EJEMPLO

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x - 4y + 5z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

cuyas matrices son las siguientes:

De los coeficientes	De las incógnitas	De los términos independientes	De los coeficientes ampliada con los términos independientes
$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$A = \left(\begin{array}{ccc c} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 5 & -3 \end{array} \right)$

1.2 TEOREMA DE ROUCHÉ

El teorema de Rouché dice que un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes, C , es igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes, A

Sistema compatible $\Leftrightarrow R(C) = R(A)$

■ Demostración en detalle en la página 230

1.3 DISCUTIR O ESTUDIAR UN SISTEMA

Discutir o estudiar un sistema consiste en clasificarlo sin resolverlo aplicando el teorema de Rouché. Para ello, se calcula el rango de la matriz de los coeficientes, C , y el rango de la matriz ampliada con los términos independientes, A , y se sigue el esquema siguiente. La letra n es el número de incógnitas:

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Compatible: } R(C) = R(A) & \begin{cases} \text{Determinado: } R(C) = R(A) = n \\ \text{Indeterminado: } R(C) = R(A) < n \end{cases} \\ \text{Incompatible: } R(C) < R(A) \end{cases}$$

Si un sistema lineal es **homogéneo**, es decir, si todos los términos independientes son cero, entonces $R(C) = R(A)$, siempre son compatibles y tienen la solución que se denomina **trivial** por ser $x = y = z = 0$; en el caso de que $R(C) = R(A) < n$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

••• Estrategia para discutir o estudiar un sistema

Si el número de ecuaciones coincide con el de incógnitas, se halla el determinante de la matriz de los coeficientes, y si es:

- Distinto de cero, el sistema es compatible determinado.
- Igual a cero, se calcula el rango de la matriz ampliada por Gauss.

EJERCICIO RESUELTO

1 Discute el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3 \cdot 1^\circ - 2^\circ \\ 2 \cdot 1^\circ - 3^\circ}} R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{2^\circ + 3^\circ} R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Se elimina la 3.ª fila porque es igual que la 2.ª

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 < \text{número de incógnitas} = 3 \Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

[Relación entre rangos]

La matriz ampliada, A , se forma añadiendo una columna a la matriz de los coeficientes, C . Por tanto, siempre se verifica lo siguiente:

$$R(C) \leq R(A)$$

[Solución]

Para hallar la solución se pasa de la última matriz de Gauss al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 5y - z = -2 \end{cases}$$

Todas las incógnitas sobrantes se pasan al 2.º miembro. De la 2.ª ecuación es más fácil despejar z :

$$\begin{cases} x + z = -2y + 1 \\ z = 5y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y + 2 = -2y + 1 \\ z = 5y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 1 \\ z = 5y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7\lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = 5\lambda + 2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ELABORA

1 Escribe los siguientes sistemas en forma matricial:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + 5z = 3 \end{cases} \end{array}$$

2 Escribe en forma ordinaria el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 Discute los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{cases} \end{array}$$

4 Discute los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y = 1 \\ -x + z = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \end{array}$$



EXPLORA

Dado el siguiente sistema, resuélvelo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.1 REGLA DE CRAMER

Un **sistema es de Cramer** si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, es decir, el sistema es compatible determinado.

En un **sistema de Cramer**, cada incógnita es el cociente de dos determinantes:

- a) El determinante del **denominador** es el de la matriz de los coeficientes.
- b) El determinante del **numerador** es el que resulta de sustituir, en el determinante de la matriz de los coeficientes, la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se despeja, por los términos independientes.

■ Demostración en detalle en la página 231

EJERCICIO RESUELTO

2 Resuelve por Cramer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{72}{24} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{24} = \frac{96}{24} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{24} = \frac{48}{24} = 2$$

2.2 RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA MATRICIALMENTE

Para resolver un sistema matricialmente se escribe la matriz de los coeficientes, C , la matriz columna de las incógnitas, X , y la de los términos independientes, B , y se escribe el sistema en forma matricial:

$$CX = B \Rightarrow X = C^{-1}B$$

EJERCICIO RESUELTO

3 Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y = 4 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Se escribe el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se calcula la inversa de la matriz de los coeficientes:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$x = -3, y = 2, z = 1$$

[Observa]

El sistema escrito matricialmente es:

$$C \cdot X = B$$

Como la matriz C está multiplicando por la izquierda pasa al segundo miembro su inversa multiplicando por la izquierda:

$$X = C^{-1} \cdot B$$

ELABORA

5 Resuelve por Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases} \end{array}$$

6 Resuelve por Cramer en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

7 Resuelve por Cramer:

$$\begin{cases} 4x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + 3z = 10 \\ x + y - 5z = -10 \end{cases}$$

8 Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

9 Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

10 Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$$



SITUACIÓN DE APRENDIZAJE



EXPLORA

Discute, según los valores de k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

Discutir o estudiar un sistema en función de un parámetro consiste en clasificar el sistema en función de los valores del parámetro.

