Unidad 13.
Contraste de hipótesis

1. Contraste de hipótesis

Piensa y calcula

Se quiere contrastar que la estatura media de una población de jóvenes es 170 cm, y se sabe que la desviación típica de la población es de 10 cm. Se toma una muestra de tamaño 64; y se obtiene, con un nivel de confianza del 95 %, el intervalo de confianza (167,5; 172,5)

a) ¿Qué probabilidad se tiene de que, en una muestra de tamaño 64, la media sea 171 cm?

b) ¿Qué probabilidad se tiene de que, en una muestra de tamaño 64, la media esté fuera del intervalo?

Solución:

a) El 95 %

b) El 5 %

Aplica la teoría

1 Los gastos corrientes por empleado de los distintos departamentos de una empresa siguen una distribución normal con desviación típica de 300 €. En una muestra de 16 departamentos, se ha obtenido un gasto medio por empleado de 1 350 €. Determina, para un nivel de confianza del 99 %, si el gasto corriente medio por empleado en la empresa es de 1 280 €

a) Plantea la hipótesis nula y la alternativa.

b) Determina la región crítica del contraste.

c) Halla el estadístico del contraste.

d) Acepta o rechaza la hipótesis nula.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	1 280	300	
Muestra	1 350		16

Se desea contrastar que los gastos son 1 280 €

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 1\,280$ €

$H_1: \mu \neq 1\,280$ €

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

La región de aceptación es (–2,58; 2,58)

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{1\,350 - 1\,280}{\frac{300}{\sqrt{16}}} = 0{,}93$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como 0,93 $\in$ (–2,58; 2,58), se acepta la hipótesis nula con una probabilidad del 99 %

2 El número de reclamaciones presentadas durante la campaña de Navidad en 9 tiendas de una empresa han sido:

25, 31, 28, 30, 32, 20, 22, 34, 30

El número de reclamaciones sigue una distribución normal con desviación típica igual a 5. Se desea contrastar si el número medio de reclamaciones es 26, con un nivel de significación de 0,05

a) Plantea la hipótesis nula y la alternativa.

b) Determina la región crítica del contraste.

c) Halla el estadístico del contraste.

d) Acepta o rechaza la hipótesis nula.

Solución:

La media de la muestra es: $\frac{\sum x_i}{9} = 28$

	Media	D. típica	Tamaño
Población	26	5	
Muestra	28		9

Se desea contrastar que el número medio de reclamaciones es 26

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 26$

$H_1: \mu \neq 26$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es (–1,96; 1,96)

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{28 - 26}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = 1,2$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como 1,2 ∈ (–1,96; 1,96), se acepta la hipótesis nula con una probabilidad del 95 %

2. Contraste de hipótesis para la media

Piensa y calcula

Calcula $z_{\alpha/2}$ y z_α en los casos siguientes:

a) $P(z < z_\alpha) = 0,95$ b) $P(z < z_\alpha) = 0,99$ c) $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$ d) $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,99$

Solución:

a) $z_\alpha = 1,64$ b) $z_\alpha = 2,33$ c) $z_{\alpha/2} = 1,96$ d) $z_{\alpha/2} = 2,58$

Aplica la teoría

3 El envasado en botes de un producto sigue una distribución normal de desviación típica 0,2 cm^3. En los botes se indica que la cantidad es de 10 cm^3. Se eligen al azar 7 de estos botes y se miden sus contenidos, obteniéndose los resultados:

9,6 10 10,1 9,7 9,7 10 9,5

¿Se puede asegurar, con un nivel de confianza del 95 %, que la capacidad media de los botes es la que se indica en el envase?

Solución:

La media de la muestra es: $\frac{\Sigma x_i}{7} = 9,8$ cm^3

	Media	D. típica	Tamaño
Población	10	0,2	
Muestra	9,8		7

Se desea contrastar que la cantidad media de los botes es 10 cc

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 10$

$H_1: \mu \neq 10$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

La región de aceptación es (–1,96; 1,96)

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{9,8 - 10}{\frac{0,2}{\sqrt{7}}} = -2,65$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como –2,65 ∉ (–1,96; 1,96), se rechaza la hipótesis nula. La diferencia de la muestra no se debe al azar y es lógico pensar que no es verdad que el contenido medio sea de 10 cc

4 Una empresa garantiza que unas cuerdas que fabrica soportan, a lo sumo, un peso medio de 150 kg con una desviación típica de 12 kg.

Para verificar esta afirmación, se toma una muestra de 64 cuerdas, y se obtiene un peso medio de 152 kg.

¿Se puede afirmar, con un nivel de confianza del 95 %, que la afirmación de la empresa es verdadera?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	150	12	
Muestra	152		64

Se desea contrastar que el peso medio es a lo sumo 150 kg

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu \leq 150$ y la afirmación es verdadera.

$H_1: \mu > 150$ y la afirmación es falsa.

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,95$

$z_{\alpha/2} = 1,65$

La región de aceptación es (–∞; 1,65)

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{152 - 150}{\frac{12}{\sqrt{64}}} = 1,33$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como 1,33 ∈ (–∞; 1,65), se acepta la hipótesis nula con una probabilidad del 95 %

3. Contraste de hipótesis para la proporción

Piensa y calcula

Calcula en los casos siguientes:

a) $P(z > -z_\alpha) = 0,95$

b) $P(z > -z_\alpha) = 0,99$

Solución:

a) $P(z < z_\alpha) = 0,95 \Rightarrow z_\alpha = 1,65$

b) $P(z < z_\alpha) = 0,99 \Rightarrow z_\alpha = 2,33$

Aplica la teoría

5 En una muestra aleatoria de 950 personas, el 20 % estaba en desacuerdo con la política económica del Gobierno.

Contrasta, con un nivel de significación del 5 %, la hipótesis nula de que al menos el 25 % está en desacuerdo.

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,25	0,014	
Muestra	0,2		950

Se desea contrastar que al menos un 25 % está en desacuerdo.

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: p \geq 0,25$

$H_1: p < 0,25$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,05$

$1 - \alpha = 0,95$

$z_{\alpha/2} = -1,65$

La región de aceptación es $(-1,65; +\infty)$

c) Se define el estadístico para el contraste de una proporción:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$z = \frac{0,2 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{950}}} = -3,56$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-3,56 \notin (-1,65; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula. No se puede aceptar que haya al menos un 25 % en desacuerdo.

