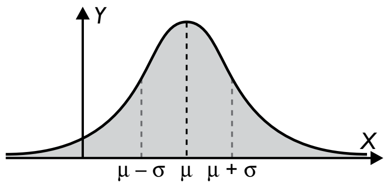
Unidad 12.
Inferencia estadística. Estimación por intervalos

1. La distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Piensa y calcula

En el dibujo de la gráfica, el área comprendida entre el eje X y la curva es 1. Calcula mentalmente cuánto vale el área que queda a la izquierda de la recta $x = \mu$



Solución:
Área = 0,5

Aplica la teoría

1 Calcula en una $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

a) $P(z \le 1{,}38)$

b) $P(z \ge 2{,}1)$

c) $P(z \le -1{,}46)$

d) $P(1{,}2 \le z \le 2)$

e) $P(-2{,}1 \le z \le 3{,}2)$

f) $P(-2{,}4 \le z \le 2{,}4)$

Solución:

a) $P(z \le 1{,}38) = 0{,}9162$

b) $P(z > 2{,}1) = 1 - P(z < 2{,}1) = 0{,}0179$

c) $P(z \le -1{,}46) = P(z \ge 1{,}46) = 1 - P(z \le 1{,}46) = 0{,}0721$

d) $P(1{,}2 \le z \le 2) = P(z \le 2) - P(z \le 1{,}2) = 0{,}0923$

e) $P(-2{,}1 \le z \le 3{,}2) = P(z \le 3{,}2) - P(z \le -2{,}1) =$
$= P(z \le 3{,}2) - 1 + P(z \le 2{,}1) = 0{,}9814$

f) $P(-2{,}4 \le z \le 2{,}4) = P(z \le 2{,}4) - P(z \le -2{,}4) =$
$= 2P(z \le 2{,}4) - 1 = 0{,}9836$

2 Calcula el valor de k en los siguientes casos:

a) $P(z \le k) = 0{,}9871$

b) $P(z \ge k) = 0{,}1685$

Solución:

a) $k = 2{,}23$

b) $k = 0{,}9601$

3 Calcula en una $N(10, 2)$ las siguientes probabilidades:

a) $P(x \le 8)$

b) $P(x \ge 11)$

c) $P(9 \le x \le 10)$

d) $P(-9 \le x \le 9)$

Solución:

a) $P\left(z \le \frac{8-10}{2}\right) = P(z \le -1) = 1 - P(z \le 1) = 0{,}1587$

b) $P\left(z \ge \frac{11-10}{2}\right) = P(z \ge 0{,}5) = 1 - P(z \le 0{,}5) = 0{,}3085$

c) $P\left(\frac{9-10}{2} \le z \le \frac{10-10}{2}\right) = P(-0{,}5 \le z \le 0) =$
$= P(z \le 0) - P(z \le -0{,}5) = 0{,}1915$

d) $P\left(\frac{-9-10}{2} \le z \le \frac{9-10}{2}\right) = P(-9{,}5 \le z \le -0{,}5) =$
$= P(z \le -0{,}5) - P(z \le -9{,}5) =$
$= 1 - P(z \le 0{,}5) - 1 + P(z \le 9{,}5) = 0{,}3085$

4 Calcula el intervalo característico en una $N(0, 1)$ correspondiente a la probabilidad de 0,9

Solución:
$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}9$
$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0{,}9$
$P(z \le z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0{,}90}{2} = 0{,}95$
$z_{\alpha/2} = 1{,}65$

2. Muestreo

Piensa y calcula

Analiza la ficha técnica y contesta:

Ficha técnica:
- **Ámbito:** nacional.
- **Universo:** individuos mayores de 18 años.
- **Muestra:** 2 001 individuos.
- **Muestreo:** estratificado por comunidades autónomas y tamaño de hábitat.
- **Selección de informantes:** aleatoria del hogar y conforme a cuotas de sexo y edad para la determinación de los individuos.
- **Entrevista:** telefónica sobre cuestionario estructurado.
- **Trabajo de campo:** del 22 de mayo al 5 de junio de 2016
- **Margen de error:** ±2,2 %
- **Nivel de confianza:** 95,5 %

a) ¿Cuál es la población?
b) ¿Cuántos individuos hay en la muestra?
c) Explica cómo se ha seleccionado la muestra.
d) ¿Qué significa el margen de error?

Solución:
a) Todos los mayores de 18 años que viven en España.
b) 2001 individuos.
c) De cada comunidad autónoma se ha seleccionado aleatoriamente un número de individuos proporcional al número de habitantes de la misma.
d) Que los resultados pueden ser erróneos en un 2,2 % por exceso o por defecto.

Aplica la teoría

5 En una fábrica que envasa 2 000 latas de caballa diarias se desea obtener una muestra de 100 latas. Explica cómo seleccionar la muestra:

a) Con muestreo aleatorio simple.
b) Con muestreo aleatorio sistemático.

Solución:
a) Se eligen al azar las 100 latas. Se puede obtener una lista de 100 números aleatorios y seleccionar las latas correspondientes.
b) Se elige una lata aleatoriamente y se va eligiendo una de cada 20 latas, por ejemplo, hasta completar las 100 de la muestra.

6 Se quiere obtener una muestra de 5 alumnos de 2.º de bachillerato por muestreo aleatorio simple. Si hay 30 alumnos y estos se han numerado del 1 al 30, obtén con la calculadora seis números aleatorios que formen la muestra.

Solución:
27, 9, 20, 25 y 11. (La solución es abierta).

7 En un almacén se dispone de 60 000 paquetes de detergente de cuatro tipos distintos según la tabla siguiente:

Detergente	A	B	C	D
N.º de paquetes	18 000	20 000	10 000	12 000

Se desea extraer una muestra de 120 paquetes. Calcula el número de paquetes que hay que tomar de cada clase para realizar un muestreo aleatorio estratificado proporcional.

Solución:

60 000 : 120 = 500

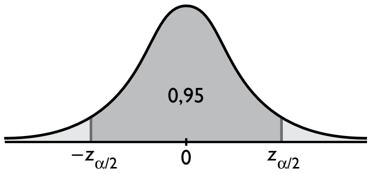
Hay que tomar, de cada 500 paquetes, uno.

