

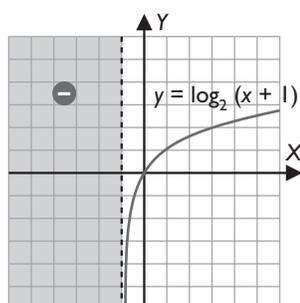
Unidad 9.

Análisis de funciones y representación de curvas

1. Análisis gráfico de una función

Aplica la teoría

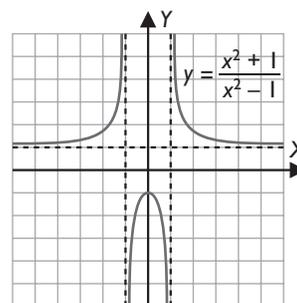
1 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

- Tipo de función: logarítmica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-1, +\infty)$
- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, -1)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, -1)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-1, 1)$
- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

2. Análisis de funciones polinómicas

Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con el eje X de la función $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$ y estudia su multiplicidad.

Solución:

$$2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow (8 - x^2)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ doble.} \\ x = 2\sqrt{2} \text{ simple.} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ simple.} \end{cases}$$

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

3 $y = x^3 - 4x$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
- Mínimo relativo: $B(2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

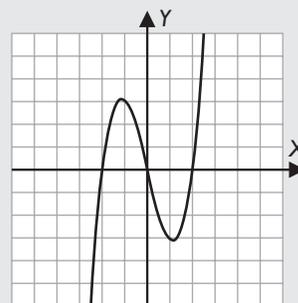
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$

9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

4 $y = 3x - x^3$

Solución:

$$y' = 3 - 3x^2$$

$$y'' = -6x$$

$$y''' = -6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
- Negativa (-): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $C(1, 2)$
- Mínimo relativo: $D(-1, -2)$

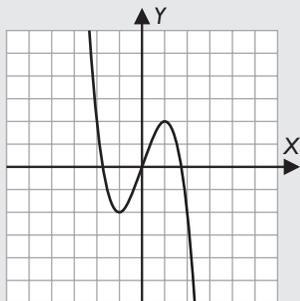
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-1, 1)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

5 $y = x^3$

Solución:

$$y' = 3x^2$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(0, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

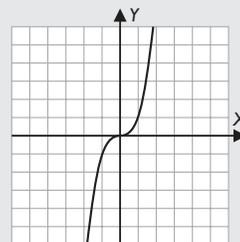
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): \emptyset

9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

6 $y = 4x^2 - x^4$

Solución:

$$y' = 8x - 4x^3$$

$$y'' = 8 - 12x^2$$

$$y''' = -24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- Negativa (-): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $C(-\sqrt{2}, 4)$, $D(\sqrt{2}, 4)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

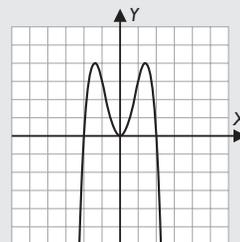
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
- Decreciente (\searrow): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $E(-\sqrt{6}/3, 20/9)$, $F(\sqrt{6}/3, 20/9)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$$

7 $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 6x^2$$

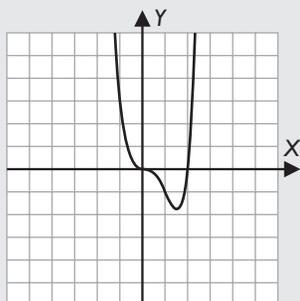
$$y'' = 12x^2 - 12x$$

$$y''' = 24x - 12$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $B(3/2, -27/16)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(3/2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: $C(0, 0)$, $D(1, -1)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(0, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-27/16, +\infty)$$

8 $y = \frac{x^3}{3} - 4x$

Solución:

$$y' = x^2 - 4$$

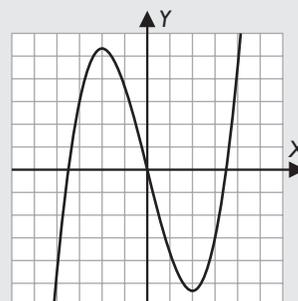
$$y'' = 2x$$

$$y''' = 2$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(-2, 16/3)$
 - Mínimo relativo: $D(2, -16/3)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-2, 2)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3. Análisis de funciones racionales

Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces del denominador de la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

9 $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}$$

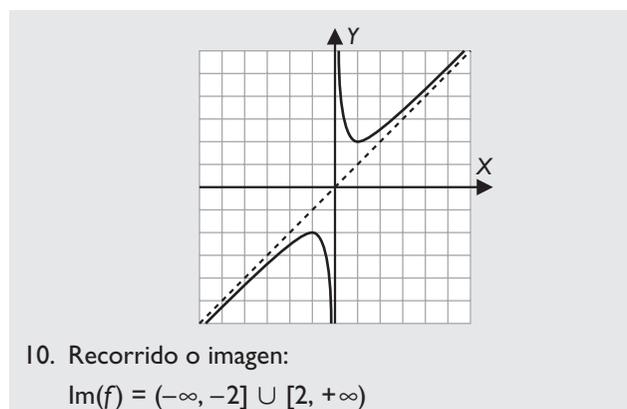
- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-1, -2)$
 - Mínimo relativo: $B(1, 2)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10 $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y''' = \frac{6}{x^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene

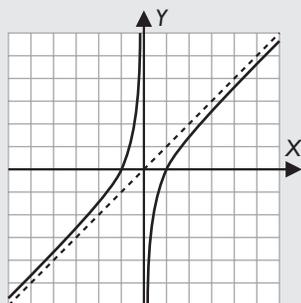
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): \emptyset

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

11 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.

2. Dominio:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$, $x = 1$
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: $A(0, -1)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Negativa (-): $(-1, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, -1)$
- Mínimo relativo: no tiene.

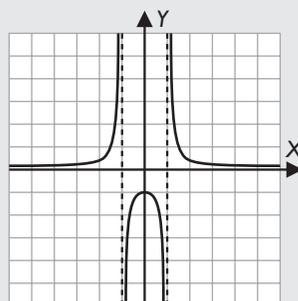
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

12 $y = \frac{x-1}{x^2}$

Solución:

$$y' = -\frac{x-2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{6x-24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.

2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(1, 0)$
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(1, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(2, 1/4)$
- Mínimo relativo: no tiene.

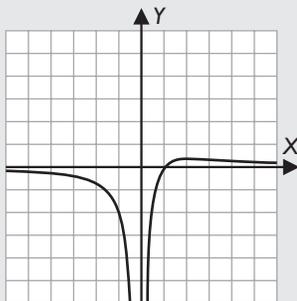
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(0, 2)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $B(3, 2/9)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(3, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4]$$

13 $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{18x^4 - 108x^2 + 18}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(1, 3/2)$
 - Mínimo relativo: $B(-1, -3/2)$

Monotonía:

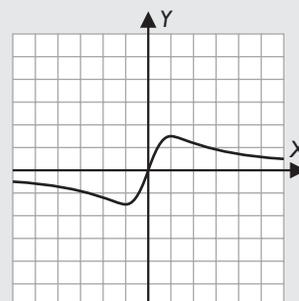
- Creciente (\nearrow): $(-1, 1)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:

$$O(0, 0), C(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4), D(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-3/2, 3/2]$$

14 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -2$, $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2$, $x = 2$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
 - Eje Y: $C(0, 1/4)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-2, -1) \cup (1, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $C(0, 1/4)$
- Mínimo relativo: no tiene.

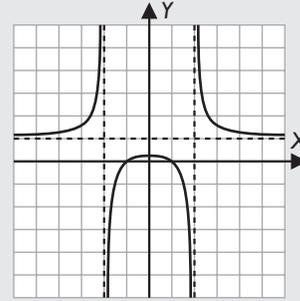
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- Decreciente (\searrow): $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-2, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4] \cup (1, +\infty)$$

4. Análisis de funciones irracionales

Piensa y calcula

Halla mentalmente el dominio de la función $y = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

15 $y = \sqrt{4 - x}$

Solución:

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(4-x)\sqrt{4-x}}$$

$$y''' = -\frac{3}{8(4-x)^2\sqrt{4-x}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 4]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = 4$ tiene una discontinuidad de 2.^a especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(4, 0)$
 - Eje Y: $B(0, 2)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, 4)$
- Negativa (-): \emptyset

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

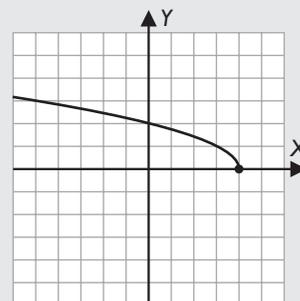
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): \emptyset
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 4)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): \emptyset
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 4)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

16 $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y'' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y''' = -\frac{12x}{(x^2 + 4)^2\sqrt{x^2 + 4}}$$

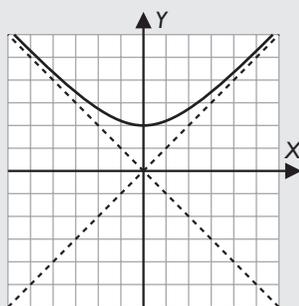
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en toda la real \mathbb{R}
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, 2)$

Signo:

 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(0, 2)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [2, +\infty)$

17 $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y''' = \frac{3x}{(x^2 - 1)^2\sqrt{x^2 - 1}}$$

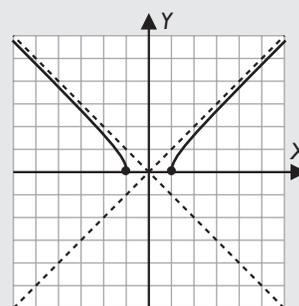
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -1, x = 1$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

18 $y = \sqrt{4 - x^2}$

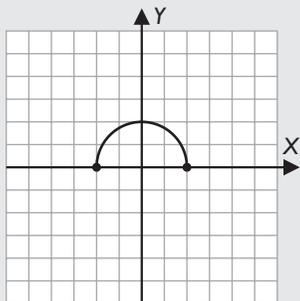
Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{12x}{(4 - x^2)^2\sqrt{4 - x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$
 - Eje Y: $C(0, 2)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-2, 2)$
 - Negativa (-): \emptyset
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(0, 2)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-2, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-2, 2)$



Es una semicircunferencia.