6 De una muestra aleatoria de 170 propietarios de pequeños negocios, 119 manifestaron que la fuente de financiación inicial fueron sus ahorros. Contrasta la hipótesis nula de que los ahorros personales son la fuente de financiación para el 75 % de los propietarios de pequeños negocios, con un nivel de confianza del 90 %

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,75	0,033	
Muestra	0,7		170

Se desea contrastar que la proporción es del 75 %

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: p = 0,75$

$H_1: p \neq 0,75$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,90$

$z_{\alpha/2} = 1,65$

La región de aceptación es $(-1,65; 1,65)$

c) Se define el estadístico para el contraste de una proporción:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$z = \frac{0,7 - 0,75}{\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{170}}} = -1,51$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-1,51 \in (-1,65; 1,65)$, se acepta la hipótesis nula.

Preguntas tipo test

1 Se afirma que «por lo menos el 60% de los estudiantes almuerzan en el comedor de la Facultad». Para contrastarlo se toma una muestra de 441 estudiantes y resulta que 220 almuerzan en dicho comedor. Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación inicial?

❑ Sí, con una probabilidad de error del 1%

☒ No, con una probabilidad de error del 1%

❑ Sí, con una probabilidad del 99%

❑ No, con una probabilidad de error del 99%

2 La empresa de transportes urgentes *El Rápido* afirma en su publicidad que al menos el 70% de sus envíos llegan al día siguiente a su destino. Para contrastar la calidad de este servicio, la Asociación de Consumidores selecciona aleatoriamente 100 envíos y observa que 39 no llegaron al día siguiente a su destino. Con una significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la empresa?

❑ Como $-6{,}76 \notin (-1{,}28; +\infty)$, se rechaza la afirmación.

❑ Como $-6{,}76 \notin (-1{,}28; 1{,}28)$, se rechaza la afirmación.

☒ Como $-1{,}96 \notin (-1{,}28; +\infty)$, se rechaza la afirmación.

❑ Como $-1{,}96 \in (-2{,}58; +\infty)$, se acepta la afirmación.

3 Se está calibrando una balanza. Para ello se pesa una «pesa de prueba» de 1 000 gramos 60 veces y se obtiene un peso medio de 1 000,6 gramos. Si la desviación típica de la población es de 2 gramos, ¿podemos aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu = 1\,000$ frente a la alternativa H_1: $\mu \neq 1\,000$ con una confianza del 99%?

❑ Como $2{,}32 \in (-1{,}645; +\infty)$, se acepta la hipótesis nula.

❑ Como $2{,}32 \notin (-\infty; 1{,}645)$, se rechaza la hipótesis nula.

❑ Como el valor del estadístico da cero, se acepta la hipótesis nula.

☒ Como $2{,}32 \notin (-1{,}645; 1{,}645)$, se acepta la hipótesis alternativa.

4 A principios de año, un estudio en cierta ciudad indicaba que un 15% de los conductores utilizaban el móvil con el vehículo en marcha. Con el fin de investigar la efectividad de las campañas que se han realizado desde entonces para reducir estos hábitos, recientemente se ha hecho una encuesta a 120 conductores y 12 hacían un uso indebido del móvil. Plantea un test para contrastar que las campañas no han cumplido su objetivo, frente a que sí lo han hecho, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 4%?

❑ $H_0: p = 0{,}15; H_1: p \neq 0{,}15$

Se acepta la H_0

❑ $H_0: p \leq 0{,}15; H_1: p > 0{,}15$

Se acepta la H_0

☒ $H_0: p \geq 0{,}15; H_1: p < 0{,}15$

Se acepta la H_0

❑ $H_0: p \geq 0{,}15; H_1: p < 0{,}15$

Se rechaza la H_0

5 Según cierto estudio realizado el año pasado, un 35% de las familias con conexión a Internet utilizaban habitualmente este medio para realizar sus operaciones bancarias. El estudio pronosticaba también que ese porcentaje aumentaría en los próximos meses. De una encuesta realizada recientemente a 125 usuarios de Internet, 50 declararon utilizarla habitualmente para realizar las citadas operaciones. Plantea un test para contrastar que la proporción del año pasado se ha mantenido, frente a que, como parece, se ha cumplido el pronóstico del estudio. ¿A qué conclusión se llega a un nivel de significación del 10%?

☒ $H_0: p = 0{,}35; H_1: p > 0{,}35$

Se acepta la H_0

❑ $H_0: p \leq 0{,}35; H_1: p > 0{,}35$

Se rechaza la H_0

❑ $H_0: p = 0{,}35; H_1: p \neq 0{,}12$

Se acepta la H_0

❑ $H_0: p \geq 0{,}35; H_1: p < 0{,}35$

Se acepta la H_0

1. Contraste de hipótesis

7 El diámetro de unos ejes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 mm. Se toma una muestra de tamaño 25 y se obtiene un diámetro medio de 36 mm. ¿Se puede afirmar, con un nivel de significación de 0,01, que la media de la población es de 40 mm?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	40	2	
Muestra	36		25

Se desea contrastar que la media es igual a 40 mm

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu \neq 40$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

La región de aceptación es $(-2{,}58; 2{,}58)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{36 - 40}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = -10$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-10 \notin (-2{,}58; 2{,}58)$, se rechaza la hipótesis nula.

8 Los depósitos mensuales, en euros, en una entidad bancaria siguen una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 5{,}1$. Con el fin de contrastar si la media de los depósitos mensuales es 20 €, se toma una muestra de tamaño 16, y la media muestral resulta ser 22,4 €. ¿Se puede aceptar la hipótesis de que la media es 20 € a un nivel de significación del 5 %?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	20	5,1	
Muestra	22,4		16

Se desea contrastar que la media es igual a 20 €

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 20$

$H_1: \mu \neq 20$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05\,\% \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{22{,}4 - 20}{\frac{5{,}1}{\sqrt{16}}} = 1{,}88$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1{,}88 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula.

2. Contraste de hipótesis para la media

9 Cuando una máquina funciona correctamente, produce piezas cuya longitud sigue una ley normal de media 12 cm y desviación típica 1 cm. El encargado de control de calidad ha tomado una muestra de 25 piezas y se obtiene una media de 11,5 cm

Contrasta la hipótesis de que la máquina está funcionando correctamente con un nivel de significación igual a 0,05

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	12	1	
Muestra	11,5		25

Se desea contrastar que la media es igual a 12 cm

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 12$

$H_1: \mu \neq 12$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{11{,}5 - 12}{\frac{1}{\sqrt{25}}} = -2{,}50$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-2{,}50 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula.