3.1 SISTEMAS DE 3 ECUACIONES CON 3 INCÓGNITAS CON UN PARÁMETRO

La mejor estrategia para discutir estos sistemas es:

- Se calcula el determinante de la **matriz de los coeficientes** y se hallan sus raíces. Para aquellos valores para los que no se anule el determinante de los coeficientes, se tendrá que $R(C) = R(A) = 3$, y el sistema será compatible determinado.
- Para los valores que son raíces del determinante de la matriz de los coeficientes, se estudia el sistema por Gauss.

EJERCICIO RESUELTO

4 Discute, según los valores del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1-k)x + y + z = 0 \\ x + (1-k)y + z = k \\ x + y + (1-k)z = k^2 \end{cases}$$

$$\text{a) Se calcula: } |C| = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 3k^2 - k^3$$

$$3k^2 - k^3 = 0 \Rightarrow k^2(3-k) = 0 \Rightarrow k = 0, k = 3$$

- Para todo valor de $k \neq 0$ y $k \neq 3$, se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible determinado.}$

- Se estudian los valores que son raíces de $|C| = 0$ por Gauss:

$$\text{• Para } k = 0 \text{ se tiene el sistema: } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 1 < \text{número de incógnitas} = 3$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\text{• Para } k = 3 \text{ se tiene el sistema: } \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 3 \\ x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

$$R \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1.^a + 2 \cdot 2.^a \\ 3.^a - 2.^a}} R \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2.^a : (-3) \\ 2.^a + 3.^a}} =$$

$$= R \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right)$$

Se tiene que $R(C) = 2 \neq R(A) = 3$ y, por tanto, el sistema es incompatible.

[Solución]

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3.2 SISTEMAS DE 3 ECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS CON UN PARÁMETRO

La mejor estrategia para discutir estos sistemas es:

- a) Se calcula el determinante de la **matriz ampliada** y se hallan sus raíces. Para aquellos valores para los que no se anule el determinante, se tendrá que:

$$R(C) \leq 2 \text{ y } R(A) = 3, \text{ y el sistema será incompatible.}$$

- b) Para los valores que son raíces del determinante de la matriz ampliada, se estudia el sistema por Gauss.

EJERCICIO RESUELTO

- 5 Discute, según los valores del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + (k+1)y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

a) Se calcula: $|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = k-1$

$$k-1=0 \Rightarrow k=1$$

- Para todo valor de $k \neq 1$, se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$ y, por tanto, el sistema es incompatible.

- b) Se estudian los valores que son raíces de $|A| = 0$

- Para $k=1$ se tiene:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a - 1^a} R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 = \text{número de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible determinado.}$

[Solución]

Para hallar la solución se pasa de la última matriz de Gauss al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ELABORA

- 11 Discute, según los valores del parámetro a , los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a+1)x + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$

- 12 Discute, según los valores del parámetro k , los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} kx + y + z = 4 \\ x + y + z = k \\ x - y + kz = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \end{cases}$

- 13 Discute, según los valores del parámetro a , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 10y = -4 \\ ax + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

- 14 Discute, según los valores del parámetro m , los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$

2.1 REGLA DE CRAMER

En un sistema de Cramer, cada incógnita es el cociente de dos determinantes:

- El determinante del **denominador** es el de la matriz de los coeficientes.
- El determinante del **numerador** es el que resulta de sustituir, en el determinante de los coeficientes, la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se despeja, por los términos independientes.

●●● Demostración

Dado el sistema de Cramer:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

el sistema se puede escribir de forma abreviada: $CX = B$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, la matriz C de los coeficientes es regular y tiene inversa; por tanto, se tiene:

$$X = C^{-1} \cdot B$$

Escribiendo las matrices, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Se despeja cada incógnita y se utiliza el desarrollo de un determinante por los elementos de una columna escritos en forma inversa:

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{nn}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$x_2 = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$x_n = \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|C|}$$

Discutir un sistema 3×3 con un parámetro y resolver por Cramer

6 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro k

$$\begin{cases} kx - 2y + (k-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -kx + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores de k

b) Resuelve el sistema para $k = 1$

a) Discusión del sistema:

$$\begin{vmatrix} k & -2 & k-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -k & 1 & -6 \end{vmatrix} = 3k^2 - 29k + 26 \Rightarrow 3k^2 - 29k + 26 = 0 \Rightarrow k = 1, k = \frac{26}{3}$$

Para $k \neq 1, k \neq 26/3$, $R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas}$, sistema compatible determinado.