10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, 2]$

19 $y = \sqrt[3]{x}$

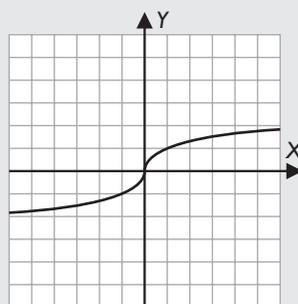
Solución:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9x^3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y''' = \frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
 - Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

20 $y = x\sqrt{4-x^2}$

Solución:

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x^3-8x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$y''' = -\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} - \frac{4x^2+32}{(4-x^2)^2\sqrt{4-x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2, x = 2$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
- Positiva (+): $(0, 2)$

- Negativa (-): $(-2, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $C(\sqrt{2}, 2)$
- Mínimo relativo: $D(-\sqrt{2}, -2)$

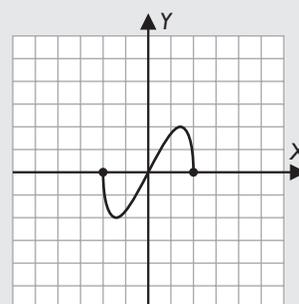
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- Decreciente (\searrow): $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-2, 0)$
- Cóncava (\cap): $(0, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-2, 2]$$

5. Análisis de funciones exponenciales

Piensa y calcula

Halla mentalmente los puntos de corte con los ejes de la función $y = (2-x)e^x$

Solución:

Eje X: $A(2, 0)$

Eje Y: $B(0, 2)$

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

21 $y = (x-2)e^x$

Solución:

$$y' = (x-1)e^x$$

$$y'' = xe^x$$

$$y''' = (x+1)e^x$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(2, 0)$
- Eje Y: $B(0, -2)$

Signo:

- Positiva (+): $(2, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $C(1, -e)$

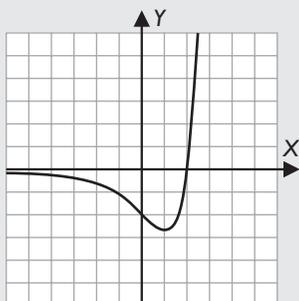
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(1, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 1)$

9. Punto de inflexión: $B(0, -2)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-e, +\infty)$$

22 $y = xe^{-x}$

Solución:

$$y' = -(x-1)e^{-x}$$

$$y'' = (x-2)e^{-x}$$

$$y''' = -(x-3)e^{-x}$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(1, 1/e)$
 - Mínimo relativo: no tiene.

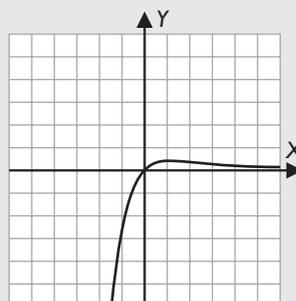
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 1)$
- Decreciente (\searrow): $(1, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $B(2, 2/e^2)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(2, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/e]$$

23 $y = \frac{e^x}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$$y''' = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{x^4}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(1, e)$

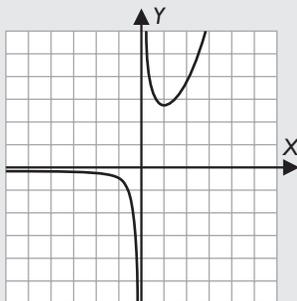
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(1, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$$

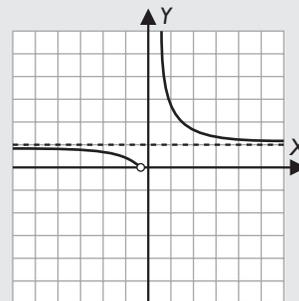
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): \emptyset
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $A(-1/2, 1/e^2)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, -1/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

24 $y = e^{1/x}$

Solución:

$$y' = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$y'' = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{e^{1/x}(6x^2 + 6x + 1)}{x^6}$$

1. Tipo de función: exponencial.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

25 $y = e^{-x^2}$

Solución:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

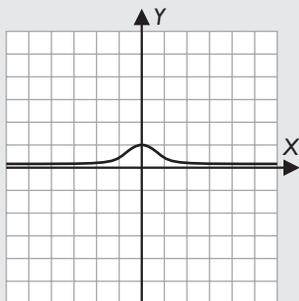
$$y''' = -(2x^2 - 3)4xe^{-x^2}$$

1. Tipo de función: exponencial.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, 1)$
- Signo:
- Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, 1)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $B(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$, $C(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, 1]$$

26 $y = \frac{e^x}{x^2}$

Solución:

$$y' = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2 - 4x + 6)e^x}{x^4}$$

$$y''' = \frac{(x^3 - 6x^2 + 18x - 24)e^x}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Negativa (-): \emptyset

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $A(2, e^2/4)$

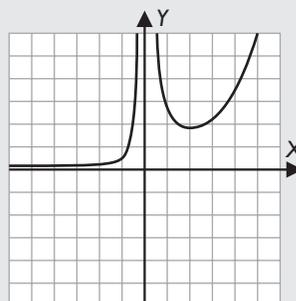
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(0, 2)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$$

6. Análisis de funciones logarítmicas

Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con los ejes de la función $y = \ln(x^2 - 1)$

Solución:

Puntos de corte con el eje X

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2$$

$$A(-\sqrt{2}, 0); B(\sqrt{2}, 0)$$

Al eje Y no lo corta.

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

27 $y = \ln(x^2 + 4)$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 8}{(x^2 + 4)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 48x}{(x^2 + 4)^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: $A(0, \ln 4)$

Signo:

- Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Negativa (-): \emptyset

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $A(0, \ln 4)$

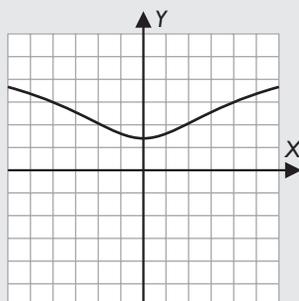
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$

9. Puntos de inflexión: $B(-2, \ln 8)$, $C(2, \ln 8)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-2, 2)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [\ln 4, +\infty)$$

28 $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Solución:

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 6x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 18x^2 + 30x - 18}{(x^2 - 3x + 2)^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 1$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$, $x = 2$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0\right)$

- Eje Y: $(0, \ln 2)$

Signo:

- Positiva (+): $\left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

- Negativa (-): $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

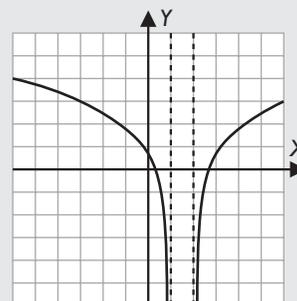
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(2, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): \emptyset
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

29 $y = \ln x^2$

Solución:

$$y' = \frac{2}{x}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2}$$

$$y''' = \frac{4}{x^3}$$

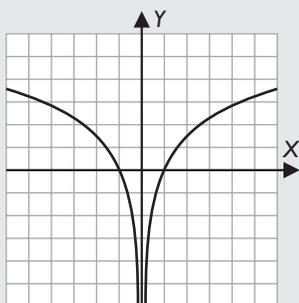
1. Tipo de función: logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

30 $y = x \ln x$

Solución:

$$y' = 1 + \ln x$$

$$y'' = \frac{1}{x}$$

$$y''' = -\frac{1}{x^2}$$

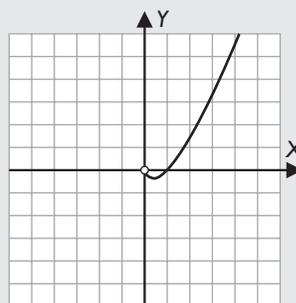
1. Tipo de función: polinómica multiplicada por logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $B(1/e, -1/e)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(1/e, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1/e)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-1/e, +\infty)$

31 $y = \frac{\ln x}{x}$

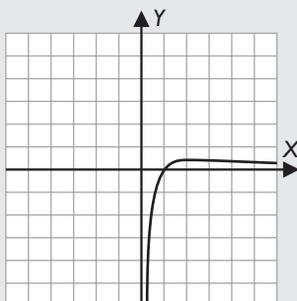
Solución:

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{3 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$y''' = \frac{11 - 6 \ln x}{x^4}$$

- Tipo de función: logarítmica dividida entre polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio de definición.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $B(e, 1/e)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, e)$
 - Decreciente (\searrow): $(e, +\infty)$
- Punto de inflexión: $C\left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(e^{3/2}, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(0, e^{3/2})$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 1/e]$