10 La duración de las bombillas de 100 vatios que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas. Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	800	120	
Muestra	750		50

Se desea contrastar que la media es mayor o igual a 800 h

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu \geq 800$ h y se cumple la garantía.

H_1: $\mu < 800$ h y no se cumple la garantía.

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -2{,}33$

La región de aceptación es $(-2{,}33; +\infty)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{750 - 800}{\frac{120}{\sqrt{50}}} = -2{,}95$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-2{,}95 \notin (-2{,}33; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, no se cumple la garantía.

3. Contraste de hipótesis para la proporción

11 Una empresa de productos farmacéuticos afirma en su publicidad que uno de sus medicamentos reduce considerablemente los síntomas de la alergia primaveral en el 90% de la población. Una asociación de consumidores ha experimentado dicho fármaco en una muestra de 200 socios de la misma, y obtenido el resultado indicado en la publicidad en 170 personas. Determina si la asociación de consumidores puede considerar que la afirmación de la empresa es estadísticamente correcta a un nivel de significación de 0,05

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,9	0,021	
Muestra	0,85		200

Se desea contrastar que la proporción es del 90%

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $p = 0{,}9$

H_1: $p \neq 0{,}9$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0{,}85 - 0{,}9}{\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{200}}} = -2{,}36$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-2{,}36 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, no se cumple lo que se afirma en la publicidad.

12 Un profesor afirma que, en su centro, el porcentaje de alumnos de bachillerato que fuman no sobrepasa el 15%. Si en una muestra de 60 de esos alumnos se observa que 12 fuman:

a) ¿Es aceptable la afirmación del profesor, con un nivel de significación de 0,01?

b) ¿La afirmación del apartado anterior es la misma si el nivel de confianza es del 90%?

Solución:

Como $\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,15	$\sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{60}}$	
Muestra	0,2		60

Se desea contrastar que la proporción es menor o igual al 15%

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $p \leq 0{,}15$ y el profesor tiene razón.

H_1: $p > 0{,}15$ y el profesor tiene razón.

Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

La región de aceptación es $(-\infty; 2{,}33)$

Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0{,}2 - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{60}}} = 1{,}08$$

Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1{,}08 \in (-\infty; 2{,}33)$, se acepta la hipótesis nula.

b) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}28$

Como $1{,}08 \in (-\infty; 1{,}28)$, se acepta la hipótesis nula.

Para ampliar

13 Se sabe, por trabajos realizados por expertos, que la velocidad lectora media de los niños de 6 años es de 40 palabras por minuto y que la desviación típica es de 12. Hemos tomado una muestra aleatoria de 49 niños de 6 años y hemos medido su velocidad lectora y resulta una media de 42 palabras por minuto. ¿Podemos afirmar que nuestra media es compatible con la de los expertos a un nivel de confianza del 99%? Razona la respuesta.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	40	12	
Muestra	42		49

Se desea contrastar que la media es igual a 40 palabras/min

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu \neq 40$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

La región de aceptación es $(-2{,}58; 2{,}58)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{42 - 40}{\frac{12}{\sqrt{49}}} = 1{,}17$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1{,}17 \in (-2{,}58; 2{,}58)$, se acepta la hipótesis nula, es decir, el estudio es compatible con el de los expertos.

14 Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kg. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kg

¿Puede aceptarse la hipótesis de que el verdadero peso medio de las sandías es de 5 kg, con un nivel de significación de 0,05 kg?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	5	1	
Muestra	6		100

Se desea contrastar que el peso de la sandías es 5 kg

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu \neq 5$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{6 - 5}{\frac{1}{\sqrt{100}}} = 10$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $10 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula. No se puede dar por bueno que el peso de las sandías sea de 5 kg

15 Se quiere comprobar si una máquina destinada al llenado de envases de agua mineral ha sufrido un desajuste. Una muestra aleatoria de 10 envases de esta máquina ha proporcionado los siguientes resultados:

0,49	0,52	0,51	0,48	0,53
0,55	0,49	0,50	0,52	0,49

Suponiendo que la cantidad de agua mineral que este tipo de máquinas deposita en cada envase sigue una distribución normal de media 0,5 litros y desviación típica de 0,02 litros, se desea contrastar si el contenido medio de los envases de esta máquina es de 0,5 litros, con un nivel de significación del 5%

a) Plantea la hipótesis nula y alternativa del contraste.

b) Determina la región crítica del contraste.

c) Realiza el contraste.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	0,5	0,02	
Muestra	0,508		10

Se desea contrastar que el contenido medio es 0,5 litros.

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 0{,}5$

$H_1: \mu \neq 0{,}5$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{0{,}508 - 0{,}5}{\frac{0{,}02}{\sqrt{10}}} = 1{,}26$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1{,}26 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula. El contenido medio de los envases de agua es de 0,5 litros.

16 Una empresa de automóviles está estudiando las mejoras que ha incluido en la nueva generación de su gama de utilitarios. Hasta ahora, los kilómetros que uno de estos automóviles podía recorrer –con un uso normal– sin que fueran necesarias reparaciones importantes seguía una normal con media 220 (en miles de kilómetros) y desviación típica 15 (en miles de kilómetros). Las mejoras parecen haber surtido efecto, puesto que con 100 automóviles de la nueva generación se ha obtenido una media de 225 (en miles de kilómetros) sin ningún tipo de problema grave. Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que las mejoras no han surtido efecto o incluso que han empeorado la situación, frente a que sí han surtido efecto, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la media sigue igual o que incluso bajó, y, sin embargo, esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?

b) Con un nivel de significación del 1%, ¿a qué conclusión se llega?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	220	15	
Muestra	225		100

Se desea contrastar que los cambios no han surtido mejoras.

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu \leq 220$ y los cambios no han surtido efecto.

H_1: $\mu > 220$ y los cambios han surtido efecto.

Si se acepta la hipótesis nula, siendo falsa, se comete un error de tipo II

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

La región de aceptación es $(-\infty; 2{,}33)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{225 - 220}{\frac{15}{\sqrt{100}}} = 3{,}33$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $3{,}33 \notin (-\infty; 2{,}33)$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, las mejoras han surtido efecto.