Detergente	A	B	C	D	Total
Paquetes	18 000	20 000	10 000	12 000	60 000
Muestra	36	40	20	24	120

3. Estimación de la media por intervalos de confianza

Piensa y calcula

Sea $z \equiv N(0, 1)$. Utiliza la tabla del anexo y calcula el valor de $z_{\alpha/2}$ tal que $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$



Solución:

$P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0,95$

$P(z < z_{\alpha/2}) = \dfrac{1 + 0,95}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Aplica la teoría

8 Una empresa de transporte sabe que el peso medio de los paquetes que transporta es de 20 kg, con una desviación típica de 5 kg. Si en uno de sus transportes lleva 50 paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio sea mayor de 22 kg?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

b) $n = 50 \geq 30 \Rightarrow \mu = 20, \sigma = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = 0,71 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X} \equiv N(20; 0,71)$

c) $P(\overline{X} > 22) = P\left(z > \dfrac{22 - 20}{0,71}\right) = P(z > 2,82) =$

$= 1 - P(z < 2,82) = 0,0024$

9 El tiempo que permanece cada paciente en la consulta de cierto médico es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 minutos. Se ha tomado una muestra de 256 pacientes de este médico, y se ha encontrado que su tiempo medio de consulta ha sido de 10 minutos. Calcula el intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el tiempo medio de consulta que se deduce de la muestra.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

b) El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(10 - 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}}, 10 + 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}}\right) =$$

$= (9,51; 10,49)$

Se tiene que $\mu \in (9,51; 10,49)$ con una probabilidad del 95%

10 Las ventas mensuales en una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal con desviación típica de 540 €. Se ha realizado un estudio en los últimos nueve meses, y se ha hallado el intervalo de confianza (2802, 3508)

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en esos nueve meses?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

Solución:

a) $\overline{X} = \dfrac{2802 + 3508}{2} = 3155$

b) $\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2802$

$3155 - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{540}{\sqrt{9}} = 2802$

$z_{\alpha/2} = 1,96$

$P(-1,96 < z < 1,96) = 0,95$

$1 - \alpha = 0,95$

11 Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es de 100. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95% de que el error de la duración media que se calcule sea menor de 10 h

Solución:

Como $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E}\right)^2$

$n = \left(1,96 \cdot \dfrac{100}{10}\right)^2 = 384,16$

Se debe tomar una muestra de 385 bombillas.

4. Estimación de la proporción por intervalos de confianza

Piensa y calcula

Se ha realizado una estimación de la proporción de jóvenes que leen el periódico diariamente con un nivel de confianza del 95 % y se ha obtenido que dicha proporción está en el intervalo (71, 75). Calcula cuál es el error máximo que se puede cometer con el nivel de confianza del 95 % en esta estimación.

Solución:

El error máximo es:

$$\frac{75-71}{2} = 2 \text{ jóvenes}$$

Aplica la teoría

12 En unas elecciones, uno de los candidatos obtuvo el 46 % de los votos. Calcula la probabilidad de que en una muestra elegida al azar de 200 votantes saliera un porcentaje a su favor igual o superior al 50 %

Solución:

Variable: $\hat{p}$ = proporciones muestrales.

$$n = 200 \geq 30 \Rightarrow p = 0{,}46 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0{,}46 \cdot 0{,}54}{200}} = 0{,}035$$

$$P(\hat{p} \geq 0{,}5) = P\left(z \geq \frac{0{,}5-0{,}46}{0{,}035}\right) = 1 - P(z \leq 1{,}14) =$$

$$= 0{,}1271$$

13 En una muestra aleatoria de 400 personas que han visto un programa de televisión, 100 personas reconocieron que este les había gustado. Determina el intervalo de confianza, al 95 %, para la proporción de personas en la población a las que les gusta el programa.

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $\hat{p} = \dfrac{100}{400} = 0{,}25$; y $\hat{q} = 0{,}75$

b) El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}25 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{400}}; 0{,}25 + \right.$$

$$\left. + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{400}}\right) = (0{,}21; 0{,}29)$$

La proporción estará entre el 21 % y el 29 % con una probabilidad del 95 %

14 En una muestra de 100 pacientes sometidos a un cierto tratamiento, se obtiene mejoría en 80 pacientes. Si se trabaja con un nivel de confianza del 95 %:

a) ¿Cuál es el error máximo admisible?

b) ¿Cuál es el mínimo número de pacientes que se debe tomar si con el nivel de confianza dado se desea que el error sea menor de 0,05?

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$E = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{100}} = 0{,}08$$

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}05^2} = 245{,}86$$

Se debe tomar una muestra de 246 pacientes.

Ejercicios y problemas

Preguntas tipo test

1 Se supone que la calificación en Matemáticas obtenida por los alumnos de una cierta clase es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10 y se obtiene una suma de sus calificaciones igual a 59,5 puntos. Determina un intervalo de confianza al 95 % para la calificación media de la clase.

❑ (58,57; 60,43) ☒ (5,02; 6,88)
❑ (5,92; 5,98) ❑ (5, 6)

2 En el enunciado del problema anterior, ¿qué tamaño ha de tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 puntos, con un nivel de confianza del 95 %?

☒ 35 ❑ 34
❑ 6 ❑ 31

3 La duración de la vida de una determinada especie de tortuga se supone que es una variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen las siguientes duraciones, en años:

46; 38; 59; 29; 34; 32; 38; 21; 44; 34

Determina un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de dicha especie de tortugas.

❑ (37,30; 37,70) ❑ (30, 40)
❑ (27,5; 47,5) ☒ (31,30; 43,70)

4 En el enunciado del problema anterior, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra observada para que el error de la estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 90 %?

❑ 15 ❑ 16
☒ 11 ❑ 10

5 La longitud de los cables de los auriculares que fabrica una empresa es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 4,5 cm. Para estimar la longitud media se han medido los cables de una muestra aleatoria de 9 auriculares y se han obtenido las siguientes longitudes, en cm:

205, 198, 202, 204, 197, 195, 196, 201, 202

Halla un intervalo de confianza, al 97 %, para la longitud media de los cables.

❑ (100; 300) ❑ (195,5; 204,5)
☒ (196,74; 203,26) ❑ (199,94; 200,06)

6 En el enunciado anterior, determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estos auriculares para que el error de estimación de la longitud media sea inferior a 1 cm, con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

❑ 90 ❑ 10
☒ 96 ❑ 95

7 Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4,8. Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

☒ 0,7977 ❑ 0,2023
❑ 0,5825 ❑ 0,9661

8 En el enunciado anterior, ¿qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

❑ 50 % ❑ 70,23 %
❑ 29,77 % ☒ 48,14 %

9 Para efectuar un control de calidad sobre la duración en horas de un modelo de juguetes electrónicos se elige una muestra aleatoria de 36 juguetes de ese modelo, y se obtiene una duración media de 97 horas. Sabiendo que la duración de los juguetes electrónicos de ese modelo se distribuye normalmente con una desviación típica de 10 horas, encuentra el intervalo de confianza al 99,2 % para la duración media de los juguetes electrónicos de ese modelo.