32 $y = \ln(1 - x^2)$

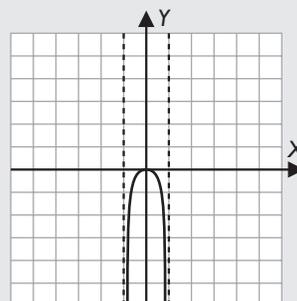
Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 + 12x}{(x^2 - 1)^3}$$

- Tipo de función: logarítmica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = (-1, 1)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio; en $x = -1, x = 1$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): \emptyset
 - Negativa (-): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $O(0, 0)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-1, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-1, 1)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0]$

Ejercicios y problemas

Preguntas tipo test

1 Dada la función

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$$

halla el dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, $A(3, 0)$, $B(0, -3)$
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(-3, 0)$
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $A(1, 0)$, $B(0, -1)$
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $A(-3, 0)$

2 En la función del ejercicio 1, halla los valores de x para los cuales alcanza un máximo o un mínimo relativo.

$$\text{X } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{13}}{2}$$

- $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
- $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$
- $x = -1$

3 En la función del ejercicio 1, halla los puntos de inflexión.

- $C(1, 0)$
- $C(2, 3)$, $D(-2, -3)$
- $C(3, 2)$, $D(-3, -2)$
- $C(-2/3, -70/27)$

4 En la construcción de un túnel, el porcentaje de roca fragmentada o de mala calidad viene dado por el siguiente modelo matemático. $R(x)$ representa dicho porcentaje cuando la distancia a la boca del túnel es x (en kilómetros). Si en algún tramo de la perforación el porcentaje supera el 40%, se deberán reforzar las medidas de sostenimiento y seguridad de la estructura.

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4,5x^2 + 18x + 15; 0 \leq x \leq 7$$

Indica en qué tramos de la perforación el porcentaje crece y en cuáles decrece.

- $(\nearrow): (0, 3) \cup (6, 7)$; $(\searrow): (3, 6)$
- $(\nearrow): (0, 2) \cup (5, 7)$; $(\searrow): (2, 5)$
- $(\nearrow): (3, 6)$; $(\searrow): (0, 3) \cup (6, 7)$
- $(\nearrow): (4, 6)$; $(\searrow): (0, 4) \cup (6, 7)$

5 En la función del ejercicio 4, ¿será necesario reforzar las medidas mencionadas?

- Sí, en el intervalo $[2, 4]$
- Sí, en el intervalo $[6, 7]$

- Sí, en los intervalos $[3, 4]$ y $[6, 7]$
- No, porque en $[0, 7]$ nunca supera el 40%

6 Los beneficios (en millones de euros) generados por el funcionamiento de una industria vienen dados en función del tiempo (en años) por:

$$b(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

¿Cuándo los beneficios son de un millón de euros?

- En el año 1
- En el año 5
- En el año 7
- En el año 23

7 En la función del ejercicio 6, ¿cuándo los beneficios son máximos?

- En el año 5
- En el año 23
- En el año 1
- En el año 7

8 Sea la función del ejercicio 6. ¿Qué ocurre cuando pasan muchos años?

- Los beneficios tienden a cero.
- Los beneficios tienden a 2 millones de euros.
- Los beneficios tienden a 7,2 millones de euros.
- Los beneficios tienden a 10 millones de euros.

9 Dada la función

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 4x + 5}$$

halla el dominio y las asíntotas.

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$. Asíntota: $x = 0$
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntota: $x = 1$, $x = 5$
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Asíntota: $y = 2$
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntota: $y = 0$

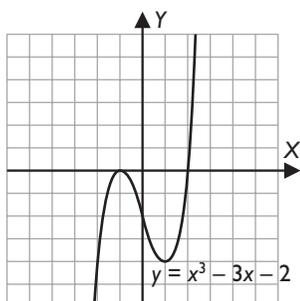
10 En la función del ejercicio 9, halla los máximos y mínimos relativos.

- $A(0,0)$ mínimo relativo.
- $A(5, 7)$ máximo relativo.
- $A(2, 5)$ máximo relativo.
- $A(1, 2)$ mínimo relativo.

Ejercicios y problemas propuestos

1. Análisis gráfico de una función

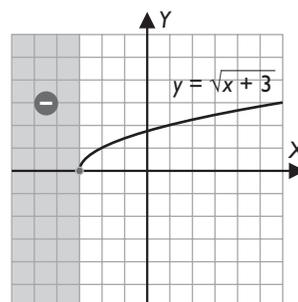
33 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$
 - Eje Y: $C(0, -2)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-1, 0)$
 - Mínimo relativo: $D(1, -4)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-1, 1)$
- Punto de inflexión: $C(0, -2)$
 Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$
- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

34 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.

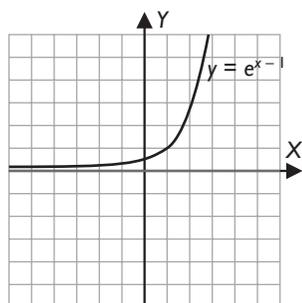


Solución:

- Tipo de función: irracional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = [-3, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio; en $x = -3$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-3, 0)$
 - Eje Y: $B(0, \sqrt{3})$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-3, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-3, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Puntos de inflexión: no tiene.
 Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-3, +\infty)$
- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

Ejercicios y problemas propuestos

- 35** Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

- Tipo de función: exponencial.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(e^{-1}, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset
- Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

2. Análisis de funciones polinómicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

36 $y = 4x - x^3$

Solución:

$y' = 4 - 3x^2$

$y'' = -6x$

$y''' = -6$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

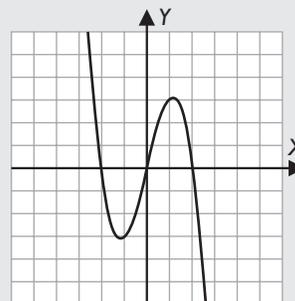
Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 - Negativa (-): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
 - Mínimo relativo: $B(-2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
- Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
 - Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$
- Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



37 $y = -x^3 - 3x^2$

Solución:

$$y' = -3x^2 - 6x$$

$$y'' = -6x - 6$$

$$y''' = -6$$

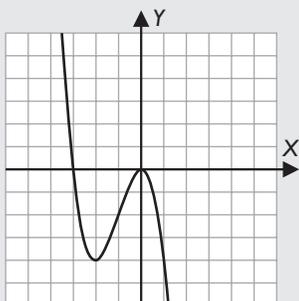
1. Tipo de función: polinómica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-3, 0), O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -3)$
 - Negativa (-): $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $O(0, 0)$
 - Mínimo relativo: $B(-2, -4)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-2, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
 9. Punto de inflexión: $C(-1, -2)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(-\infty, -1)$
 - Cóncava (\cap): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 - $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

38 $y = x^3 + x$

Solución:

$$y' = 3x^2 + 1$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

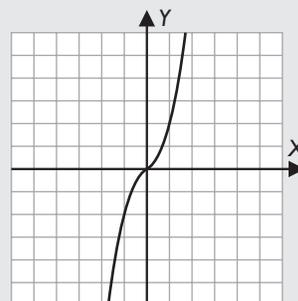
1. Tipo de función: polinómica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
 9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 - $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Ejercicios y problemas propuestos

39 $y = x^4 - 4x^2$

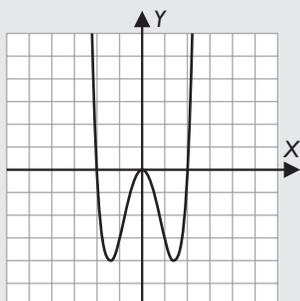
Solución:

$$y' = 4x^3 - 8x$$

$$y'' = 12x^2 - 8$$

$$y''' = 24x$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $O(0, 0)$
 - Mínimo relativo: $C(-\sqrt{2}, -4)$, $D(\sqrt{2}, -4)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
- Puntos de inflexión:
 - $E(-\sqrt{6}/3, -20/9)$, $F(\sqrt{6}/3, -20/9)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$



- Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$$

40 $y = 2x^3 - x^4$

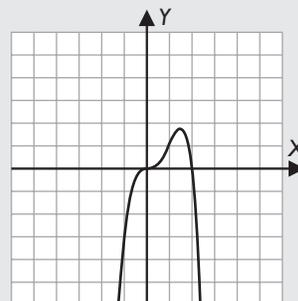
Solución:

$$y' = 6x^2 - 4x^3$$

$$y'' = 12x - 12x^2$$

$$y''' = 12 - 24x$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, 2)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $B(3/2, 27/16)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 3/2)$
 - Decreciente (\searrow): $(3/2, +\infty)$
- Puntos de inflexión: $C(0, 0)$, $D(1, 1)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, 1)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



- Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 27/16]$$

41 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

$$y'' = 6x - 18$$

$$y''' = 6$$

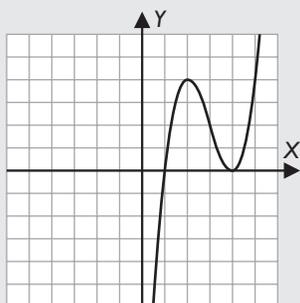
- Tipo de función: polinómica.
 - Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Continuidad: es continua en todo el dominio.
 - Periodicidad: no es periódica.
 - Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 - Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 - Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(1, 0), B(4, 0)$
 - Eje Y: $O(0, -16)$

Signo:

 - Positiva (+): $(1, 4) \cup (4, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 1)$
 - Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(2, 4)$
 - Mínimo relativo: $D(4, 0)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(2, 4)$
 - Punto de inflexión: $O(3, 2)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(3, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 3)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Análisis de funciones racionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