Para $k = 1$

$$\begin{aligned} R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{2 \cdot 1.^a + 2.^a \\ 1.^a + 2.^a}} R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{array} \right) = \\ & = R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$R(C) = R(A) = 2 < \text{número de incógnitas}$, sistema compatible indeterminado.

Para $k = 26/3$

$$\begin{aligned} R \left(\begin{array}{ccc|c} 26/3 & -2 & 23/3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{3 \cdot 1.^a \\ 3 \cdot 3.^a}} R \left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1.^a + 13 \cdot 2.^a \\ 1.^a + 3.^a}} \\ & = R \left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & -3 & 5 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{2.^a + 11 \cdot 3.^a} R \left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 368 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3$, sistema incompatible.

b) Resolver para $k = 1$

Tomamos la matriz final de la discusión en la que $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Pasamos al sistema correspondiente:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -y - 6z = 10 \end{cases}$$

Despejamos y de la 2.ª ecuación:

$$y = -6z - 10$$

Sustituimos en la 1.ª ecuación: $x - 2y = 4$, tenemos:

$$x - 2(-6z - 10) = 4 \Rightarrow x + 12z + 20 = 4 \Rightarrow x = -12z - 16$$

Se obtiene: $\begin{cases} x = -12z - 16 \\ y = -6z - 10 \end{cases}$, que expresado en paramétricas quedaría:

$$\begin{cases} x = -12\lambda - 16 \\ y = -6\lambda - 10 \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

Resolver un sistema 3×3 aplicando la matriz inversa

7 Resuelve las cuestiones:

a) Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Escribe de forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

a) Matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$x = 3, y = -2, z = 0$$

Discutir y resolver un sistema dado matricialmente

8 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Estudia la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro k

b) Resuelve el sistema anterior cuando $k = 2$

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2k - 2$$

$$2k - 2 = 0 \Rightarrow k = 1$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución y es única si $k \neq 1$ porque $R(C) = R(A) = 3 = N.^{\circ}$ de incógnitas

Para $k = 1$, hallamos el rango de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A por Gauss:

$$R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2 \cdot 1.^{\circ} - 2.^{\circ} \\ 2 \cdot 1.^{\circ} - 3.^{\circ}}} R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ Para $k = 1$ el sistema es incompatible.

b) Para $k = 2$ tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + y = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{\substack{2 \cdot 1.^{\circ} - 2.^{\circ} \\ 1.^{\circ} - 3.^{\circ}}} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 4z = 5 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Solución: $x = 1, y = 1, z = 1$

Discutir y resolver un sistema 3×3 con un parámetro

9 Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

- a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.
b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = 2$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1, a = -1$$

Para $a \neq 1, a \neq -1, R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas, sistema compatible determinado.}$

Para $a = 1$

$$R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1.^a - 2.^a \\ 1.^a - 3.^a}} R \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3$, sistema incompatible.

Para $a = -1$

$$R \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1.^a + 2.^a \\ 2.^a - 3.^a}} R \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$R(C) = R(A) = 2 < \text{número de incógnitas, sistema compatible indeterminado.}$

- a) Resolución cuando es compatible indeterminado:

Pasamos de la última matriz en la que hemos calculado el rango a forma de sistema:

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ 2y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 5/2 - z + z = 4 \\ y = 5/2 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/2 \\ y = 5/2 - z \end{cases}$$

Solución general: $x = -3/2, y = 5/2 - z$

Solución en paramétricas: $x = -3/2, y = 5/2 - \lambda, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$

- b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = 2$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Cambiamos la 1.ª ecuación con la segunda:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\substack{2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 1.^a}} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 5y - z = 2 \\ 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 1$$

$$\begin{cases} x - 2 + 3 = 1 \\ 5 - z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Solución: $x = 0, y = 1, z = 3$

10 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ 2x + my = m \\ x + mz = m \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$

- a) Halla para qué valores de m el sistema es compatible determinado.
b) Resuélvelo si es posible para $m = 1$

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 - m$$

$$m^3 - m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = -1, m_3 = 1$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución y es única si $m \neq 0, m \neq -1, m \neq 1$

Porque $R(C) = R(A) = 3 = \text{N.º de incógnitas}$.

b) Para $m = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{2 \cdot 1.^a - 2.^a} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = -1 \\ x + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{1.^a - 3.^a} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = -1 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

Solución: $x = 1 - z, y = 2z - 1$

Discutir y resolver un sistema 3×3 homogéneo con un parámetro

11 Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averigua para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resuélvelo en tales casos.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2, k = -1$$

Para $k \neq 2, k \neq -1, R(C) = 3 = \text{número de incógnitas}$, solo tiene la solución $x = y = z = 0$.