❑ (94,08; 99,92) ☒ (92,58; 101,42)
❑ (92,71; 101,29) ❑ (87; 107)

10 La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98 %, se obtiene el intervalo (388,68; 407,32) para la vida media. Calcula la media y el tamaño de la muestra elegida.

☒ $\bar{x}$ = 398 días y n = 225 bombillas.

❑ $\bar{x}$ = 398 días y n = 15 bombillas.

❑ $\bar{x}$ = 398 días y n = 275 bombillas.

❑ No se puede determinar.

Ejercicios y problemas propuestos

1. La distribución normal $N(\mu, \sigma)$

15 Calcula el intervalo característico en una $N(0, 1)$ correspondiente a la probabilidad de 0,99

Solución:

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}99$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0{,}99$

$P(z \le z_{\alpha/2}) = \dfrac{1 + 0{,}99}{2} = 0{,}995$

$z_{\alpha/2} = 2{,}576 = 2{,}58$

16 Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media de los televisores siga una distribución normal:

a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años.

Solución:

a) $x \equiv$ duración media.

$N(10; 0{,}7)$

$P(x > 9)$

$P(x > 9) = P\left(z > \dfrac{9 - 10}{0{,}7}\right) = P(z > -1{,}43) =$

$= P(z < 1{,}43) = 0{,}9236$

b) $P(9 < x < 11) = P\left(\dfrac{9 - 10}{0{,}7} < z < \dfrac{11 - 10}{0{,}7}\right) =$

$= P(-1{,}43 < z < 1{,}43) = 2P(z < 1{,}43) - 1 = 0{,}8472$

17 La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y una desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un periodo de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?

Solución:

a) $x \equiv$ duración del motor.

b) $N(10; 2)$

$P(x < 13)$

$P(x < 13) = P\left(z < \dfrac{13 - 10}{2}\right) = P(z < 1{,}5) = 0{,}9332$

El 93,32 % de los motores tendrán una duración inferior a 13 años, y por tanto, no cumplirían la garantía.

2. Muestreo

18 Se desea elegir por muestreo aleatorio simple una muestra de 8 vecinos de una comunidad de 60 personas. Si se han numerado las 60 personas del 1 al 60, utiliza la calculadora para generar la muestra.

Solución:

47, 35, 60, 43, 10, 18, 37 y 49

(La solución es abierta).

19 En cierta localidad hay 500 empresas dedicadas a la alimentación, distribuidas, según el número de empleados, de la siguiente forma:

N.º de empleados	N.º de empresas
Menor que 20	300
Entre 20 y 50	150
Más de 50	50

Se desea extraer una muestra de 20 empresas. Calcula el número de ellas que hay que tomar de cada clase para realizar un muestreo aleatorio estratificado proporcional.

Solución:

500 : 20 = 25

De cada 25, se toman uno.

N.º empleados	N.º de empresas	Muestra
Menor que 20	300	12
Entre 20 y 50	150	6
Más de 50	50	2
Total	500	20

20 En un barrio se quiere hacer un estudio para conocer el tipo de actividades de ocio que más gustan a sus habitantes. Para ello, van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar.

a) Explica qué procedimiento de selección sería más adecuado: muestreo con reposición o sin reposición.

b) Como los gustos cambian con la edad, y se sabe que en el barrio viven 2 500 niños, 7 000 adultos y 500 ancianos, posteriormente se decide elegir la muestra anterior utilizando muestreo estratificado proporcional.

b1) Define los estratos.

b2) Determina el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

Solución:

a) Es aconsejable elegir la muestra sin reemplazamiento, para evitar que la opinión de una persona se tenga en cuenta más de una vez.

b1) Se deben considerar los estratos formados por niños, adultos y ancianos.

b2) 10 000 : 100 = 100

De cada 100, se elige uno.

Estratos	Niños	Adultos	Ancianos	Total
Individuos	2 500	7 000	500	10 000
Muestra	25	70	5	100

3. Estimación de la media por intervalos de confianza

21 Una variable aleatoria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se extraen muestras aleatorias simples de tamaño *n*

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral?

b) Si se toman muestras de tamaño 4 de una variable aleatoria *x* con distribución $N(165, 12)$, calcula $P(\overline{X} > 173{,}7)$

Solución:

a) $\overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

$n = 4 < 30$ pero la distribución es normal; luego:

$$\mu = 165, \sigma = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(165; 6)$$

$$P(\overline{X} > 173{,}7) = P\left(z > \frac{173{,}7 - 165}{6}\right) = P(z > 1{,}45) =$$

$$= 1 - P(z < 1{,}45) = 0{,}0735$$

22 Se sabe que el peso de los recién nacidos en una determinada población sigue una distribución normal de 3 600 g de media y 280 g de desviación típica. Se toma una muestra al azar de 196 de estos recién nacidos, y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 3 580 y 3 620 g?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

b) $n = 196 \geq 30 \Rightarrow \mu = 3\,600, \sigma = \dfrac{280}{\sqrt{196}} = 20 \Rightarrow$

$\overline{X} \equiv N(3\,600, 20)$

c) $P(3\,580 < \overline{X} < 3\,620) =$

$$= P\left(\frac{3\,580 - 3\,600}{20} < z < \frac{3\,620 - 3\,600}{20}\right) =$$

$$= P(-1 < z < 1) = 2P(z < 1) - 1 = 0{,}6826$$

23 Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina en litros, por cada 100 km, fue de 5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de 2 litros de desviación típica. Determina un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

b) El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(5 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}; 5 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (3{,}76; 6{,}24)$$

Se tiene que el consumo medio cada 100 km está en el intervalo (3,76; 6,24) con una probabilidad del 95 %

24 La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial sigue una distribución normal con desviación típica de 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas, y la media de duración obtenida en esa muestra es de 35 segundos. Calcula un intervalo de confianza al 99 % para la duración media de las llamadas.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

b) El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(35 - 2{,}58 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}};\ 35 + 2{,}58 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}}\right) = (31{,}35; 38{,}65)$$

Se tiene que la duración media de las llamadas está en el intervalo (31,35; 38,65) con una probabilidad del 99 %

25 Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica de 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos, con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempo de reacción?

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 = 166{,}41$$

Se debe tomar una muestra de 167 individuos.