42 $y = \frac{x^2}{x-1}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

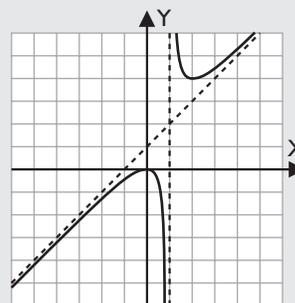
- Tipo de función: racional.
 - Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
 - Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
 - Periodicidad: no es periódica.
 - Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 - Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x + 1$
 - Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
 - Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $O(0, 0)$
 - Mínimo relativo: $A(2, 4)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, 2)$
 - Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(1, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 1)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

Ejercicios y problemas propuestos

43 $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

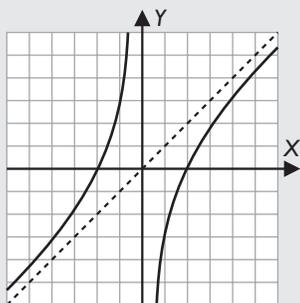
Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{8}{x^3}$$

$$y''' = \frac{24}{x^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0), B(2, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
 - Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

44 $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

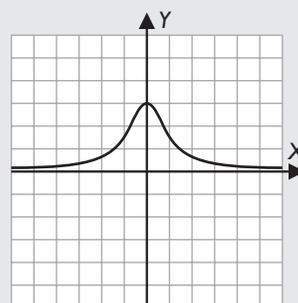
Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 - 72x}{(x^2 + 1)^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, 3)$
- Signo:
 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, 3)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, +\infty)$
- Puntos de inflexión: $B(-\sqrt{3}/3, 9/4), C(\sqrt{3}/3, 9/4)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (0, 3]$

45 $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

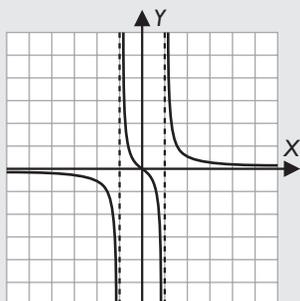
Solución:

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
 - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): \emptyset
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
 Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

46 $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

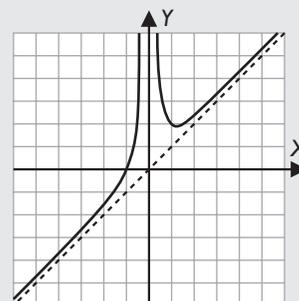
Solución:

$$y' = \frac{x^3 - 2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
 - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $B(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, \sqrt[3]{2})$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
 Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Ejercicios y problemas propuestos

47 $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

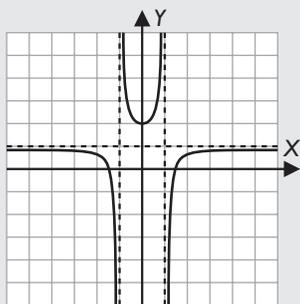
Solución:

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = \frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$
 - Eje Y: $C(0, 2)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $C(0, 2)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-1, 1)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



- Recorrido o imagen: $\text{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

4. Análisis de funciones irracionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

48 $y = \sqrt{x + 2}$

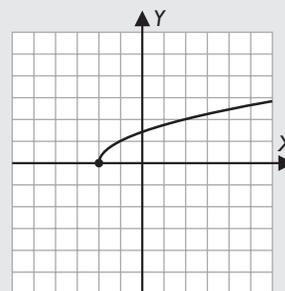
Solución:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(x + 2)\sqrt{x + 2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8(x + 2)^2\sqrt{x + 2}}$$

- Tipo de función: irracional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = [-2, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$
 - Eje Y: $B(0, \sqrt{2})$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-2, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-2, +\infty)$



- Recorrido o imagen: $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

49 $y = \sqrt{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y'' = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y''' = -\frac{3x}{(x^2 + 1)^2\sqrt{x^2 + 1}}$$

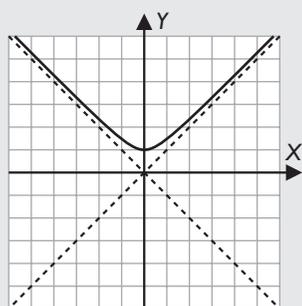
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en toda la real \mathbb{R}
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: A(0, 1)

Signo:

 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: A(0, 1)

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): (0, $+\infty$)
 - Decreciente (\searrow): ($-\infty, 0$)
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$

50 $y = \sqrt{x^2 - 9}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y''' = \frac{27x}{(x^2 - 9)^2\sqrt{x^2 - 9}}$$

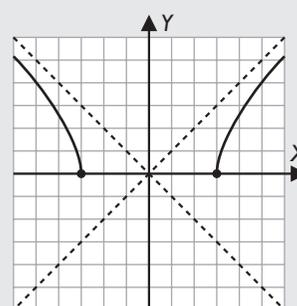
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -3, x = 3$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-3, 0), B(3, 0)
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): (3, $+\infty$)
 - Decreciente (\searrow): ($-\infty, -3$)
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

Ejercicios y problemas propuestos

51 $y = \sqrt{9 - x^2}$

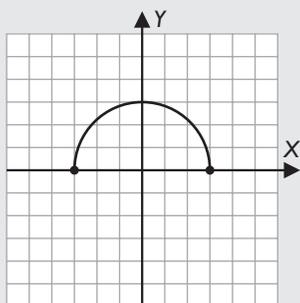
Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{27x}{(9 - x^2)^2\sqrt{9 - x^2}}$$

- Tipo de función: irracional.
 - Dominio: $\text{Dom}(f) = [-3, 3]$
 - Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -3$, $x = 3$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
 - Periodicidad: no es periódica.
 - Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 - Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 - Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$
 - Eje Y: $C(0, 3)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-3, 3)$
 - Negativa (-): \emptyset
 - Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(0, 3)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-3, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 3)$
 - Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-3, 3)$
- Es una semicircunferencia.



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, 3]$

52 $y = \sqrt[3]{x^2}$

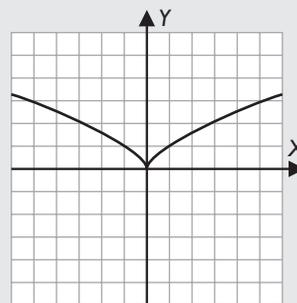
Solución:

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9x^2\sqrt[3]{x}}$$

$$y''' = \frac{8}{27x^3\sqrt[3]{x}}$$

- Tipo de función: irracional.
 - Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Continuidad: es continua en toda la recta real.
 - Periodicidad: no es periódica.
 - Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 - Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 - Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
 - Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
 - Punto de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

53 $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

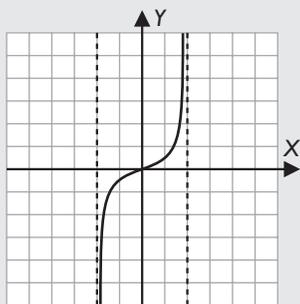
Solución:

$$y' = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = \frac{12x}{(4-x^2)^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$y''' = \frac{48(x^2+1)}{(4-x^2)^3\sqrt{4-x^2}}$$

- Tipo de función: cociente de una polinómica entre una irracional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = (-2, 2)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2$, $x = 2$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(0, 2)$
 - Negativa (-): $(-2, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-2, 2)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, 2)$
 - Cóncava (\cap): $(-2, 0)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

5. Análisis de funciones exponenciales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

54 $y = (x + 2)e^{-x}$

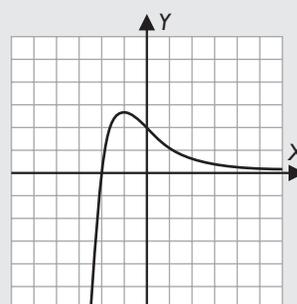
Solución:

$$y' = -(x + 1)e^{-x}$$

$$y'' = xe^{-x}$$

$$y''' = -(x - 1)e^{-x}$$

- Tipo de función: polinómica por exponencial.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$
 - Eje Y: $B(0, 2)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(-1, e)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1)$
 - Decreciente (\searrow): $(-1, +\infty)$
- Punto de inflexión: $B(0, 2)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, e]$

Ejercicios y problemas propuestos

55 $y = xe^x$

Solución:

$$y' = (x + 1)e^x$$

$$y'' = (x + 2)e^x$$

$$y''' = (x + 3)e^x$$

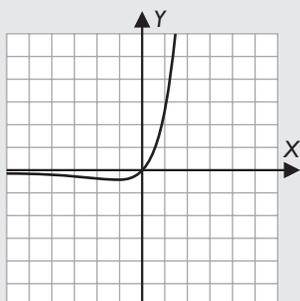
1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(-1, -1/e)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1)$
 9. Punto de inflexión: $B(-2, -2/e^2)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(-2, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -2)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-1/e, +\infty)$

56 $y = \frac{e^{-x}}{x}$

Solución:

$$y' = -\frac{(x + 1)e^{-x}}{x^2}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^{-x}}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}}{x^4}$$

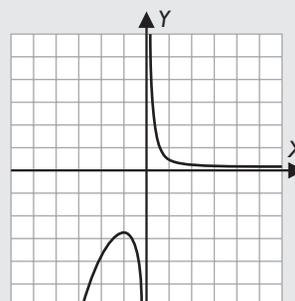
1. Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-1, -e)$
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1)$
 - Decreciente (\searrow): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, -e] \cup (0, +\infty)$