Para $k = 2$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \xrightarrow{2 \cdot 1.^a - 2.^a} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \xrightarrow{3 \cdot 1.^a - 3.^a} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z/5 \\ y = 3z/5 \end{cases}$$

La solución general es: $x = -z/5, y = 3z/5$

La solución en paramétricas: $x = -\lambda/5, y = 3\lambda/5, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$

Para $k = -1$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{-x - y + z = 0} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

La solución general es: $x = z, y = 0$

La solución en paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Discutir y resolver un sistema 2×2 con un parámetro

12 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:

- Discutir el sistema según los valores del parámetro a . Resolverlo cuando la solución sea única.
- Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$

a) Discusión:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -1$$

Para $a \neq 1, a \neq -1, R(C) = R(A) = 2 = \text{número de incógnitas, sistema compatible determinado.}$

Para $a = 1$

$$R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{1.^\circ - 2.^\circ} R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(C) = R(A) = 1 < \text{número de incógnitas, sistema compatible indeterminado.}$

Para $a = -1$

$$R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1.^\circ + 2.^\circ} R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$R(C) = 1 \neq R(A) = 2, \text{ sistema incompatible.}$

La solución es única cuando $a \neq 1, a \neq -1$; hay que resolverlo en función de a

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - 1} = \frac{(a+2)(a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a+2}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{-a+1}{a^2 - 1} = -\frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = -\frac{1}{a+1}$$

Solución: $x = \frac{a+2}{a+1}, y = -\frac{1}{a+1}; a \neq \pm 1$

b) Si $y = 2$, sustituimos $y = 2$ y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 2a = 2 \\ ax - 2 = a + 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2a + 2$$

Sustituimos $x = 2a + 2$ en $ax - 2 = a + 1$

$$a(2a + 2) - 2 = a + 1$$

$$2a^2 + 2a - 2 = a + 1$$

$$2a^2 + a - 3 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -3/2 \end{cases}$$

Tiene la solución $y = 2$ cuando $a = 1, a = -3/2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CONTESTA EN TU CUADERNO

1 Un sistema lineal es compatible determinado si (C , matriz de los coeficientes, y A , matriz ampliada con los términos independientes):

- a) $R(C) < R(A)$
- b) $R(C) = R(A) = N.º$ de incógnitas
- c) $R(C) > R(A)$
- d) $R(C) \neq R(A)$

2 Si tenemos el sistema lineal matricial $CX = B$ tal que existe C^{-1} , la solución es:

- a) $X = BC$
- b) $X = CB$
- c) $X = BC^{-1}$
- d) $X = C^{-1}B$

3 Un sistema lineal homogéneo:

- a) Siempre es compatible.
- b) Siempre es incompatible.
- c) Unas veces es compatible y otras incompatible.
- d) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

4 En un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas, se cumple que:

- a) Si $R(C) = R(A) = 2$, es compatible.
- b) Si $R(A) = 3$, es compatible.
- c) Si $R(C) = 3$, es compatible.
- d) Si $R(C) = R(A) = 3$, es compatible.

5 En un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, se cumple que:

- a) Si $R(C) = R(A) = 2$, es compatible determinado.
- b) Si $R(C) \neq R(A)$, es compatible determinado.
- c) Si $R(C) = R(A) = 3$, es compatible determinado.
- d) Si $R(C) < R(A)$, es compatible determinado.

6 Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro k

$$\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \end{cases}$$

- a) Es siempre incompatible.
- b) Para $k \neq 0$, compatible determinado.
- c) Para $k = 0$, compatible determinado.
- d) Para $k = 0$, incompatible.

7 Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Discute el sistema en función del valor de a

- a) Para $a = 0$, no tiene solución, y para $a = 1$, compatible indeterminado.
- b) Si $a \neq 0$, incompatible, y si $a = 0$, compatible indeterminado.
- c) Si $a = 0$, incompatible, y si $a \neq 0$, compatible indeterminado.
- d) Si $a \neq 1$, incompatible, y si $a = 1 \pm \sqrt{2}$, compatible indeterminado.

8 Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Resuelve el sistema para $a = 0$. Resuelve el sistema para $a = 1$

- a) Para $a = 0$, no tiene solución; para $a = 1$, $x = -2z + 1$, $y = -z + 2$
- b) Para $a = 0$, $x = y = z = 0$; para $a = 1$, no tiene solución.
- c) Para $a = 0$, $x = 2$, $y = -3$, $z = 5$; para $a = 1$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
- d) Para $a = 0$, $x = -1$, $y = -2$, $z = -3$; para $a = 1$, $x = 3$, $y = 2$, $z = 0$

9 Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

estudia su compatibilidad según los valores de a

- a) Si $a \neq 0$, $a \neq 2$, compatible determinado; si $a = 1$, incompatible; si $a = 2$ incompatible.
- b) Si $a \neq 1$, compatible determinado; si $a = 1$, compatible indeterminado.
- c) Si $a \neq 0$, compatible determinado; si $a = 0$, compatible indeterminado.
- d) Si $a \neq -1$, $a \neq 3$, compatible determinado; si $a = -1$, incompatible; si $a = 3$, incompatible.