26 Una variable aleatoria *x* tiene distribución normal, y su desviación típica es igual a 3

a) Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de una unidad de la media de la población, con probabilidad de 0,99, ¿cuántos elementos se deberían tomar como mínimo en la muestra?

Solución:

a) Si se llama μ a la media de la población, entonces la media muestral sigue una distribución:

$$\overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow N(\mu, 0{,}75)$$

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{3}{1}\right)2 = 59{,}91$$

Se debe tomar una muestra de 60 individuos.

4. Estimación de la proporción por intervalos de confianza

27 En un centro escolar, el 40% de los alumnos tienen dos o más hermanos. Si se selecciona una muestra de 36 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que, de los alumnos de la muestra, el 50% o menos tengan dos o más hermanos?

Solución:

Variable:

$\hat{p}$ = proporciones muestrales

$$n = 36 \geq 30 \Rightarrow p = 0{,}4 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{36}} = 0{,}08$$

$$P(\hat{p} \leq 0{,}5) = P\left(z \leq \frac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}08}\right) = P(z \leq 1{,}25) = 0{,}8944$$

28 Se ha realizado una encuesta a 325 ciudadanos y se ha contabilizado que 120 iban al teatro regularmente.

a) Halla, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo para estimar la proporción de ciudadanos que van al teatro regularmente.

b) Calcula el número mínimo de ciudadanos que deben entrevistarse para que el error sea del 0,01

Solución:

a) Nivel de confianza = $1 - \alpha = 0{,}94 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}89$

$p = 120/325 = 0{,}369 \Rightarrow q = 0{,}631$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}369 \cdot 0{,}631}{325}} = 0{,}027$$

$(0{,}369 - 1{,}89 \cdot 0{,}027; 0{,}369 + 1{,}89 \cdot 0{,}027) =$

$= (0{,}32; 0{,}42)$

La proporción de ciudadanos está entre el 32% y el 42% con una probabilidad del 94%

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = (1{,}89)^2 \cdot \frac{0{,}369 \cdot 0{,}631}{0{,}01^2} = 8\,317{,}24$$

Se tomarán 8 318 personas.

29 En una muestra aleatoria de 400 personas de una población, hay 80 que tienen teléfono móvil. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional, con un nivel de confianza del 95%

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}2$; y $\hat{q} = 0{,}8$

b) El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}; 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}\right) =$$

$= (0{,}16; 0{,}24)$

La proporción estará entre el 16% y el 24% con una probabilidad del 95%

30 Cuando se ha preguntado a 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, solo 40 han contestado que sí. Encuentra un intervalo de confianza, con nivel de confianza del 99%, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}4$; y $\hat{q} = 0{,}6$

b) El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}4 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}; 0{,}8 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}\right) =$$

$= (0{,}27; 0{,}53)$

La proporción estará entre el 27% y el 53% con una probabilidad del 99%

31 El 70% de las personas que tienen teléfono móvil usan algún servicio de telefonía a través de Internet. Si se toma una muestra de 150 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 90 personas que usen algún servicio de telefonía móvil a través de Internet?

Solución:

- Variable: $\hat{p}$ = proporciones muestrales
- $n = 150 \geq 30 \Rightarrow$ se puede aproximar a una normal:

$$N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

- $p = 0{,}7 \Rightarrow q = 0{,}3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{150}} = 0{,}04$
- $P(\hat{p} \geq 0{,}6) = P\left(z \leq \dfrac{0{,}6 - 0{,}7}{0{,}04}\right) = P(z \geq -2{,}5) =$

$= P(z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$

32 De una muestra de 60 clientes de supermercados, 24 fueron capaces de decir el precio del producto que habían comprado.

a) Determina el intervalo de confianza, al 95% para la proporción de clientes de la población.

b) Calcula el número mínimo de clientes para que el error sea menor de un 5%

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}4$; y $\hat{q} = 0{,}6$

El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{60}}; 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{60}}\right) =$$

$= (0{,}28; 0{,}52)$

La proporción estará entre el 28% y el 52% con una probabilidad del 95%

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2} \Rightarrow n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}05^2} \Rightarrow n = 368{,}79$$

Se deben tomar en la muestra a 369 personas.

Para ampliar

33 Una ciudad de 2000 habitantes está poblada por personas de pelo negro, rubio y castaño. Se ha seleccionado, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra constituida por 28 personas de pelo negro, 32 de pelo rubio y 20 de pelo castaño. Determina cuál es la composición, según el color de pelo, de los habitantes de esta ciudad.

Solución:

Muestra: 28 + 32 + 20 = 80

2000 : 80 = 25

Estratos	P. negro	P. rubio	P. castaño	Total
Muestra	28	32	20	80
Población	700	800	500	2000

34 El peso de las peras de una cosecha se distribuye según una normal de 115 g de media y 25 g de desviación típica.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pera elegida al azar pese más de 120 g?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 64 peras esté entre 112 y 119 g?

Solución:

a) $P(x > 120) = P\left(z > \dfrac{120 - 115}{25}\right) =$

$= P(z > 0{,}2) = 1 - P(z < 0{,}2) = 0{,}4207$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

$n = 64 > 30$ Luego:

$\mu = 115, \sigma = \dfrac{25}{\sqrt{64}} = 3{,}125 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(115; 3{,}125)$

$P(112 < \overline{X} < 119) =$

$= P\left(\dfrac{120 - 115}{3{,}125} < z < \dfrac{119 - 115}{3{,}125}\right) =$

$= P(-0{,}96 < z < 1{,}28) = P(z < 1{,}28) - P(z < -0{,}96) =$

$= P(z < 1{,}28) - 1 + P(z < 0{,}96) = 0{,}7312$

35 Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 27

a) Calcula la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109

b) Calcula la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

$n = 81 > 30$

$$\mu = 100, \sigma = \frac{27}{\sqrt{81}} = 3 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(100, 3)$$

$$P(\overline{X} < 109) = P\left(z < \frac{109 - 100}{3}\right) =$$

$$= P(z < 3) = 0{,}9987$$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

$n = 36 > 30$

$$\mu = 100, \sigma = \frac{27}{\sqrt{36}} = 4{,}5 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(100; 4{,}5)$$

$$P(\overline{X} > 109) = P\left(z > \frac{109 - 100}{4{,}5}\right) =$$

$$= P(z > 2) = 1 - P(z < 2) = 0{,}0228$$

36 Se supone que los ingresos diarios de una empresa siguen una distribución normal de 400 € de media y 250 € de desviación típica.

a) ¿Cómo se distribuye la media muestral para muestras aleatorias de tamaño *n*?

b) Se dispone de una muestra aleatoria de 25 observaciones. Calcula la probabilidad de que el promedio de ingresos esté entre 350 € y 400 €

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

$$\mu = 400, \sigma = \frac{250}{\sqrt{n}} \Rightarrow \overline{X} \equiv N\left(400, \frac{250}{\sqrt{n}}\right)$$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales.