57 $y = xe^{1/x}$

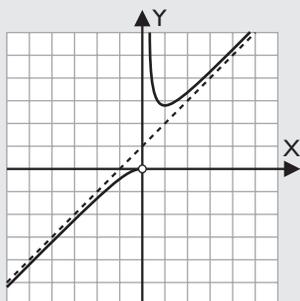
Solución:

$$y' = \frac{(x-1)e^{1/x}}{x}$$

$$y'' = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{(3x+1)e^{1/x}}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x + 1$
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(1, e)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

58 $y = e^{x^2}$

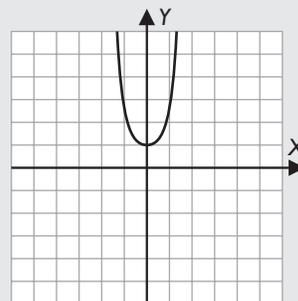
Solución:

$$y' = 2xe^{x^2}$$

$$y'' = (4x^2 + 2)e^{x^2}$$

$$y''' = (2x^2 + 3)4xe^{x^2}$$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, 1)$
- Signo:
 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(0, 1)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$

Ejercicios y problemas propuestos

59 $y = \frac{e^{-x}}{x^2}$

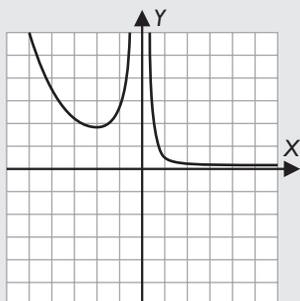
Solución:

$$y' = -\frac{(x+2)e^{-x}}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 4x + 6)e^{-x}}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{(x^3 + 6x^2 + 18x + 24)e^{-x}}{x^5}$$

- Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
 - Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
 - Periodicidad: no es periódica.
 - Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 - Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
 - Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
 - Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(-2, e^2/4)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-2, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
 - Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

6. Análisis de funciones logarítmicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

60 $y = \ln(x^2 + 1)$

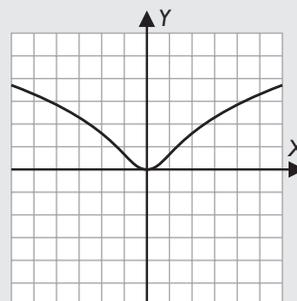
Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

- Tipo de función: logarítmica.
 - Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Continuidad: es continua en toda la recta real \mathbb{R}
 - Periodicidad: no es periódica.
 - Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 - Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 - Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
 - Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
 - Puntos de inflexión: $B(-1, \ln 2)$, $C(1, \ln 2)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(-1, 1)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

61 $y = \ln(x^2 - 4)$

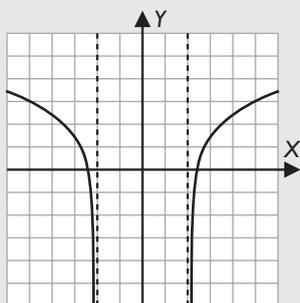
Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 + 48x}{(x^2 - 4)^3}$$

- Tipo de función: logarítmica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = -2$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2$, $x = 2$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-\sqrt{5}, 0)$, $B(\sqrt{5}, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5})$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -2)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

62 $y = \ln(x - 1)^2$

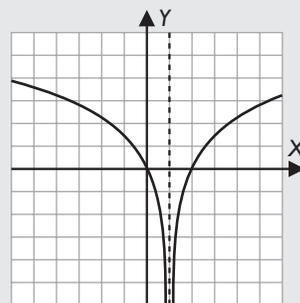
Solución:

$$y' = \frac{2}{x - 1}$$

$$y'' = -\frac{2}{(x - 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4}{(x - 1)^3}$$

- Tipo de función: logarítmica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1) \cup (1, 2)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(1, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 1)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Ejercicios y problemas propuestos

63 $y = \frac{1}{\ln x}$

Solución:

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 + \ln x}{x^2 \ln^3 x}$$

$$y''' = -\frac{2(\ln^2 x + 3 \ln x + 3)}{x^3 \ln^4 x}$$

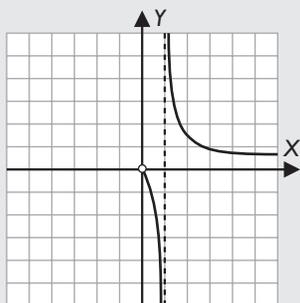
1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): \emptyset
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
 9. Punto de inflexión: $A(1/e^2, -1/2)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(0, 1/e^2) \cup (1, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(1/e^2, 1)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

64 $y = \frac{x}{\ln x}$

Solución:

$$y' = \frac{-1 + \ln x}{\ln^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

$$y''' = \frac{-6 + \ln^2 x}{x^2 \ln^4 x}$$

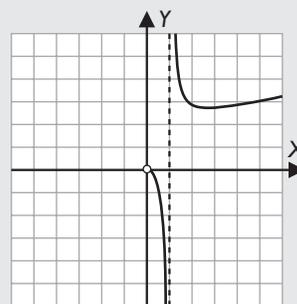
1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(e, e)$

Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(e, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, e)$
 9. Punto de inflexión: $B(e^2, e^2/2)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(1, e^2)$
 - Cóncava (\cap): $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$

65 $y = \ln^2 x$

Solución:

$$y' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$y'' = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$y''' = \frac{2(-3 + 2 \ln x)}{x^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica al cuadrado.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
- Negativa (-): \emptyset

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $A(1, 0)$

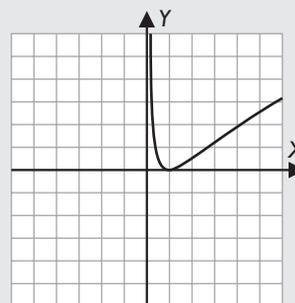
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(1, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(0, 1)$

9. Punto de inflexión: $B(e, 1)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, e)$
- Cóncava (\cap): $(e, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

Para ampliar

66 Dada la función $y = x^3 + 2x$

- a) Halla los puntos de inflexión.
- b) Esboza la gráfica.

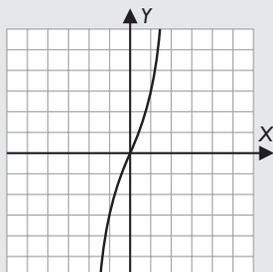
Solución:

$$y' = 3x^2 + 2$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6 \neq 0$$

- a) $A(0, 0)$
- b) Gráfica:



67 Dada la función $y = x^4$

- a) Halla y clasifica los puntos singulares.
- b) Esboza la gráfica.

Solución:

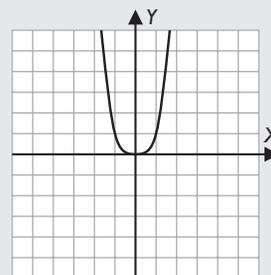
$$y' = 4x^3$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

$$y^{IV} = 24 > 0 (+)$$

- a) $A(0, 0)$ mínimo relativo.
- b) Gráfica:



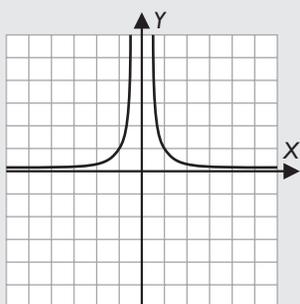
Ejercicios y problemas propuestos

68 Dada la función $y = \frac{1}{x^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Esboza la gráfica.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
- Gráfica:



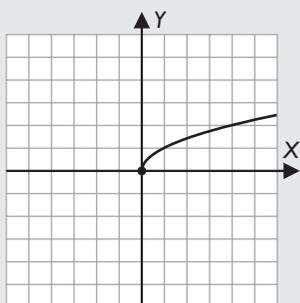
69 Dada la función $y = \sqrt{x}$

- Calcula el dominio.
- Determina la monotonía.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Gráfica:



70 Dada la función $y = x^4 - 6x^2 + 5$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 - 12x$$

$$y'' = 12x^2 - 12$$

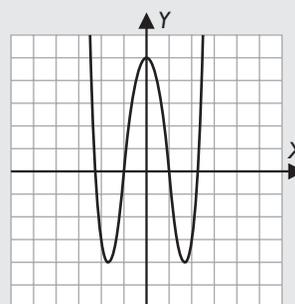
$$y''' = 24x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 5)$
- Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -4)$; $C(\sqrt{3}, -4)$

b) Puntos de inflexión: $D(-1, 0)$; $E(1, 0)$

c) Gráfica:



71 Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

- Determina los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Con los datos obtenidos haz un esbozo de la función.