17 Se sabe que la renta anual de los individuos de una localidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 1442 €. Se ha observado la renta anual de 16 individuos de esa localidad escogidos al azar, y se ha obtenido un valor medio de 9616 €. Contrasta, a un nivel de significación del 5%, si la media de la distribución es de 8715 €

a) ¿Cuáles son la hipótesis nulas y la hipótesis alternativa del contraste?

b) Determina la forma de la región crítica.

c) ¿Se acepta la hipótesis nula con el nivel de significación indicado?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	8715	1442	
Muestra	9616		16

Se desea contrastar que el salario es de 8715 €

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu = 8715$

H_1: $\mu \neq 8715$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{9616 - 8715}{\frac{1442}{\sqrt{16}}} = 2{,}50$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $2{,}50 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula. No se puede dar por bueno que el salario sea de 8715 €

18 Para una muestra de 450 jóvenes, 110 dicen que sus lecturas favoritas son cómics. Para un nivel de significación del 1,5%, ¿se puede aceptar la hipótesis de que es, al menos, igual a 0,25 la proporción de jóvenes para los que sus lecturas favoritas son cómics?

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,25	$\sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{450}}$	
Muestra	0,244		450

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $p \geq 0{,}25$

H_1: $p < 0{,}25$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}015 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}985 \Rightarrow z_{\alpha} = 2{,}17$

La región de aceptación es $(-2{,}17; +\infty)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0{,}244 - 0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{450}}} = -0{,}29$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-0{,}29 \in (-2{,}17, +\infty)$, se acepta la hipótesis nula. Es decir, se acepta que la proporción de jóvenes para los que sus lecturas favoritas son los cómics el al menos el 25 %

19 En un hospital se observó que los pacientes abusaban del servicio de urgencias, de forma que un 30 % de las consultas podían haber esperado a concertar una cita con el médico de cabecera, porque no eran realmente urgencias. Puesto que esta situación ralentizaba el servicio, se realizó una campaña intensiva de concienciación. Transcurridos unos meses se ha recogido información de 60 consultas al servicio, de las cuales solo 15 no eran realmente urgencias:

a) Hay personal del hospital que defiende que la campaña no ha mejorado la situación. Plantea un test para contrastar esta hipótesis frente a que sí la mejoró. Si se concluye que la situación no ha mejorado y realmente sí lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega en el test empleado en el apartado anterior, con un nivel de significación del 1 %?

Solución:

Como $\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,3	$\sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{60}}$	
Muestra	0,25		60

Se desea contrastar que al menos un 25 % está en desacuerdo.

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $p \geq 0{,}3$ y la situación no mejoró.

H_1: $p < 0{,}3$ y la situación mejoró.

Si se acepta la hipótesis nula, siendo falsa, se comete un error de tipo II

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -2{,}33$

La región de aceptación es $(-2{,}33; +\infty)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0{,}25 - 0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{60}}} = -0{,}85$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-0{,}85 \in (-2{,}33; +\infty)$, se acepta la hipótesis nula, que afirma que la situación no ha mejorado.

20 Un investigador afirma que las horas de vuelo de cierto tipo de aviones comerciales se distribuye normalmente con una media de 200 000 h y una desviación típica de 20 000 h. Para comprobar la veracidad de sus hipótesis, obtuvo una muestra aleatoria de 4 aviones fuera de servicio de distintas compañías aéreas y anotó el número de horas de vuelo de cada uno; resultaron los siguientes datos (en miles de horas):

150, 320, 270, 140

a) Plantea cuáles son la hipótesis nula y la hipótesis alternativa del contraste.

b) Realiza el contraste con un nivel de significación del 5 %

Solución:

La media de la muestra es: 200 000

	Media	D. típica	Tamaño
Población	200 000	200 000	
Muestra	220 000		4

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu = 200\,000$

H_1: $\mu \neq 200\,000$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{220\,000 - 20\,000}{\frac{20\,000}{\sqrt{4}}} = 2$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $2 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula. No se puede dar por bueno que el número de horas de vuelo sea 200 000

21 Según un informe de la universidad, la edad media de finalización de un determinado grado no supera los 23 años. Sabiendo que la edad de finalización sigue una distribución normal con desviación típica de 2 años y que una muestra aleatoria de 100 graduados dio una media de finalización de 24 años, ¿se puede aceptar, con un nivel de significación de 0,05, la afirmación de la universidad?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	23	2	
Muestra	24		100

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu \leq 0{,}23$

$H_1: \mu > 0{,}23$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 95\,\% = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645$

La región de aceptación es $(-\infty; 1{,}645)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{24 - 23}{\frac{2}{\sqrt{100}}} = 7{,}07$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $7{,}07 \notin (-\infty; 1{,}645)$ se rechaza la hipótesis nula con una probabilidad del 95 %. Se puede aceptar que la edad media de finalización supera los 23 años.

Problemas

22 Según un estudio realizado por una empresa hotelera durante un año, la distribución del tiempo de estancia de cada viajero fue normal con una media de 3,7 días y una desviación típica de 1,1 días. A lo largo del presente año, se analizó el tiempo de estancia de 49 viajeros elegidos al azar y se obtuvo una media de 3,5 días.

¿Se puede afirmar que esta diferencia es debida al azar con una confianza del 88 %?

Con el mismo nivel de confianza, ¿cambiaría la respuesta si esta media de 3,5 días se hubiera obtenido al analizar el tiempo de estancia de 100 viajeros elegidos al azar?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	3,7	1,1	
Muestra	3,5		49

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 3{,}7$

$H_1: \mu \neq 3{,}7$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}88 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}56$

La región de aceptación es $(-1{,}56; 1{,}56)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{3{,}5 - 3{,}7}{\frac{1{,}1}{\sqrt{49}}} = -1{,}27$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-1{,}27 \in (-1{,}56; 1{,}56)$, se acepta la hipótesis nula.

Si la muestra es de tamaño 100:

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 3{,}7$

$H_1: \mu \neq 3{,}7$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}88 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}56$

La región de aceptación es $(-1{,}56; 1{,}56)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{3{,}5 - 3{,}7}{\frac{1{,}1}{\sqrt{100}}} = -1{,}82$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-1{,}82 \notin (-1{,}56; 1{,}56)$, se rechaza la hipótesis nula.