$n = 25 < 30$ pero la distribución es normal.

$$\mu = 400, \sigma = \frac{250}{\sqrt{25}} = 50 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(400; 50)$$

$$P(350 < \overline{X} < 400) =$$

$$= P\left(\frac{350 - 400}{50} < z < \frac{400 - 400}{50}\right) =$$

$$= P(-1 < z < 0) = P(z < 0) - P(z < -1) =$$

$$= P(z < 0) - 1 + P(z < 1) = 0{,}3413$$

37 La cantidad media de hemoglobina en sangre del hombre sigue una distribución normal con desviación típica de 2 g/dL. Calcula el nivel de confianza de una muestra de 12 extracciones de sangre que indique que la media poblacional de hemoglobina en sangre está entre 13 y 15 g/dL

Solución:

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (13, 15)$$

La media muestral es:

$$\overline{X} = \frac{13 + 15}{2} = 14$$

$$14 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{12}} = 13$$

$z_{\alpha/2} = 1{,}73$

$P(-1{,}73 < z < 1{,}73) = 2P(z < 1{,}73) - 1 = 0{,}9164$

El nivel de confianza es del 91,64%

38 Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presentan a unas pruebas de acceso a la universidad revela que la media de edad es de 18,1 años. Halla un intervalo de confianza del 90% para la edad media de todos los estudiantes que se presentan a las pruebas, sabiendo que la desviación típica de la población es de 0,4

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

b) El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(18{,}1 - 1{,}65 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{100}}; 18{,}1 + 1{,}65 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{100}}\right) =$$

$= (18{,}03; 18{,}17)$

Se tiene que la edad media está en el intervalo (18,03; 18,17) con una probabilidad del 95%

39 Un fabricante de pilas alcalinas sabe que la desviación típica de la duración de las pilas que fabrica es de 80 h. Calcula el tamaño de la muestra que debe someterse a prueba para tener una confianza del 95% de que, al tomar la duración media de la muestra como valor de la duración media de la población total de pilas, el error que se cometa sea menor que 16 h

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{80}{16}\right)^2 = 96{,}04$$

Se debe tomar una muestra de 97 pilas.

40 En una encuesta realizada a 800 personas elegidas al azar del censo electoral, 240 declararon su intención de votar al partido A

a) Estima con un nivel de confianza del 95,45% entre qué valores se encuentra la intención de voto al susodicho partido en todo el censo.

b) Discute razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}9545 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}3$; y $\hat{q} = 0{,}7$

El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}; 0{,}3 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}\right) =$$

$= (0{,}2676; 0{,}3324)$

La proporción estará entre el 26,76 % y el 33,24 % con una probabilidad del 95,45 %

b) Si aumenta el nivel de confianza, la amplitud del intervalo se hace mayor y, por tanto, el error máximo admisible aumenta. Se gana en seguridad de la estimación pero se pierde precisión. Por otro lado, si disminuye el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo y es menor el error admisible.

41 Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de bachillerato es una variable aleatoria x que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg

a) En el caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria de las medias muestrales $\bar{x}$?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de un kilo de la media de la población, con probabilidad 0,95, ¿cuántos alumnos se deberían tomar en la muestra?

Solución:

a) Si se llama a la media de la población μ, entonces la media muestral sigue una distribución:

$$\overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{25}}\right) = N(\mu, 1)$$

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{5}{1}\right)^2 = 96{,}04$$

Se debe tomar una muestra de 97 individuos.

42 En una universidad se toma una muestra de 100 alumnos al azar, y se encuentra que 62 han aprobado todas las asignaturas.

a) Con un nivel de confianza del 95 %, halla un intervalo para estimar el porcentaje de alumnos que aprueban todas las asignaturas.

b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,03, con el mismo nivel de confianza del 95 %. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}62$; y $\hat{q} = 0{,}38$

El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$= (0{,}62 - 1{,}96 \cdot 0{,}049; 0{,}62 + 1{,}96 \cdot 0{,}049) =$

$= (0{,}5249; 0{,}7151)$

La proporción estará entre el 52,49 % y el 71,51 % con una probabilidad del 95 %

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}62 \cdot 0{,}38}{0{,}03^2} = 1\,005{,}65$$

Se debe tomar una muestra de 1006 alumnos.

43 Un laboratorio farmacéutico afirma que el número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar una determinada enfermedad sigue una distribución normal con desviación típica igual a 8. Se toma una muestra de 100 enfermos a los que se les suministra el medicamento y se observa que la media de horas que tardan en curarse es igual a 32

a) Encuentra un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la media del número de horas que tarda en curar el medicamento.

b) Si el nivel de significación es 0,05, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar para estimar el valor de la media con un error menor de 3 h?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(32 - 2{,}58 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}; 32 + 2{,}58 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}\right)$$

$= (29{,}94; 34{,}06)$

Se tiene que la media para el número de horas está en el intervalo (29,94; 34,06) con una probabilidad del 99 %

b) Como $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{8}{3}\right)^2 = 27{,}32$$

Se debe tomar una muestra de 28 pacientes.

44 En cierta población cercana a una estación de esquí se quiere estimar con un nivel de confianza del 95% la población de habitantes que practican esquí. Se toma una muestra de 400 habitantes de la población, de los que 240 afirman que practican este deporte. Determina el correspondiente intervalo de confianza.

Solución:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Se tiene: $\hat{p} = 0,6$; y $\hat{q} = 0,4$

El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0,6 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{400}}; 0,6 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{400}}\right) =$$

$= (0,5520; 0,6480)$

La proporción estará entre el 55,2% y el 64,8% con una probabilidad del 95%

Problemas

45 Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un coche recorre anualmente un promedio de 15 200 km, con una desviación típica de 2 250 km

a) Determina un intervalo de confianza, al 99%, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 km, con igual confianza?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(15\,200 - 2,58 \cdot \frac{2\,250}{\sqrt{100}}, 15\,200 + 2,58 \cdot \frac{2\,250}{\sqrt{100}}\right) =$$

$= (14619,5; 15780,5)$

Se tiene que el número medio de kilómetros está en el intervalo (14619,5; 15 780,5) con una probabilidad del 99%

b) $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2,58 \cdot \frac{2\,250}{500}\right)^2 = 134,79$$

Se debe tomar una muestra de 135 usuarios.