Solución:

$$y' = 3x^2 - 12x$$

$$y'' = 6x - 12$$

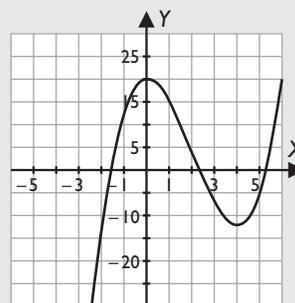
$$y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 20)$
- Mínimo relativo: $B(4, -12)$

b) Punto de inflexión: $C(2, 4)$

c) Gráfica:



72 Dada la función $y = x^4 - 2x^2$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4$$

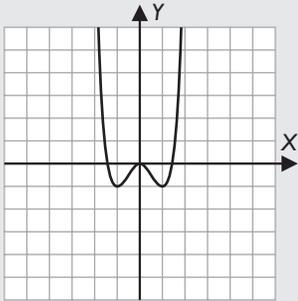
$$y''' = 24x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $O(0, 0)$
- Mínimo relativo: $A(-1, -1)$; $B(1, -1)$

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, -5/9)$; $D(\sqrt{3}/3, -5/9)$

c) Gráfica:

**73** Dada la función $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

a) Calcula el dominio.

b) Determina las asíntotas.

c) Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

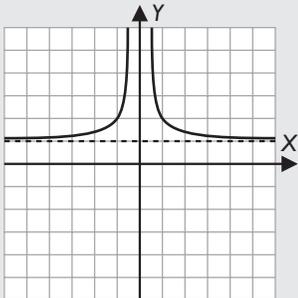
$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 1$

c) Gráfica:

**74** Dada la función $y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) Halla los máximos y mínimos relativos.

b) Halla los puntos de inflexión.

c) Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

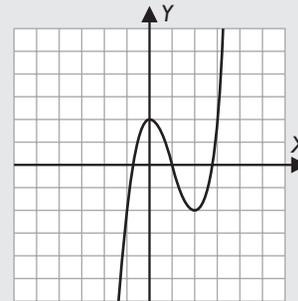
$$y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 2)$
- Mínimo relativo: $B(2, -2)$

b) Punto de inflexión: $C(1, 0)$

c) Gráfica:

**75** Dada la función $y = 6x^2 - 3x^4$

a) Halla los máximos y mínimos relativos.

b) Halla los puntos de inflexión.

c) Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 12x - 12x^3$$

$$y'' = 12 - 36x^2$$

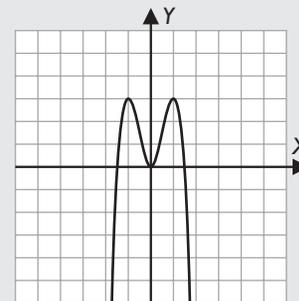
$$y''' = -72x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-1, 3)$; $B(1, 3)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/3)$; $D(\sqrt{3}/3, 5/3)$

c) Gráfica:



Problemas

76 Dada la función $y = x^3 + 3x^2$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

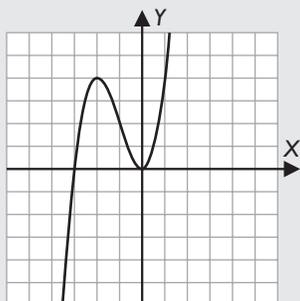
$$y' = 3x^2 + 6x \quad y'' = 6x + 6 \quad y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-2, 4)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

b) Punto de inflexión: $C(-1, 2)$

c) Gráfica:



77 Dada la función $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$y''' = -\frac{12x+12}{(x-1)^5}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$
- Horizontales: $y = 1$

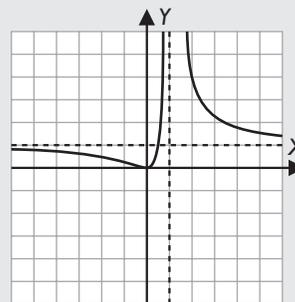
c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

d) Punto de inflexión:

$A(-1/2, 1/9)$

e) Gráfica:



78 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

- Determina los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Calcula los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica de la función.

Solución:

$$y' = -6x^2 - 18x - 12$$

$$y'' = -12x - 18$$

$$y''' = -12$$

a) Puntos de corte con los ejes:

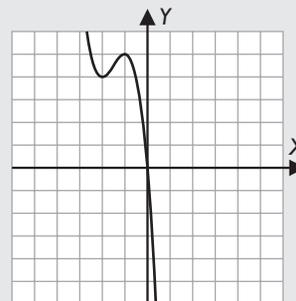
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-1, 5)$
- Mínimo relativo: $B(-2, 4)$

c) Punto de inflexión: $C(-3/2, 9/2)$

d) Gráfica:



79 Dada la función $y = 2x^2 - x^4$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

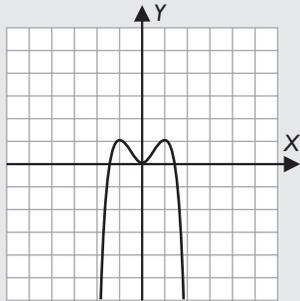
Solución:

$$y' = 4x - 4x^3$$

$$y'' = 4 - 12x^2$$

$$y''' = -24x$$

- a) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$
- b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/9)$, $D(\sqrt{3}/3, 5/9)$
- c) Gráfica:



- 80** Dada la siguiente función, definida en los números reales salvo en $x = 0$:

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

- a) Determina el dominio.
 b) Halla las asíntotas.
 c) Calcula las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
 d) Esboza la gráfica de la función.

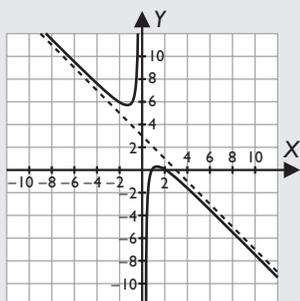
Solución:

$$y' = \frac{2}{x^2} - 1$$

$$y'' = -\frac{4}{x^3}$$

$$y''' = \frac{12}{x^4}$$

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 b) Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Oblicuas: $y = 3 - x$
- c) Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$
 - Mínimo relativo: $B(-\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$
- d) Gráfica:



- 81** Sea la función $V(t) = 60 \left(\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t \right)$

- a) Calcula los máximos y mínimos relativos.
 b) Determina los puntos de inflexión.
 c) Esboza la gráfica de la función.

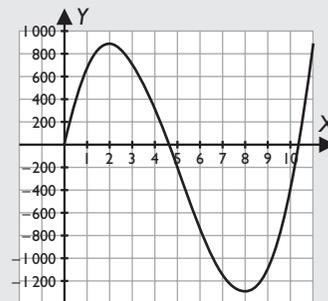
Solución:

$$v'(t) = 60(t^2 - 10t + 16)$$

$$v''(t) = 60(2t - 10)$$

$$v'''(t) = 120$$

- a) Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(2, 880)$
 - Mínimo relativo: $B(8, -1280)$
- b) Punto de inflexión: $C(5, -200)$
- c) Gráfica:



- 82** Sea f la función definida para $x \neq -2$ por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

- a) Halla las asíntotas de la gráfica de f
 b) Calcula los extremos locales de f
 c) Determina los puntos de inflexión.
 d) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{8}{(x+2)^3}$$

$$y''' = -\frac{24}{(x+2)^4}$$

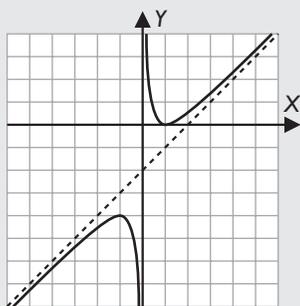
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

- a) Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2$
 - Oblicuas: $y = x - 2$
- b) Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-4, -8)$
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$

Ejercicios y problemas propuestos

c) $y'' \neq 0$. No hay puntos de inflexión.

d) Gráfica:



83 Halla y clasifica los puntos singulares de la función:

$$y = x^4 + x^2$$

Esboza la gráfica.

Solución:

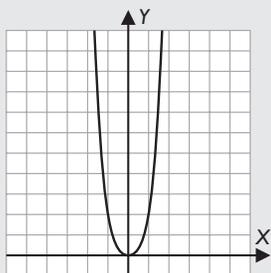
$$y' = 4x^3 + 2x$$

$$y'' = 12x^2 + 2$$

$$y''' = 24x$$

a) Punto singular: $A(0, 0)$ es un mínimo relativo.

b) Gráfica:



84 Dada la curva $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) Determina el dominio de definición.

b) Halla las simetrías.

c) Halla los puntos de corte con los ejes.

d) Calcula las asíntotas.

e) Halla los máximos y mínimos relativos.

f) Haz una representación aproximada.

Solución:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{42x^2 + 56}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{168x^3 + 672x}{(x^2 - 4)^4}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

c) Corte con los ejes:

• Eje X: no lo corta.

• Eje Y: $A(0, -3/4)$

d) Asíntotas:

• Verticales: $x = -2, x = 2$

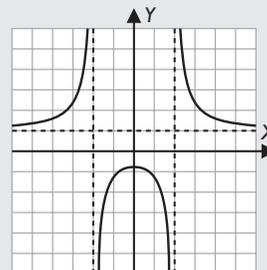
• Horizontales: $y = 1$

e) Máximos y mínimos relativos:

• Máximo relativo: $A(0, -3/4)$

• Mínimo relativo: no tiene.

f) Gráfica:



85 Dada la función $y = x^4 + 4x$

a) Halla y clasifica los puntos singulares.

b) Calcula los puntos de inflexión.

c) Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 + 4$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

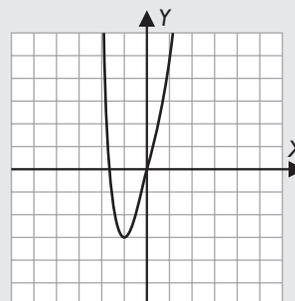
a) Máximos y mínimos relativos:

• Máximo relativo: no tiene.

• Mínimo relativo: $A(-1, -3)$

b) Puntos de inflexión: no tiene.

c) Gráfica:



86 Dada la función $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

a) Calcula el dominio.

b) Halla las simetrías.

c) Determina las asíntotas.

d) Halla los puntos de corte con los ejes.

e) Esboza la gráfica.