23 Al lanzar en 5 000 ocasiones una moneda al aire salieron 3 000 caras. ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación del 0,05, que la moneda no está trucada?

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,5	0,007	
Muestra	0,6		5 000

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: p = 0{,}5$ y la moneda no está trucada.

$H_1: p \neq 0{,}5$ y la moneda está trucada.

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0{,}6 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{5\,000}}} = 14{,}14$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $14{,}14 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, la moneda está trucada.

24 El equipo directivo afirma que la media del recorrido que hacen los alumnos que asisten a un centro de bachillerato es, a lo sumo, igual a 2,5 km, con una desviación típica igual a 0,5 km. Se toma una muestra de 81 alumnos, y se obtiene un recorrido medio de 2,6 km

a) ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación igual a 0,05, la afirmación del equipo directivo?

b) ¿La respuesta del apartado anterior es la misma si el nivel de confianza es del 99%?

Solución:

a)

	Media	D. típica	Tamaño
Población	2,5	0,5	
Muestra	2,6		81

Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu \leq 2{,}5$ y el equipo directivo tiene razón.

H_1: $\mu > 2{,}5$ y el equipo directivo no tiene razón.

Si se acepta la hipótesis nula, siendo falsa, se comete un error de tipo II

Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

La región de aceptación es $(-\infty; 1{,}65)$

Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{2{,}6 - 2{,}5}{\frac{0{,}5}{\sqrt{81}}} = 1{,}8$$

Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1{,}8 \notin (-\infty; 1{,}65)$, se rechaza la hipótesis nula y el equipo directivo no tiene razón.

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

La región de aceptación es $(-\infty; 2{,}33)$

Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1{,}8 \in (-\infty; 2{,}33)$, se acepta la hipótesis nula y el equipo directivo tiene razón.

25 En una comunidad autónoma se estudia el número medio de hijos por mujer, a partir de los datos disponibles en cada municipio. Se supone que este número sigue una distribución normal con desviación típica igual a 0,08. El valor medio de estos datos para 36 municipios resulta ser igual a 1,17 hijos por mujer. Se desea contrastar, con un nivel de significación de 0,01, si en la comunidad el número medio de hijos por mujer es de 1,25

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	1,25	0,08	
Muestra	1,17		36

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu = 1{,}25$

H_1: $\mu \neq 1{,}25$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

La región de aceptación es $(-2{,}58; 2{,}58)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{1{,}17 - 1{,}25}{\frac{0{,}08}{\sqrt{36}}} = -6$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-6 \notin (-2{,}58; 2{,}58)$, se rechaza la hipótesis nula.

26 Un establecimiento vende paquetes de carbón para barbacoa, con un peso teórico de 10 kg. Se supone que el peso de los paquetes sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kg. Para contrastar la citada hipótesis, frente a que el peso teórico sea distinto de 10 kg, se escogen al azar 4 paquetes que pesan en kilos, respectivamente, 8, 10, 9, 8

Se desea que la probabilidad de aceptar la hipótesis nula, cuando ésta es cierta, sea 0,95. Se pide:

a) La región crítica del contraste.

b) ¿Se debe rechazar la hipótesis nula?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	10	1	
Muestra	8,75		4

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu = 10$

H_1: $\mu \neq 10$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{8{,}75 - 10}{\frac{1}{\sqrt{4}}} = -2{,}5$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-2{,}5 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula.

27 En las últimas elecciones celebradas, el 52% de los votantes de una ciudad estaba a favor del alcalde. Una encuesta realizada recientemente indica que, de 350 ciudadanos elegidos al azar, 196 están a favor del alcalde:

a) ¿Se puede afirmar, con un nivel de confianza del 90%, que el alcalde gana popularidad?

b) ¿Se obtiene la misma respuesta que en el apartado anterior si el nivel de confianza es igual a 0,99?

Solución:

Como $\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

	Proporción	D. típica	Tamaño
Población	0,52	$\sqrt{\frac{0,52 \cdot 0,48}{350}}$	
Muestra	0,56		350

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: p \geq 0,52$

$H_1: p < 0,52$

Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -1,28$

La región de aceptación es $(-1,28; +\infty)$

Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0,56 - 0,52}{\sqrt{\frac{0,52 \cdot 0,48}{350}}} = 1,5$$

Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1,5 \in (-1,28; +\infty)$, se acepta la hipótesis nula. El alcalde gana popularidad.

b) Si el intervalo es más amplio, también se aceptará la hipótesis nula.

Efectivamente, si se calcula la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -2,33$

La región de aceptación es $(-2,33; +\infty)$

El valor del estadístico $1,5 \in (-2,33; +\infty)$

28 Un fabricante de bombillas asegura que su duración, en miles de horas, sigue una normal de 26 h de media y 5 h de desviación típica. Para una muestra de 10 bombillas de este fabricante, se obtuvieron las siguientes duraciones:

23,5	35	29,5	31	23
33,5	27	28	30,5	29

Se desea contrastar, con un nivel de significación del 5 %, si estos datos son compatibles con el valor medio afirmado por el fabricante.

a) Plantea el contraste.

b) Halla la región crítica.

c) ¿Qué se puede concluir?

Solución:

La media de la muestra es: 29

	Media	D. típica	Tamaño
Población	26	5	
Muestra	29		10

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 26$

$H_1: \mu \neq 26$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

La región de aceptación es $(-1,96; 1,96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{29 - 26}{\frac{5}{\sqrt{10}}} = 1,90$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $1,90 \in (-1,96; 1,96)$, se acepta la hipótesis nula. Los datos son compatibles con lo que dice el fabricante.

Para profundizar

29 La conclusión de un contraste de hipótesis realizado con un nivel de significación igual a 0,1 ha sido «aceptar la hipótesis nula H_0». ¿Cuál habría sido la conclusión para un nivel de significación igual a 0,05?

Solución:

La conclusión sería seguir aceptando la hipótesis nula, puesto que con el nivel de significación del 0,05, la región de aceptación aumenta y, por tanto, el estadístico seguirá estando en dicha región.

30 A partir de los datos recogidos sobre una muestra aleatoria de 121 pequeñas y medianas empresas de una región, se ha calculado para el último año un beneficio medio de 89 millones de euros, con una cuasivarianza de 30,25 €

Contesta justificando las respuestas:

a) ¿Se podría rechazar, con un nivel de significación de 0,001, la afirmación de que los beneficios medios en la pequeña y mediana empresa de dicha región son de 90 millones de euros?

b) ¿Qué ocurriría para el nivel de significación 0,05?