46 Una muestra aleatoria extraída de una población normal de varianza igual a 100 presenta una media muestral de 160. Sabiendo que el tamaño de la muestra es 144

a) Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional.

b) Calcula un intervalo de confianza del 90% para la media poblacional.

c) Si se quiere tener una confianza del 95% de que el error máximo es 1,2, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(160 - 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}; 160 + 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}\right) =$$

$= (158,37; 161,63)$

b) $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,65$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(160 - 1,65 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}; 160 + 1,65 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}\right) =$$

$= (158,63; 161,37)$

c) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1,96 \cdot \frac{10}{1,2}\right)^2 = 266,77$$

Se debe tomar una muestra de 267 unidades; por tanto, deben tomarse 123 unidades adicionales.

47 Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se les ha medido el nivel de glucosa en sangre, y se obtiene una media muestral de 110 mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cc

a) Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre de la población.

b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,65$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(110 - 1,65 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}; 110 + 1,65 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right) =$$

$= (106,72; 113,28)$

El nivel medio de glucosa en sangre de la población está en el intervalo (106,72; 113,28) con una probabilidad del 90 %

b) El error máximo es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1,65 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3,3 \text{ mg/cc}$$

48 En un centro escolar hay 2 000 alumnos, distribuidos en 5 cursos de la siguiente manera: 400 en 1.º, 380 en 2.º, 520 en 3.º, 360 en 4.º y 340 en 5.º. Se quiere seleccionar una muestra de 100 alumnos utilizando la técnica de muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional y considerando cada curso como un estrato. ¿Cómo se seleccionaría la muestra?

Solución:

2 000 : 100 = 20

Cada 20 alumnos, se elige uno.

Estratos	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	Total
Población	400	380	520	360	340	2 000
Muestra	20	19	26	18	17	100

49 Se sabe que la estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de 6 cm de desviación típica. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos que da una media de 176 cm

a) Obtén un intervalo de confianza, con un 99 % de confianza, para la media de la estatura de la población.

b) Calcula el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de los individuos de la población con un error inferior a 1 cm y un nivel de confianza del 95 %

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(176 - 2,58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}}; 176 + 2,58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}}\right) =$$

$= (174,97; 177,03)$

La estatura media de la población está en el intervalo (174,97; 177,03) con una probabilidad del 99 %

b) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1,96 \cdot \frac{6}{1}\right)^2 = 138,30$$

Se debe tomar una muestra de 139 individuos.

50 Con el fin de estimar la edad media de los habitantes de una gran ciudad, se tomó una muestra aleatoria de 300 habitantes, que arrojó una edad media de 35 años y una desviación típica de 7 años.

a) Halla el intervalo del 95 % de confianza en el que se encuentra la edad media de la población.

b) ¿Qué nivel de confianza se debería usar para que el intervalo fuera 35 ± 0,44?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(35 - 1,96 \cdot \frac{7}{\sqrt{300}}, 35 + 1,96 \cdot \frac{7}{\sqrt{300}}\right) = (34,21; 35,79)$$

La edad media de la población está en el intervalo (34,21; 35,79) con una probabilidad del 95 %

b) El error máximo es:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{300}} = 0,44$$

$z_{\alpha/2} = 1,09$

$P(-1,09 < z < 1,09) = 2P(z < 1,09) - 1 = 0,7242$

El nivel de confianza es del 72,42 %

51 Estamos realizando un estudio sobre el nivel de conocimientos generales de los estudiantes de bachillerato. Para ello, se elige una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, a los que se les ha realizado un examen. Las calificaciones obtenidas han sido las siguientes:

7,8 6,5 5,4 7,1 5,0 8,3 5,6 6,6 6,2

Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de desviación típica conocida e igual a 1

Se pide:

a) Un intervalo de confianza al 98 % para la media de las calificaciones en los exámenes.

b) El tamaño mínimo que debería tener la muestra en el caso de admitir un error máximo de 0,5 puntos, con un nivel de confianza del 95 %

Solución:

a) La media de la muestra es 6,5

$1 - \alpha = 0{,}98 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(6{,}5 - 2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}; 6{,}5 + 2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}\right) = (5{,}72; 7{,}28)$$

La nota media de la población está en el intervalo (5,72; 7,28) con una probabilidad del 98 %

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{1}{0{,}5}\right)^2 = 15{,}37$$

Se debe tomar una muestra de 16 estudiantes.

52 Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuyen según una ley normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 2$ h

a) A partir de una muestra de 64 alumnos, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media de la población (7,26; 8,14). Determina el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0,75 h, con un nivel de confianza del 98 %

Solución:

a) $$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7{,}26; 8{,}14)$$

$$\overline{X} = \frac{7{,}26 + 8{,}14}{2} = 7{,}7$$

$$7{,}7 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 7{,}26$$

$z_{\alpha/2} = 1{,}76$

$P(-1{,}76 < z < 1{,}76) = 2P(z < 1{,}76) - 1 = 0{,}9216$

El nivel de confianza es del 92,16 %

b) $1 - \alpha = 0{,}98 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}33 \cdot \frac{2}{0{,}75}\right)^2 = 38{,}60$$

Se debe tomar una muestra de 39 estudiantes.

53 Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de una universidad, se encontró que un tercio hablaba inglés.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos que hablan inglés entre los alumnos de esa universidad.

b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01, con el mismo nivel de confianza del 90 %. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

Se tiene: $\hat{p} = 0{,}33$; y $\hat{q} = 0{,}67$

El intervalo es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}33 - 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot 0{,}67}{60}}; 0{,}33 + \right.$$

$$\left. + 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot 0{,}67}{60}}\right) = (0{,}23; 0{,}43)$$

La proporción estará entre el 23 % y el 43 % con una probabilidad del 90 %

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = 1{,}65^2 \cdot \frac{0{,}33 \cdot 0{,}67}{0{,}01^2} = 6\,019{,}45$$

Se debe tomar una muestra de 6 020 personas.

54 Para estimar la proporción de los habitantes de una determinada ciudad que poseen ordenador personal, se quiere utilizar una muestra aleatoria de tamaño *n*. Calcula el valor mínimo de *n* para garantizar que, con un nivel de confianza del 95 %, el error de la estimación no sea superior al 2 %. (Como se desconoce la proporción, se tiene que tomar el caso más desfavorable, que será 0,5).