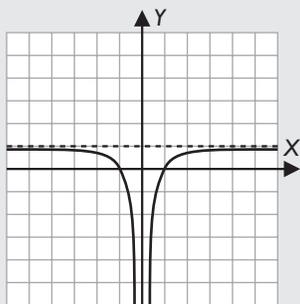
Solución:

$$y' = \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{6}{x^4}$$

$$y''' = \frac{24}{x^5}$$

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 b) Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 c) Asíntotas:
 • Verticales: $x = 0$
 • Horizontales: $y = 1$
 d) Corte con los ejes:
 • Eje X: $A(-1, 0); B(1, 0)$
 • Eje Y: no lo corta.
 e) Gráfica:



87 Dada la función $y = \frac{x(x+2)}{x^2-1}$

- a) Calcula el dominio.
 b) Determina las asíntotas.
 c) Halla los puntos de corte con los ejes.
 d) Esboza la gráfica.

Solución:

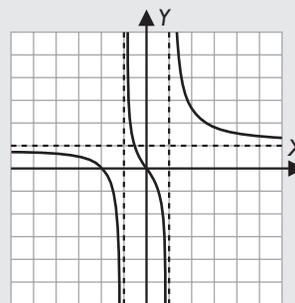
$$y' = -\frac{2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 + 6x^2 + 12x + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{12x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 24x + 12}{(x^2 - 1)^4}$$

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
 b) Asíntotas:
 • Verticales: $x = -1, x = 1$
 • Horizontales: $y = 1$
 c) Corte con los ejes:
 • Eje X: $A(-2, 0); O(0, 0)$
 • Eje Y: $O(0, 0)$

d) Gráfica:



88 Dada la función $y = 3x^5 - 5x^3$

- a) Determina las simetrías.
 b) Calcula los puntos de corte con los ejes.
 c) Halla los máximos y mínimos relativos.
 d) Halla los puntos de inflexión.
 e) Esboza la gráfica.

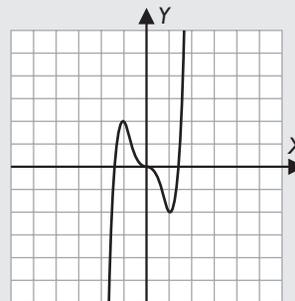
Solución:

$$y' = 15x^4 - 15x^2$$

$$y'' = 60x^3 - 30x$$

$$y''' = 180x^2 - 30$$

- a) Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 b) Corte con los ejes:
 • Eje X: $A(-\sqrt{15/3}, 0); O(0, 0); B(\sqrt{15/3}, 0)$
 • Eje Y: $O(0, 0)$
 c) Máximos y mínimos relativos:
 • Máximo relativo: $A(-1, 2)$
 • Mínimo relativo: $B(1, -2)$
 d) Puntos de inflexión:
 $C(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8); O(0, 0); D(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$
 e) Gráfica:

**Para profundizar**

89 Dada la función $y = x^3 + 3x$

- a) Halla los puntos de corte con los ejes.
 b) Calcula los máximos y mínimos relativos.
 c) Determina los puntos de inflexión.
 d) Esboza la gráfica.

Ejercicios y problemas propuestos

Solución:

$$y' = 3x^2 + 3$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

a) Corte con los ejes:

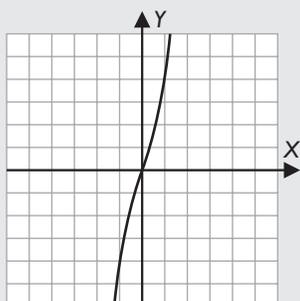
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

c) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

d) Gráfica:



90 Dada la función $y = x^4 + 2x^2$

- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 + 4x$$

$$y'' = 12x^2 + 4$$

$$y''' = 24x$$

$$y^{IV} = 24$$

a) Corte con los ejes:

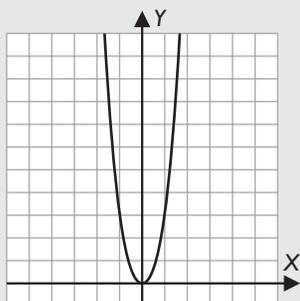
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

c) Puntos de inflexión: no tiene.

d) Gráfica:



91 Dada la función $y = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Calcula los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{4x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$y'' = \frac{8x + 2}{(x - 2)^4}$$

$$y''' = -\frac{24x + 24}{(x - 2)^5}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 2$
- Horizontales: $y = 1$

c) Corte con los ejes:

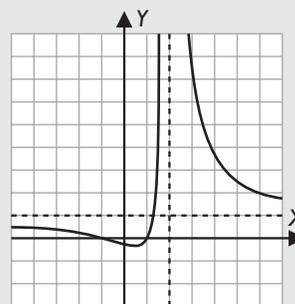
- Eje X: $A(-1, 0); B(1, 0)$
- Eje Y: $C(0, -1/4)$

d) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $D(1/2, -1/3)$

e) Punto de inflexión: $O(-1/4, -5/27)$

f) Gráfica:



92 Se considera la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$$

- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los intervalos de concavidad y convexidad.
- Representala gráficamente.

Solución:

$$y' = 6x^2 - 42x + 60$$

$$y'' = 12x - 42$$

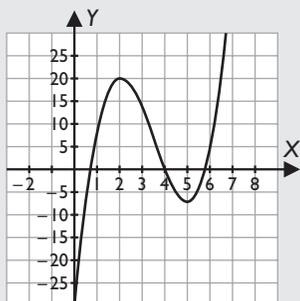
$$y''' = 12$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(2, 20)$
- Mínimo relativo: $B(5, -7)$

b) Punto de inflexión: $C(7/2, 13/2)$

c) Gráfica:



93 Dada la función $y = x^4 - 4x$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 - 4$$

$$y'' = 12x^2$$

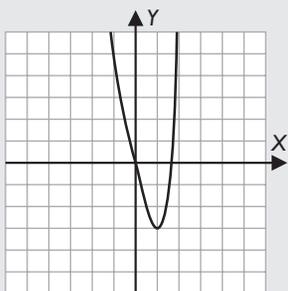
$$y''' = 24x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $A(1, -3)$

b) Puntos de inflexión: no tiene.

c) Gráfica:



94 Dada la función $y = 3x^2 - x^3$

- Calcula los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 6x - 3x^2$$

$$y'' = 6 - 6x$$

$$y''' = -6$$

a) Corte con los ejes:

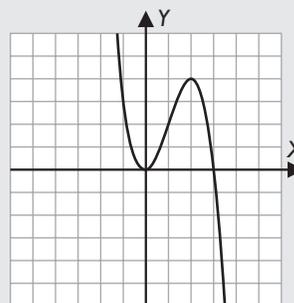
- Eje X: $O(0, 0)$; $A(3, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $B(2, 4)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

c) Punto de inflexión: $C(1, 2)$

d) Gráfica:



95 Dada la función $y = e^x - e^{-x}$

- Determina las simetrías.
- Calcula los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = e^x + e^{-x}$$

$$y'' = e^x - e^{-x}$$

$$y''' = e^x + e^{-x}$$

a) Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

b) Corte con los ejes:

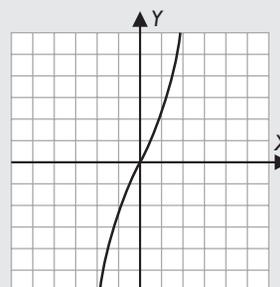
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

d) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

e) Gráfica:



Ejercicios y problemas propuestos

96 Dada la función $y = \sqrt{x^2 + 9}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Esboza la gráfica.

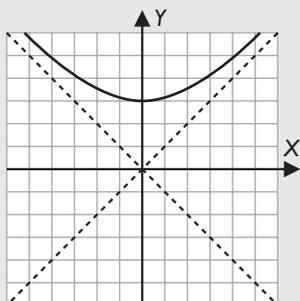
Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$y'' = \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$y''' = -\frac{27x}{(x^2 + 9)^2\sqrt{x^2 + 9}}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Asíntotas:
 - Oblicuas: $y = x$, $y = -x$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(0, 3)$
- Gráfica:



97 Dada la función $y = -(x + 2)e^{-x}$

- Calcula las asíntotas.
- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

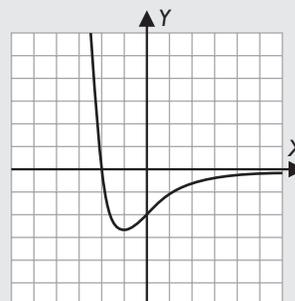
Solución:

$$y' = (x + 1)e^{-x}$$

$$y'' = -xe^{-x}$$

$$y''' = (x - 1)e^{-x}$$

- Asíntotas:
 - Horizontales: $y = 0$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$
 - Eje Y: $B(0, -2)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $C(-1, -e)$
- Punto de inflexión: $D(0, -2)$
- Gráfica:



Practica

Representa las siguientes funciones completando para cada una de ellas el formulario de los 10 apartados:

99 Representa y analiza la función:

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

Solución:

Ejercicio 99

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4};$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función : polinómica.
2. Dominio : por ser una función polinómica es toda la recta real.
Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad : por ser una función polinómica es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad : por ser una función polinómica no es periódica.
5. Simetrías :

$$f(-x) \Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asintotas : por ser una función polinómica no tiene asíntotas.