10 Dado:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- a) Si $a \neq 1$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1 - a$
- b) Si $a = 1$, $x = 1/2$, $y = 1/2$, $z = (1 - a)/2$
- c) $x = 1/2$, $y = 1/2$, $z = (1 - a)/2$ para $a \neq 1$ y $x = \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = 0$; $\lambda \in \mathbb{R}$ para $a = 1$
- d) No se puede resolver porque $R(C) \neq R(A)$

Elabora actividades de las secciones

1 TEOREMA DE ROUCHÉ

15 Discute los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 4y + 5z = 9 \\ x - 2y = 1 \\ 5x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

16 Discute los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 4x - y + 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

17 Discute los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

18 Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 7 \\ x + y + z = 6 \\ 5x - 2y - 4z = -11 \end{cases}$$

2 REGLA DE CRAMER Y FORMA MATRICIAL

19 Resuelve por Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

20 Resuelve por Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 4y = 5 \\ 7x - y - 3z = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

21 Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

22 Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 DISCUSIÓN DE SISTEMAS CON PARÁMETROS

23 Discute, según los valores del parámetro m , los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} mx + my = 6 \\ x + (m-1)y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$$

24 Discute, según los valores del parámetro a , los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + az = 9 \\ x - y - 6z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$$

25 Discute, según los valores del parámetro k , los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + y = k \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ kx + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Elabora actividades para reforzar

26 Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

27 Para cada valor del parámetro real k se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) discutir el sistema según los valores de k
- b) resolverlo en los casos en que sea compatible.

28 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m+2)z = 3 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema para los distintos valores de m
- b) Resuelve el sistema para $m = 3$

29 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a
- b) Resuelve el sistema para $a = -1$
- c) Resuelve el sistema para $a = 2$

30 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ
- b) Resuelve cuando sea indeterminado.

31 Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores del parámetro a
- b) Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

32 Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{cases}$$

- a) Discute la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro k
- b) Resuelve el sistema para $k = -1$
- c) Resuelve el sistema para $k = 2$

33 Siendo a un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{cases}$$

- a) Discute el sistema en función del valor de a
- b) Encuentra todas sus soluciones para $a = 1$

34 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (1 - \lambda)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{cases}$$

donde λ es un número real.

- a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ
- b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$
- c) Resuelve el sistema para $\lambda = 3$

35 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - \lambda y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ y resuélvelo.

36 Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -\lambda x + 3y + z = -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z = -5 \end{cases}$$

- Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ
- Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

37 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

- Discute el sistema en función del parámetro a
- Resuélvelo para $a = 2$

38 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

- Discute el sistema en función del parámetro real a
- Resuélvelo para $a = 4$

39 Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a + 1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$$

- Discute el sistema en función del parámetro real a
- Resuelve el sistema en los casos en que resulte compatible determinado.

40 Se considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m
- Resuelve el sistema para $m = 6$

41 Sea el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + my + 2mz = 0 \\ 2x + my + (2m + 3)z = 0 \end{cases}$$

- Calcula el valor de m para el que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.
- Halla las soluciones.

Elabora problemas

42 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

- Estudia su compatibilidad.
- Añade al sistema una ecuación de tal forma que el sistema resultante tenga solución única. Justifica la respuesta y encuentra dicha solución.
- Añade al sistema dado una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

43 Se considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a - 1)z = 2a \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores del parámetro real a
- Resuelve el sistema para $a = 3$

44 Discute el sistema, según el valor del parámetro m , y resuelve en los casos de compatibilidad.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + mz = 6 \\ -2x - 10y - 2z = m - 4 \end{cases}$$

45 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2ky - t = 0 \end{cases}$$

- Encuentra los valores de k para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2
- Resuelve el sistema anterior para $k = 0$

46 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{cases}$$

- Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.
- Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.
- Discute el sistema para los restantes valores de λ

47 Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según el valor del parámetro a
 b) Resuelve el sistema en todos los casos de compatibilidad.

48 Discute, según los valores del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2y - z = k \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

49 Discute, según los valores del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \\ x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

50 Discute, según los valores del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ x + 2y + 2kz = k \end{cases}$$

51 Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m y resuélvelo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ 3x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + mz + 5 = 0 \end{cases}$$

52 Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + z = 1 \\ ay + z = 1 \\ az = 1 \end{cases}$$

Elabora problemas de más nivel

53 Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros a y b :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

54 Discute, según los valores de los parámetros λ y μ , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \mu \\ x + y + \lambda z = 2 \\ 2x + y + \lambda z = \mu \end{cases}$$

55 Discute, según los valores de los parámetros a y b , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 5y + az = -2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \end{cases}$$

56 Calcula el valor de a y b para que el sistema siguiente sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases}$$

57 Estudia, según los diferentes valores de a y b , la compatibilidad del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = b \\ x + y + z = 5 \\ 4x - 5y + az = -10 \end{cases}$$

58 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema en función de a y b
 b) Resuelve el sistema para $a = b = -2$

59 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases}$$

- a) Halla los valores de a y b para los que el sistema sea compatible indeterminado y su solución sea una recta.
 b) Halla la solución para los valores obtenidos en el apartado anterior.