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2}$$

$$n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}02^2} = 2\,401$$

Se debe tomar una muestra de 2 401 habitantes.

55 Una fábrica de conservas desea conocer el tiempo que tarda en estropearse un producto almacenado. Se elige una muestra de 400 unidades y resulta que el tiempo medio de descomposición de estos productos es de 172 h. Por experiencias anteriores se conoce que la desviación típica de la variable normal tiempo de descomposición es de 5 h

Con un nivel de confianza del 95 %, ¿entre qué valores se encuentra el tiempo medio de descomposición para la totalidad del producto almacenado?

Solución:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(172 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{400}}, 172 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{400}}\right) =$$

$= (171,51; 172,49)$

El tiempo medio de descomposición de la población está en el intervalo (171,51; 172,49) con una probabilidad del 95 %

56 Sabiendo que la varianza de una ley normal es $\sigma^2 = 16$, determina el nivel de confianza con el que puede decirse que su media está comprendida entre 6,2 y 8,8 si se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 de esta distribución.

Solución:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (6,2; 8,8)$$

La media muestral es:

$$\overline{X} = \frac{6,2 + 8,8}{2} = 7,5$$

$$7,5 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} = 6,2$$

$z_{\alpha/2} = 1,95$

$P(-1,95 < z < 1,95) = 2P(z < 1,95) - 1 = 0,9488$

El nivel de confianza es del 94,88 %

Para profundizar

57 En una población normal con varianza conocida, se ha tomado una muestra de tamaño 49 y se ha calculado su media, obteniéndose 4,2. Determina la varianza de la población sabiendo que el intervalo de confianza, al 95 %, es (3,64; 4,76) para la media poblacional.

Solución:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (3,64; 4,76)$$

$$4,2 - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 3,64$$

$\sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$

58 En una población, una variable aleatoria sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20

a) Si de una muestra de tamaño 25 se ha observado que la media es 2 743, determina el intervalo de confianza, al 90 %, para la media de la población.

b) Elegida una muestra, su media ha sido 2740. Se ha construido un intervalo de confianza, al 95 %, que ha resultado ser (2 736,08; 2 743,92). ¿Cuál era el tamaño de la muestra?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,65$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(2\,743 - 1,65 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}; 2\,743 + 1,65 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}\right) =$$

$= (2\,736,44; 2\,749,56)$

La media de la población está en el intervalo (2 736,44; 2 749,56) con una probabilidad del 90 %

b) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$= (2\,736,08; 2\,743,92)$

$$2\,740 - 1,96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} = 2\,736,08$$

$\sqrt{n} = 10 \Rightarrow n = 100$

59 Una muestra aleatoria de 60 individuos tiene una media de 235 mg/dL (miligramos por decilitro) en medidas de colesterol. Suponiendo que la desviación típica de la variable que mide las unidades de colesterol es $\upsilon = 28$ mg/dL, se pide:

a) Calcular el intervalo de confianza, con un nivel de confianza 0,95 para la media de la población.

b) Determinar el tamaño muestral necesario para reducir el intervalo de confianza anterior a la mitad.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(235 - 1,96 \cdot \frac{28}{\sqrt{60}}; 235 + 1,96 \cdot \frac{28}{\sqrt{60}}\right) =$$

$= (227,92; 242,08)$

La media de colesterol de la población está en el intervalo (227,92; 242,08) con una probabilidad del 95 %

b) El error máximo admisible en el apartado anterior es 7,08 y se quiere reducir a la mitad 7,08/2 = 3,54

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3,54$$

$$1,96 \cdot \frac{28}{\sqrt{n}} = 3,54$$

$\sqrt{n} = 15,50$

$n = 240,33$

Hay que tomar un muestra de 241 individuos.

60 Dos variables aleatorias independientes x_1, x_2 siguen una distribución normal con media μ y desviación típica σ

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria $x_1 + x_2$?

b) Si $\mu = 15$ y $\sigma = \sqrt{8}$, calcula $P(x_1 + x_2 > 28)$

Solución:

a) La suma $x_1 + x_2 \equiv N(2\nu, \sigma\sqrt{2})$

b) $\mu = 15$ y $\sigma = \sqrt{8} \Rightarrow x_1 + x_2 \equiv N(30, 4)$

$$P(x_1 + x_2 > 28) = P\left(z > \frac{28 - 30}{4}\right) = P(z > -0,5) =$$

$$= P(z < 0,5) = 0,6915$$

61 Sea un conjunto de cuatro bolas marcadas con los números 1, 3, 5 y 7

a) Escribe todas las muestras de tamaño 2 que podrían formarse con esas bolas si el muestreo se hace sin reposición. Calcula las medias de los números de cada muestra y halla la media de todas las medias.

b) Haz lo mismo, pero suponiendo que el muestreo se hace con reemplazamiento.

c) Calcula la media de los valores de las cuatro bolas. ¿Con qué coincide?

Solución:

a) Las muestras sin reemplazamiento son:

	1	3	5	7
1		1,3	1,5	1,7
3	3,1		3,5	3,7
5	5,1	5,3		5,7
7	7,1	7,3	7,5	

Sus medias respectivas son:

	1	3	5	7
1		2	3	4
3	2		4	5
5	3	4		6
7	4	5	6	

La media de todas las medias es:

$$\frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{12} = 4$$

b) Las muestras con reemplazamiento:

	1	3	5	7
1	1,1	1,3	1,5	1,7
3	3,1	3,3	3,5	3,7
5	5,1	5,3	5,5	5,7
7	7,1	7,3	7,5	7,7

Las medias respectivas son:

	1	3	5	7
1	1	2	3	4
3	2	3	4	5
5	3	4	5	6
7	4	5	6	7

La media de todas las medias es:

$$\frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 7}{16} = 4$$

c) La media de las bolas es:

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7}{4} = 4$$

Las medias coinciden de acuerdo con el teorema central del límite.

Practica

68 Una empresa de transporte sabe que el peso medio de los paquetes que transporta es de 20 kg con una desviación típica de 5 kg. Si en uno de sus transportes lleva 50 paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio sea mayor que 22 kg?

Solución:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución de las medias muestrales					
2	Media de la población				μ	20
3	Desviación típica de la población				σ	5
4	Tamaño de la muestra				n	50
5	Desviación típica de la media muestral				$\sigma/\sqrt{n}$	0,71
6	k	μ	σ	Acumulado	$P(z \leq k)$	$P(z \geq k)$
7	22	20	0,71	1	0,9977	0,0023
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	$P(k_1 \leq z \leq k_2)$
10			20	0,71	1	0,0000

69 En unas elecciones uno de los candidatos obtuvo el 46 % de los votos. Calcula la probabilidad de que en una muestra de 200 votantes, elegida al azar, saliera un porcentaje igual o superior al 50 % a su favor.