Solución:

Sea la cuasivarianza = s^2

La varianza = σ^2

Se tiene: $s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2$

Luego,

$30,25 = \frac{121}{120}\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = 30 \Rightarrow \sigma = 5,48$

	Media	D. típica	Tamaño
Población	90	5,48	
Muestra	89		121

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 90$

$H_1: \mu \neq 90$

Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}001 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}999 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 3{,}291$

La región de aceptación es $(-3{,}291; 3{,}291)$

Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{89 - 90}{\frac{5{,}48}{\sqrt{121}}} = -2$$

Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $-2 \in (-3{,}291; 3{,}291)$, se acepta la hipótesis nula.

b) Si $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

El valor del estadístico $-2 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$

Se rechaza la hipótesis nula.

31 Un fabricante garantiza a un laboratorio farmacéutico que sus máquinas producen comprimidos con un diámetro medio de 25 mm. Una muestra de 100 comprimidos dio, como media de los diámetros, 25,18 mm. Suponiendo que el diámetro de los comprimidos es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,89 mm, se desea contrastar, con un nivel de significación del 5%, si el diámetro medio que afirma el fabricante es correcto. Para ello:

a) Plantea la hipótesis nula y la hipótesis alternativa del contraste.

b) Realiza el contraste al nivel de significación indicado.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Población	25	0,89	
Muestra	25,18		100

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 25$

$H_1: \mu \neq 25$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{25{,}18 - 25}{\frac{0{,}89}{\sqrt{100}}} = 2{,}02$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $2{,}02 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula.

32 En diferentes países de la Unión Europea se ha llevado a cabo un estudio del porcentaje de la población que accede a la enseñanza superior. En los países escogidos se han obtenido los valores siguientes (medidos en tanto por ciento):

23,5	35	29,5	31	23
33,5	27	28	30,5	

Se supone que estos porcentajes siguen una distribución normal con desviación típica igual al 5%. Se desea contrastar, con un nivel de significación del 5%, si los datos anteriores son compatibles con un valor medio del porcentaje de la población que cursa estudios superiores igual al 28%

a) Plantea en el contraste cuáles son la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.

b) Determina la región crítica del contraste.

c) ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

Solución:

La media de la muestra es: 29

	Media	D. típica	Tamaño
Población	28	5	
Muestra	29		9

a) Se definen las hipótesis nula y alternativa:

$H_0: \mu = 28$

$H_1: \mu \neq 28$

b) Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{29 - 28}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = 0{,}6$$

d) Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

Como $0{,}6 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula.

Practica

35 El salario medio correspondiente a una muestra de 1 600 personas de cierta población es de 565 €. Se sabe que la desviación típica de los salarios en la población es de 120 €

¿Se puede afirmar, con un nivel de significación del 5 %, que el salario medio de dicha población es de 570 €?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste de la media bilateral			
2		μ	σ	Tamaño
3	Población	570	120	
4	Muestra	565		1600
5	Hipótesis			
6	H0	$\mu = \mu 0$		
7	Región de aceptación			
8	Nivel de significación	0,05		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,95		
10	P(– k < z < k) = 1 – α	0,98		
11	Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	1,96		
12	Región de aceptación	-1,96	1,96	
13	Estadístico			
14	z	-1,67		
15	Decisión			
16	¿Se acepta H0?	Se acepta H0		

36 Se desea contrastar si el grado de satisfacción de los usuarios de los servicios públicos de salud supera los 6 puntos en una escala de 0 a 10. Se ha tomado una muestra de 100 usuarios y se ha obtenido una valoración media de 5,5 puntos y una desviación típica de 3 puntos. ¿Se puede afirmar, con un nivel de confianza del 99 %, que la media del grado de satisfacción supera los 6 puntos?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste unilateral para la media			
2		μ	σ	Tamaño
3	Población	6	3	
4	Muestra	5,5		100
5	Hipótesis			
6	H0	$\mu > \mu 0$		
7	Región de aceptación			
8	Nivel de significación	0,01		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,99		
10	P(– k < z < k) = 1 – α	0,990		
11	Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	2,33		
12	Región de aceptación	-2,33	∞	
13	Estadístico			
14	z	-1,67		
15	Decisión			
16	¿Se acepta H0?	Se acepta H0		

37 Un laboratorio desea estudiar el porcentaje de personas que tienen somnolencia como efecto secundario al tomar un medicamento. Se ha realizado un estudio con una muestra de 120 individuos y se ha obtenido que el 15 % ha tenido dichos efectos secundarios. El laboratorio desea afirmar que solo un 10 % de pacientes tienen dichos efectos. ¿Pueden hacer tal afirmación con un nivel de significación del 1 %?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste de la proporción bilateral			
2		Proporción p	σ	Tamaño
3	Población	0,10	0,02739	
4	Muestra	0,15		120
5	Hipótesis			
6	H0	$\mu = \mu 0$		
7	Región de aceptación			
8	Nivel de significación	0,01		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,99		
10	P(– k < z < k) = 1 – α	0,995		
11	Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	2,58		
12	Región de aceptación	-2,58	2,58	
13	Estadístico			
14	z	1,83		
15	Decisión			
16	¿Se acepta H0?	Se acepta H0		

38 Un profesor afirma que el porcentaje de alumnos de bachillerato de su centro que fuma no sobrepasa el 15 %. Si en una muestra de 60 de esos alumnos se observó que 12 fumaban:

a) ¿Es aceptable la afirmación del profesor con un nivel de significación de 0,01?

b) ¿La afirmación del apartado anterior es la misma si el nivel de confianza es del 90 %?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste unilateral para la proporción			
2		Proporción p	σ	Tamaño
3	Población	0,15	0,04610	
4	Muestra	0,2		60
5	Hipótesis			
6	H0	p < p0		
7	Región de aceptación			
8	Nivel de significación	0,01		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,99		
10	P(z ≤ k) = 1 – α	0,990		
11	Valor crítico: z_{α}	2,33		
12	Región de aceptación	– ∞	2,33	
13	Estadístico			
14	z	1,08		
15	Decisión			
16	¿Se acepta H0?	Se rechaza H0		

	A	B	C	D
1	Contraste unilateral para la proporción			
2		Proporción p	σ	Tamaño
3	Población	0,15	0,04610	
4	Muestra	0,2		60
5	Hipótesis			
6	H0	p < p0		
7	Región de aceptación			
8	Nivel de significación	0,1		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,90		
10	P(z ≤ k) = 1 – α	0,90		
11	Valor crítico: z_{α}	1,28		
12	Región de aceptación	– ∞	1,28	
13	Estadístico			
14	z	1,08		
15	Decisión			
16	¿Se acepta H0?	Se acepta H0		

Ponte a prueba

1 Se juntan tres clases A, B y C, con el mismo número de alumnos, en el salón de actos de un centro. Se sabe que el 10% de los alumnos en la clase A son zurdos; en la clase B el 8% son zurdos, y en la clase C el 88% de los alumnos no son zurdos.

a) Si elegimos al azar un alumno del salón de actos, ¿con qué probabilidad no será zurdo?