COMPETENCIA digital

con GeoGebra en Moodle

1. Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Discute o estudia el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 5 \\ 5x + 4y - 2z = 7 \\ 3x + 7y - 5z = 9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

En GeoGebra elige el *applet*: **Discutir o estudiar un sistema**.

El sistema es **incompatible** porque $R(C) = 2$ y $R(A) = 3$

2. Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

En GeoGebra elige el *applet*: **Resolución de un sistema matricialmente**.

$x = -1/4$ $y = 7/2$ $z = -1/4$

3. Ejercicio (Calificación: 2,5 puntos)

Discute según los valores de k el sistema y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 5k/2 \\ 5x + 2y = k^2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

En GeoGebra elige el *applet*: **Sistemas de 3 ecuaciones con 2 incógnitas con un parámetro k**

Es incompatible para $k \neq 2, k \neq 3$

Solución para $k = 2$ es $x = 2/11, y = 17/11$ Solución para $k = 3$ es $x = 12/11, y = 39/22$

4. Problema (Calificación: 2,5 puntos)

Discute según los valores de k el sistema y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} (2-k)x + y + (2k-1)z = 2k^2 - 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

En GeoGebra elige el *applet*: **Sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con un parámetro k**

Es compatible determinado para $k \neq -2, k \neq 1$ Para $k = -2$ es **incompatible**

Para $k = 1$ es **compatible indeterminado** Solución $x = -y - z + 1$

Sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con un parámetro k La variable o parámetro tiene que ser k

EJERCICIO RESUELTO

Discute, según los valores del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1-k)x + y + z = 0 \\ x + (1-k)y + z = k \\ x + y + (1-k)z = k^2 \end{cases}$$

A = Matriz ampliada con los términos independientes
La tecla [Tab] pasa de una celda a la siguiente.

$A = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-k & 1 & k \\ 1 & 1 & 1-k & k^2 \end{pmatrix}$ $|C| = -2k^3 + 6k - 4$ ☐ SOLUCIÓN EP1 ☐ SOLUCIÓN EP2

C = Matriz de los coeficientes

La mejor estrategia para discutir estos sistemas es:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y se hallan sus raíces. Para aquellos valores para los que no se anule el determinante, se tendrá que $R(C) = R(A) = 3$, y el sistema será compatible determinado.

b) Para las raíces de $|C| = 0$ se estudia el sistema por Gauss.

Sistema $\begin{cases} \text{Compatible} & \text{Determinado: } R(C) = R(A) = n \\ R(C) = R(A) & \text{Indeterminado: } R(C) = R(A) < n \\ \text{Incompatible: } R(C) < R(A) \end{cases}$

Resolvemos la ecuación $|C| = 0$, excepto para sus raíces: $\{k = -2, k = 1\}$
tenemos $R(C) = R(A) = 3 = N^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Para las raíces estudiamos los rangos de C y A

Para $k = 1 \Rightarrow$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $R(C) = 1$
 $R(A) = 1$

EJERCICIO PROPUESTO

Discute, según los valores del parámetro k , los sistemas:

$$\begin{cases} kx + y + z = 4 \\ x + y + z = k \\ x - y + kz = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN
El sistema es compatible indeterminado.
 $x = -y - z + 1, y = y, z = z$

Autores: José María Arias Cabezas e Ildelfonso Maza Sáez. © Grupo Editorial Bruño, S. L.

PROBLEMAS

RESUELTOS

- 1** Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay 3 modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es 6 veces el número de cajas del modelo C. Halla el número de cajas de cada tipo.