Solución:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución de las proporciones muestrales					
2	Proporción				p	0,46
3	Proporción				q	0,54
4	Tamaño de la muestra				n	200
5	Desviación típica de la proporción muestral				σ	0,035
6	k	μ	σ	Acumulado	$P(p \leq k)$	$P(p \geq k)$
7	0,5	0,46	0,035	1	0,8718	0,1282
8						
9	p_1	p_2	μ	σ	Acumulado	$P(p_1 \leq z \leq p_2)$
10			0,46	0,035	1	0

70 El tiempo que permanece cada paciente en la consulta de cierto médico es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 minutos. Se ha tomado una muestra de 256 pacientes de este médico y se ha encontrado que su tiempo medio de consulta ha sido de 10 minutos. Calcula el intervalo de confianza, a un nivel del 95 %, para el tiempo medio de consulta que se deduce de la muestra.

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para la media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	10	0,05	4	256	0,49	9,51	10,49

71 En cierta población cercana a una estación de esquí se quiere estimar, con un nivel de confianza del 95 %, la población de habitantes que practican esquí. Se toma una muestra de 400 habitantes de la población, de la que 240 afirman que practican este deporte. Determina el correspondiente intervalo de confianza.

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para la proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidad	Valor crítico						
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k						
4	0,95	0,975	1,96						
5									
6	Intervalo de confianza para la proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_\alpha/2$	$z_\alpha/2 \cdot \sigma$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	400	240	0,60	0,40	0,02	1,96	0,05	0,55	0,65

72 Un laboratorio farmacéutico afirma que el número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar una determinada enfermedad sigue una distribución normal con desviación típica igual a 8. Se toma una muestra de 100 enfermos a los que se les suministra el medicamento y se observa que la media de horas que tardan en curarse es igual a 32

a) Encuentra un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 % para la media del número de horas que tarda en curar el medicamento.

b) Si el nivel de significación es 0,05, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar para estimar el valor de la media con un error menor de 3 h?

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para la media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	32	0,01	8	100	2,06	29,94	34,06
4							
5							
6	Valor crítico para la media						
7	Nivel de confianza	Probabilidad	Valor crítico				
8	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k				
9	0,95	0,975	1,96				
10							
11	Tamaño de la muestra para la media						
12	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Error	Tamaño de la muestra			
13	1,96	8	3,00	27,32			

73 Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de 15200 km con una desviación típica de 2250 km

a) Determina un intervalo de confianza, al 99 %, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 km, con igual confianza?

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para la media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	15200	0,01	2250	100	579,56	14620,44	15779,56
4							
5							
6	Valor crítico para la media						
7	Nivel de confianza	Probabilidad	Valor crítico				
8	1 – α	P(k ≤ z ≤ k) = 1 – α	k				
9	0,99	0,995	2,58				
10							
11	Tamaño de la muestra para la media						
12	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Error	Tamaño de la muestra			
13	2,58	2250	500,00	134,36			

74 Se sabe que el peso de los recién nacidos en una determinada población sigue una distribución normal de media 3 600 g y desviación típica 280 g. Se toma una muestra al azar de 196 de estos recién nacidos y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 3 580 y 3 620 g?

Solución:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución de las medias muestrales					
2	Media de la población				μ	3600
3	Desviación típica de la población				σ	280
4	Tamaño de la muestra				n	196
5	Desviación típica de la media muestral				σ/√n	20,00
6	k	μ	σ	Acumulado	P(z ≤ k)	P(z ≥ k)
7	173	3600	20,00	1	0,0000	1,0000
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	$P(k_1 \leq z \leq k_2)$
10	3580	3620	3600	20,00	1	0,6827

75 Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es de 100. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95 % de que el error de la duración media que se calcule sea menor que 10 h

Solución:

	A	B	C	D
1	Valor crítico para la media			
2	Nivel de confianza	Probabilidad	Valor crítico	
3	1 – α	P(k ≤ z ≤ k) = 1 – α	k	
4	0,95	0,975	1,96	
5				
6	Tamaño de la muestra para la media			
7	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Error	Tamaño de la muestra
8	1,96	100	10,00	384,15

76 En una muestra aleatoria de 400 personas que han visto un programa de televisión, 100 personas reconocieron que les había gustado. Determina el intervalo de confianza, al 95 %, para la proporción de personas en la población que les gusta el programa.

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para la proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidad	Valor crítico						
3	$1-\alpha$	$P(k \leq z \leq k) = 1-\alpha$	k						
4	0,95	0,975	1,96						
5									
6	Intervalo de confianza para la proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_\alpha/2$	$z_\alpha/2 \cdot \sigma$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	400	100	0,25	0,75	0,02	1,96	0,04	0,21	0,29

77 Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempo de reacción?

Solución:

	A	B	C	D
1	Valor crítico para la media			
2	Nivel de confianza	Probabilidad	Valor crítico	
3	$1-\alpha$	$P(k \leq z \leq k) = 1-\alpha$	k	
4	0,99	0,995	2,58	
5				
6	Tamaño de la muestra para la media			
7	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Error	Tamaño de la muestra
8	2,58	0,05	0,01	165,87

78 Con un nivel de confianza igual a 0,95, a partir de un estudio muestral, el intervalo de confianza de la proporción de habitantes de una comunidad que tienen ordenador portátil es:

$$[0{,}1804;\ 0{,}2196]$$

a) ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes de esa comunidad que tienen ordenador portátil? ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

b) ¿Cuál debería ser el tamaño muestral para estimar la citada proporción, con una confianza del 95 %, con un error máximo de 0,01?

Solución:

	A	B	C	D	E
1	Valor crítico para la proporción				
2	Nivel de confianza	Probabilidad	Valor crítico		
3	$1-\alpha$	$P(k \leq z \leq k) = 1-\alpha$	k		
4	0,95	0,975	1,96		
5					
6	Limite inf intervalo	Limite sup intervalo	p	q	n
7	0,1804	0,2196	0,20	0,80	1599,94
8					
9					
10	Tamaño de la muestra para la proporción				
11	$k = z_{\alpha/2}$	p	q	Error	Tamaño de la muestra
12	1,96	0,20	0,80	0,010	6146,33