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar es zurdo, ¿cual es la probabilidad de que pertenezca a la clase C?

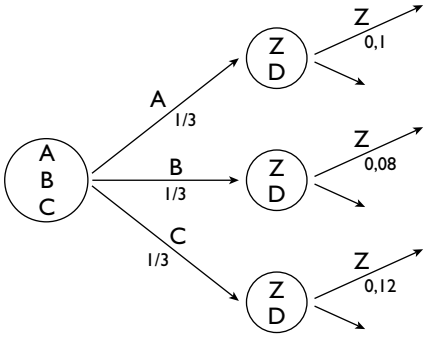
Solución:

A, B y C las clases.

Z = Zurdo.

D = Diestro.

Diagrama en árbol:



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total y luego la del contrario:

$P(Z) = P(A) \cdot P(Z/A) + P(B) \cdot P(Z/B) + P(C) \cdot P(Z/C) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}08 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}12 = 0{,}1$

$P(\overline{Z}) = 1 - P(Z) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 = 90\%$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(C/Z) = \frac{P(C) \cdot P(Z/C)}{P(Z)} = \frac{1/3 \cdot 0{,}12}{0{,}1} = 0{,}4$$

2 Una empresa de electrodomésticos cuenta con cuatro fábricas, A, B, C y D, en las que se producen neveras. La fábrica A produce el 30% del total de neveras; la fábrica B, el 20%; la C, el 40%; y la D, el 10%. El porcentaje de neveras defectuosas en cada fábrica es del 2% en A, del 5% en B, del 4% en C y del 1% en D

Calcula:

a) La probabilidad de que escogida una nevera al azar, ésta sea defectuosa.

b) La probabilidad de que una nevera sea defectuosa y proceda de la fábrica B.

c) Si una nevera no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica D?

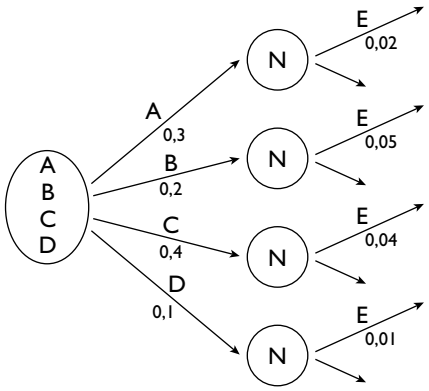
Solución:

Fábricas: A, B, C y D

N = Neveras.

E = Nevera defectuosa.

Diagrama en árbol:



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$P(E) = P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) +$
$+ P(D) \cdot P(E/D) = 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}04 +$
$+ 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}033$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$P(B \cap E) = P(B) \cdot P(E/B) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}01$

c) Se aplica el teorema de Bayes y la propiedad del contrario:

$$P(D/\overline{E}) = \frac{P(D) \cdot P(\overline{E}/D)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}99}{1 - 0{,}033} = 0{,}1$$

3 En una determinada población se sabe que el valor de la tasa diaria de consumo de calorías sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 400$ calorías.

a) Si la media de la población es $\mu = 1600$ calorías y se elige una muestra aleatoria de 100 personas de esa población, determina la probabilidad de que el consumo medio diario de calorías en esa muestra esté comprendido entre 1 550 y 1 660 calorías.

b) Si desconocemos la media μ y con el mismo tamaño de la muestra se afirma que «el consumo medio diario en esa población toma valores entre 1 530 y 1 670 calorías», ¿con qué nivel de confianza se hace esta afirmación?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = consumo medio de calorías

$$\overline{X} \equiv N\left(1\,600, \frac{400}{\sqrt{100}}\right) \equiv N(1\,600, 40)$$

$P(1\,550 \le x \le 1\,660)$

$P(1\,550 \le x \le 1\,660) =$

$$= P\left(\frac{1\,550 - 1\,600}{40} \le z \le \frac{1\,660 - 1\,600}{40}\right) =$$

$= P(-1{,}25 \le z \le 1{,}5) =$

$= P\,(z \le 1{,}5) - P(z \le -1{,}25) =$

$= P(z \le 1{,}5) + P(z \le 1{,}25) - 1 =$

$= 0{,}9332 + 0{,}8944 - 1 = 0{,}8275$

b) $\bar{x} = \dfrac{1\,530 + 1\,670}{2} = 1\,600$

$1\,600 + z_{\alpha/2} \cdot 40 = 1\,670 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}75$

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$P(-1{,}75 \leq z \leq 1{,}75) = 2P(z \leq 1{,}75) - 1 =$

$= 2 \cdot 0{,}9599 - 1 = 0{,}9198$

4 En una granja avícola se ha tomado una muestra aleatoria de 200 polluelos de pato, entre los cuales se encontraron 120 hembras.

a) Halla un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la proporción de hembras entre estos polluelos.

b) Razona, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0,5.

Solución:

a) Se tiene: $\hat{p} = \dfrac{120}{200} = 0{,}6$; y $\hat{q} = 0{,}4$

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}98 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

El intervalo es:

$$\left(0{,}6 - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{200}}, 0{,}6 + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{200}}\right) =$$

$= (0{,}519; 0{,}681) = (0{,}52; 0{,}68)$

La proporción estará entre el 52% y el 68% con una probabilidad del 98%

b) No puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0,5 con este nivel de confianza.

5 Se tienen dos urnas A y B. En la primera hay dos bolas blancas, 3 negras y una roja, y en la segunda hay 3 bolas blancas, 1 negra y una verde.