Incógnitas, datos y preguntas

A = cajas modelo A B = cajas modelo B C = cajas modelo C

Planteamiento y operaciones

$$\begin{cases} 5A + 10B + 15C = 325 \\ A + B + C = 35 \\ A + B = 6C \end{cases} \xrightarrow{1.^a/5} \begin{cases} A + 2B + 3C = 65 \\ A + B + C = 35 \\ A + B - 6C = 0 \end{cases} \xrightarrow{1.^a - 2.^a} \begin{cases} A + 2B + 3C = 65 \\ A + B + C = 35 \\ A + B - 6C = 0 \end{cases} \xrightarrow{2.^a - 3.^a} \begin{cases} A + 2B + 3C = 65 \\ A + B + C = 35 \\ A + B - 6C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + 2B + 3C = 65 \\ B + 2C = 30 \\ 7C = 35 \end{cases} \xrightarrow{3.^a/7} \begin{cases} A + 2B + 3C = 65 \\ B + 2C = 30 \\ C = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 10 \\ B = 20 \\ C = 5 \end{cases}$$

Solución

N.º de cajas del modelo A = 10, B = 20, C = 5

- 2** Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 €. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 €

Para compensar el error, el vendedor le ofreció que se llevara un bocadillo y un refresco por solo 3 €, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de la bolsa de patatas?

Incógnitas, datos y preguntas

b = precio bocadillo r = precio refresco p = precio patatas

Planteamiento y operaciones

En realidad le cobró 4 bocadillos, 2 refrescos y 3 bolsas de patatas y pagó un total de 19 €

$$\begin{cases} 4b + 2r + 3p = 19 \\ b + p = 4 \\ 0,6(b + r) = 3 \end{cases} \xrightarrow{3.^a/0,6} \begin{cases} 4b + 2r + 3p = 19 \\ b + p = 4 \\ b + r = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + 2r + 3p = 19 \\ b + p = 4 \\ b + r = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + 2r + 3p = 19 \\ p = 4 - b \\ r = 5 - b \end{cases}$$

$$4b + 2(5 - b) + 3(4 - b) = 19 \Rightarrow 4b + 10 - 2b + 12 - 3b = 19$$

$$-b = -3 \Rightarrow b = 3, p = 1, r = 2$$

Solución

Precio de un bocadillo = 3 €, refresco = 2 € y patatas = 1 €

- 3** Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece tres tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes, y el peso total de su pedido que es 1 800 kg. Si el peso de 2 sacos pequeños y de 3 medianos en el mismo que el de 2 sacos grandes y el peso de un saco grande es 4 veces el peso de un saco pequeño. Halla el peso de cada uno de los sacos.

Incógnitas, datos y preguntas

p = peso saco pequeño m = peso saco mediano g = peso saco grande

Planteamiento y operaciones

$$\begin{cases} 20p + 14m + 6g = 1800 \\ 2p + 3m = 2g \\ g = 4p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10p + 7m + 3g = 900 \\ 2p + 3m = 8p \\ g = 4p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10p + 7m + 3g = 900 \\ 2p + 3m = 8p \\ g = 4p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10p + 7m + 3g = 900 \\ 3m = 6p \\ g = 4p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10p + 7m + 3g = 900 \\ m = 2p \\ g = 4p \end{cases}$$

$$10p + 14p + 12p = 900 \Rightarrow 36p = 900 \Rightarrow p = 25, m = 50, g = 100$$

Solución

Peso saco pequeño = 25 kg, mediano = 50 kg y grande = 100 kg

4 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Razona si la matriz A es simétrica.
b) Calcula A^{-1}
c) Resuelve la ecuación matricial:

$$2X \cdot A - A^2 - 3I = 0$$

a) Una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que $A^t \neq A$, porque $a_{23} \neq a_{32}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Existe la matriz inversa A^{-1}

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $2X \cdot A - A^2 - 3I = 0 \Rightarrow 2X \cdot A = A^2 + 3I$

$$X = \frac{1}{2} (A^2 + 3I) A^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{2} (A + 3A^{-1})$$

$$A + 3A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

5 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el determinante de A
b) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A ?

a) Determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - a^2$$

b) La matriz A tiene inversa siempre que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = -a^3 - a^2 \Rightarrow -a^3 - a^2 = 0 \Rightarrow a^3 + a^2 = 0$$

$$a^2(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$$

La matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 0$ y $a \neq -1$

6 Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x+2 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x+2 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Soluciones o raíces: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2$

7 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Comprueba que verifica $A^3 - I = O$; con I , matriz identidad, y O , matriz nula.
- Calcula A^{12} .
- Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la siguiente igualdad:

$$A^2 X + I = A$$

$$a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } A^3 - I = O$$

- La matriz A es cíclica de orden 3

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

$$A^{12} = A^3 = I$$

- Se multiplica por la izquierda en los dos miembros por A

$$A \cdot (A^2 X + I) = A \cdot A \Rightarrow A^3 \cdot X + A = A^2 \Rightarrow X + A = A^2 \Rightarrow X = A^2 - A$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Resuelve las siguientes cuestiones:

- Define rango de una matriz.
- Calcula el rango de A según los valores del parámetro k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Estudia si se puede formar una base de R^3 con las columnas de A según los valores del parámetro k . Indica con qué columnas.

- El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

$$C_4 \quad C_3 \quad C_1 \quad C_2$$

$$b) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & k & k \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.^a + 2.^a} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & k+1 & k+3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.^a - 2 \cdot 3.^a} = R \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & k+1 & k+3 \\ 0 & 0 & k+3 & k-3 \end{pmatrix} = 3$$

para cualquier valor de k , ya que k no puede ser 3 y -3 a la vez.

- Para $k = -3$, el determinante formado por los vectores de las columnas 4.^a, 3.^a y 1.^a de A es cero. Luego los tres vectores son linealmente dependientes. Se puede formar una base con los vectores de las columnas 3.^a, 2.^a y 1.^a.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Rightarrow \text{Las columnas 1.ª, 2.ª y 3.ª son linealmente independientes para } k = -3$$

Para el valor $k \neq -3$ se puede formar una base con las columnas 1.^a, 3.^a y 4.^a.

9 Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$$

$$B = (a \ 2 \ 3)$$

$$C = (4 \ 0 \ 2)$$

- Halla los valores de x, y, z , para los que A no tiene inversa.
- Determina los valores de a para los que el sistema $B \cdot A = C$ tiene solución.
- Resuelve el sistema anterior cuando sea posible.

a) Para que A no tenga inversa, el determinante de A debe valer cero.

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y^2 - y^2z \Rightarrow y^2 - y^2z = 0 \Rightarrow y^2(1 - z) = 0 \Rightarrow y = 0; z = 1$$

La matriz A no tiene inversa para los valores $y = 0$, o bien $z = 1$

$$b) \quad B \cdot A = C \Rightarrow (a \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \ 0 \ 2) \Rightarrow \begin{cases} ax + 2y = 1 \\ ay + 3z = 0 \\ ax + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Sea la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, respectivamente:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 3a^2 \Rightarrow 3a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Para todo valor $a \neq 0$, $R(M) = R(N) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow$
Sistema compatible determinado.

Para $a = 0$ se tiene:

$$R \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right) = R \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{2 \cdot 3 / 3} R \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Se tiene $R(M) = 2 \neq R(N) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

c) Para $a \neq 0$, resolvemos por Cramer:

$$|M| = 3a^2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3a^2} = \frac{a+2}{a^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

La solución es:

$$x = \frac{a+2}{a^2} \quad y = -\frac{1}{a} \quad z = \frac{1}{3}$$

- 10** Calcula una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$XA^2 + BA = A^2 \Rightarrow XA^2 = A^2 - BA \Rightarrow XAAA^{-1} = AAA^{-1} - BAA^{-1} \Rightarrow$$

$$XAI = AI - BI \Rightarrow XA = A - B \Rightarrow XAA^{-1} = AA^{-1} - BA^{-1} \Rightarrow X = I - BA^{-1}$$

Calculamos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = I - BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 11** Dado el sistema de ecuaciones con las incógnitas x, y, z ,

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$$

se pide:

- Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible.
- Para ese valor obtenido en a) de α , calcular el conjunto de soluciones del sistema.

- a) Sea C la matriz de los coeficientes y A la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada.

$$R \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\substack{2 \cdot 1.^a - 2.^a \\ 1.^a - 3.^a}} R \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2(\alpha - 1) \\ 0 & 4 & -10 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{2 \cdot 2.^a + 3 \cdot 3.^a} =$$

$$= R \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2(\alpha - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 5(\alpha - 1) \end{pmatrix} \right)$$

Para $\alpha \neq 1 \Rightarrow R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Para $\alpha = 1 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 < n.^{\circ}$ de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

- b) Para $\alpha = 1$, pasando de la última matriz de Gauss al sistema se tiene:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -2y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 - 2z, y = \frac{5}{2}z$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \frac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Sea A una matriz 3×3 de columnas C_1 , C_2 y C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas $C_1 + C_2$, $2C_1 + 3C_3$ y C_2 (en ese orden). Calcula el determinante de B en función del de A .

2 Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discútelo según los valores del parámetro a
- b) Resuélvelo en el caso $a = 2$

3 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

- a) Discútelo según los valores del parámetro k
- b) Resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

4 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

- a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3
- b) Estudia si el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

5 Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde λ es un número real.

- a) Encuentra los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa.
- b) Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

compatible determinado con A , la matriz del enunciado?

6 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Resuelve la ecuación matricial $AX + X = B$, donde X es una matriz 2×2
- b) Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2

7 Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a
- b) Determina para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$

8 Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{cases}$$

- a) Calcula para qué valores de λ el sistema solo admite la solución $(x \ y \ z) = (0 \ 0 \ 0)$
- b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtén todas sus soluciones.
- c) Explica la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$

9 A es una matriz 3×3 tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3
- b) Calcula la matriz fila $X = (x \ y \ z)$, que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1 \ 2 \ 3)$
- c) Calcula la matriz inversa de A