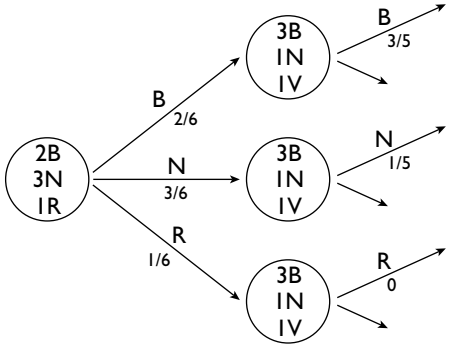
a) Se extrae una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

b) Se lanza una moneda. Si se obtiene cara, se extraen dos bolas de la urna A, y si se obtiene cruz, se sacan dos bolas de la urna B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean blancas.

Solución:

a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

Diagrama en árbol:

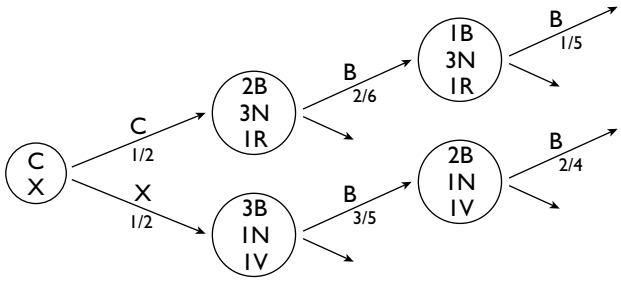


P(Mismo color) = P(B) · P(B/B) + P(N) · P(N/N) =

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

Diagrama en árbol:



$P(B) = P(C) \cdot P(B/C) \cdot P(B/C \cap B) + P(X) \cdot P(B/X) \cdot \cdot P(B/X \cap B) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{30} + \frac{3}{20} = \frac{11}{60}$$

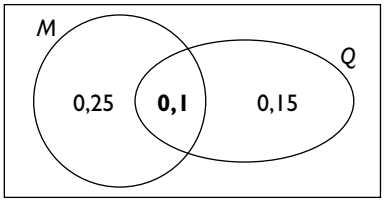
6 En una cierta Facultad se sabe que el 25% de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15% suspenden química y el 10% suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.

a) Calcula la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.

b) Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?

Solución:

M = Suspenden matemáticas. Q = Suspenden química.



a) Se aplica la probabilidad del contrario.

$P(\overline{M \cup Q}) = 1 - P(M \cup Q) = 1 - (0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}1) =$

$= 0{,}7 = 70\%$

b) Se aplica la definición de probabilidad condicionada.

$$P(M/Q) = \frac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}67 = 67\%$$

7 Tras múltiples observaciones se ha constatado que el número de pulsaciones de los deportistas entre 20 y 25 años se distribuye normalmente con una desviación típica de 9 pulsaciones. Si una muestra de 100 deportistas de esa edad presenta una media de 64 pulsaciones:

a) Encuentra el intervalo de confianza al 97% para la media de pulsaciones de todos los deportistas de esa edad.

b) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

Solución:

a) $\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}97 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$

El intervalo es:

$$\left(64 - 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}, 64 + 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}\right) = (62{,}05;\ 65{,}95)$$

b) La proporción estará entre el 62,05% y el 65,95% con una probabilidad del 97%

8 El peso de los usuarios de un gimnasio tiene una media desconocida y una desviación típica $\sigma = 5{,}4$ kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 usuarios y obtenemos una media de 60 kg.

a) Calcula, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo de confianza para el peso medio de todos los usuarios.

b) Se realiza la siguiente afirmación: «El peso medio de un usuario de ese gimnasio está comprendido entre 58,5 y 61,5 kg». ¿Con qué probabilidad esta afirmación es correcta?

Solución:

a) $\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo es:

$$\left(60 - 1{,}96 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}}, 60 + 1{,}96 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}}\right) = (58{,}94;\ 61{,}06)$$

b) $\overline{x} = \frac{58{,}5 + 61{,}5}{2} = 60$

$$60 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}} = 61{,}5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}77$$

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$P(-2{,}77 \leq z \leq 2{,}77) = 2P(z \leq 2{,}78) - 1 =$
$= 2 \cdot 0{,}9972 - 1 = 0{,}9944$

El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0{,}9944$

9 Un directivo de cierta empresa de material eléctrico afirma que la vida media de cierto tipo de bombillas es de 1 500 horas. Otro directivo de la misma empresa afirma que la vida media de dichas bombillas es igual o menor de 1 500 horas. Elegida una muestra aleatoria simple de 81 bombillas de dicho tipo, vemos que su vida media ha sido de 1 450 horas. Suponiendo que la vida de las bombillas sigue una distribución normal con desviación típica igual a 180 horas:

a) ¿es compatible la hipótesis H_0: $\mu = 1\,500$, frente a la hipótesis H_1: $\mu \neq 1\,500$, con una confianza del 99%, con el resultado experimental $\overline{x} = 1\,450$?

b) ¿Es compatible la hipótesis H_0: $\mu = 1\,500$, frente a la hipótesis H_1: $\mu < 1\,500$, con una confianza del 99%, con el resultado experimental $\overline{x} = 1\,450$?

Solución:

a)

	Media	D. típica	Tamaño
Población	1 500	180	
Muestra	1 450		81

- Se definen las hipótesis nula y alternativa:

  H_0: $\mu = 1\,500$

  H_1: $\mu \neq 1\,500$

- Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

  $1 - \alpha = 99\% = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

  La región de aceptación es $(-2{,}58;\ 2{,}58)$

- Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0,\ 1) \Rightarrow z = \frac{1\,450 - 1\,500}{\frac{180}{\sqrt{81}}} = -2{,}5$$

- Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

  Como $-2{,}5 \in (-2{,}58;\ 2{,}58)$, se acepta la hipótesis nula con una probabilidad del 99%

b)
- Se definen las hipótesis nula y alternativa:

  H_0: $\mu = 1\,500$

  H_1: $\mu < 1\,500$

- Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

  $1 - \alpha = 99\% = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}325 = 2{,}33$

  La región de aceptación es $(-2{,}33;\ +\infty)$

- Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0,\ 1) \Rightarrow z = \frac{1\,450 - 1\,500}{\frac{180}{\sqrt{81}}} = -2{,}5$$

- Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:

  Como $-2{,}5 \notin (-2{,}33;\ +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula con una probabilidad del 99%

Notas