7. Corte con los ejes :

$$\text{resolver}(f(x) = 0) \Rightarrow \{x=0\}, \{x=-2\sqrt{2}\}, \{x=2\sqrt{2}\}$$

· Eje X : O(0, 0), A(-2·√2, 0); B(2·√2, 0)

O = punto(0, 0) \Rightarrow (0, 0)

A = punto(-2·√2, 0);

B = punto(2·√2, 0);

dibujar(O, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})

· Eje Y : O(0, 0)

Signo :

· Positiva (+) : $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

· Negativa (-) : $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \Rightarrow -x^3 + 4 \cdot x$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \Rightarrow \{x=-2\}, \{x=0\}, \{x=2\}$$

$$f(0) \Rightarrow 0$$

O = punto(0, 0) \Rightarrow (0, 0)

$$f''(0) \Rightarrow 4$$

· Mínimo relativo : O(0, 0)

$$f(-2) \Rightarrow 4$$

C = punto(-2, 4) \Rightarrow (-2, 4)

$$f''(-2) \Rightarrow -8$$

· Máximo relativo : A(-2, 4)

dibujar(C, {color = azul, tamaño_punto = 8})

$$f(2) \Rightarrow 4$$

D = punto(2, 4) \Rightarrow (2, 4)

$$f''(2) \Rightarrow -8$$

· Máximo relativo : B(2, 4)

dibujar(D, {color = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

· Creciente : $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

· Decreciente : $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

9. Puntos de inflexión :

$$f''(x) \Rightarrow -3 \cdot x^2 + 4$$

$$\text{resolver}(f''(x) = 0) \Rightarrow \left\{ \left[x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \right], \left[x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right] \right\}$$

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \frac{20}{9}$$

E = punto $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$;

$$f''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow 4\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \frac{20}{9}$$

F = punto $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$;

$$f''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow -4\sqrt{3}$$

$$\text{Puntos de inflexión : } E\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right); F\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$$

dibujar(E, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

dibujar(F, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

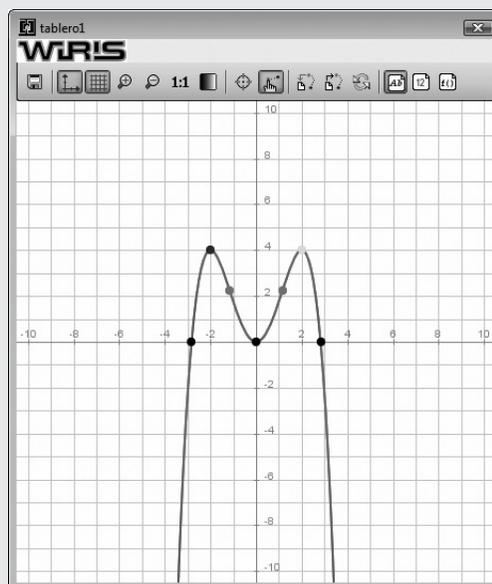
Curvatura :

· Convexa (U) : $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

· Cóncava (∩) : $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

10. Recorrido o imagen :

$$\text{Img}(f) = (-\infty, 4]$$



100 Representa y analiza la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

Ejercicio 100

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x};$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función : racional.
2. Dominio : por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.
Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad : es discontinua en $x = 0$ donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad : por ser una función racional no es periódica.
5. Simetrías :

$$f(-x) \Rightarrow \frac{-x^2 - 1}{x}$$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0)

6. Asintotas :

· Verticales : $x = 0$

dibujar(x = 0, {color=verde, anchura_linea=2})

· Horizontales : no tiene.

· Oblicuas :

$$x^2 + 1 \mid x \Rightarrow x^2 + 1 \mid \frac{x}{x}$$

$$y = x$$

dibujar(y = x, {color=verde, anchura_linea=2})

7. Corte con los ejes :

resolver($f(x) = 0$) \rightarrow {}

- Eje X : No lo corta.
- Eje Y : No lo corta.

Signo :

- Positiva (+) : (0, $+\infty$)
- Negativa (-) : ($-\infty$, 0)

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}$$

resolver($f'(x) = 0$) \rightarrow {{x=-1},{x=1}}

$$f(-1) \rightarrow -2$$

A = punto(-1, -2);

$$f'(-1) \rightarrow -2$$

- Máximo relativo : A(-1, -2)

dibujar(A, {color = azul, tamano_punto = 8})

$$f(1) \rightarrow 2$$

B = punto(1, 2);

$$f'(1) \rightarrow 2$$

- Mínimo relativo : B(1, 2)

dibujar(B, {color = cian, tamano_punto = 8})

Monotonía :

- Creciente : ($-\infty$, -1) \cup (1, $+\infty$)
- Decreciente : (-1, 0) \cup (0, 1)

9. Puntos de inflexión :

$$f''(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$$

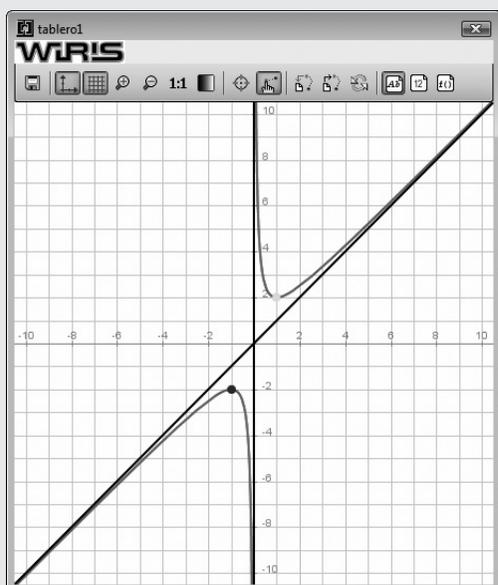
Puntos de inflexión : no tiene.

Curvatura :

- Convexa (\cup) : (0, $+\infty$)
- Cóncava (\cap) : ($-\infty$, 0)

10. Recorrido o imagen :

$$\text{Im}g(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$



101 Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función:

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

a) A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? Que porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibuja la gráfica de la función $S(t)$ para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

Solución:

Ejercicio 101

a) Máxima y mínima audiencia.

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3;$$

$$S'(t) \rightarrow -3 \cdot t^2 + 54 \cdot t - 231$$

$$S'(t) / (-3) \rightarrow t^2 - 18 \cdot t + 77$$

$$\text{resolver}(S'(t) = 0) \rightarrow \{t=7\}, \{t=11\}$$

$$S(7) \rightarrow 23$$

A = punto(7, 23);

$$S''(7) \rightarrow 12$$

- Mínimo relativo : A(7, 23)

- Mínima audiencia a las 7 h con un 23%

$$S(11) \rightarrow 55$$

B = punto(11, 55);

$$S''(11) \rightarrow -12$$

- Máximo relativo B(11, 55)

- Máxima audiencia a las 11 h con un 55%

b) Gráfica en el intervalo [6, 12]

$$S(6) \rightarrow 30$$

C = punto(6, 30);

$$S(12) \rightarrow 48$$

D = punto(12, 48);

tablero({centro = punto(7, 30), anchura = 15, altura = 65})

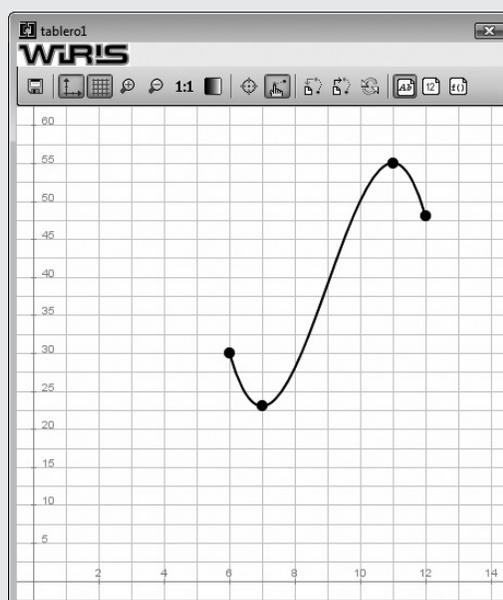
dibujar(S(t), 6..12, {color = negro, anchura_lnea = 2})

dibujar(C, {color = negro, tamano_punto = 10})

dibujar(A, {color = negro, tamano_punto = 10})

dibujar(B, {color = negro, tamano_punto = 10})

dibujar(D, {color = negro, tamano_punto = 10})



102 En una región, un río tiene la forma de la curva

$$y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

y es cortada por un camino según el eje X.

Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes de coordenadas, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

Solución:

Ejercicio 102

$$f(x) = \frac{x^3}{4} - x^2 + x;$$

tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 8, altura = 8})

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

a) Corte con los ejes

$$\text{factorizar}\left(\frac{x^3}{4} - x^2 + x\right) \rightarrow \frac{1}{4} \cdot x \cdot (x-2)^2$$

$$\text{resolver}(f(x) = 0) \rightarrow \{\{x=0\}, \{x=2\}\}$$

· Corta al eje X: O(0, 0); A(2, 0)

O = punto(0, 0);

A = punto(2, 0);

· Corta al eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos

$$f'(x) \rightarrow \frac{3}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \left\{ \{x=2\}, \left\{x=\frac{2}{3}\right\} \right\}$$

$$f(2) \rightarrow 0$$

A = punto(2, 0);

$$f''(x) \rightarrow \frac{3}{2} \cdot x - 2$$

$$f''(2) \rightarrow 1$$

· Mínimo relativo A(2, 0)

$$f\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow \frac{8}{27}$$

B = punto\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right);

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow -1$$

· Máximo relativo B\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)

dibujar(O, {color = negro, tamaño_punto = 10})

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 10})

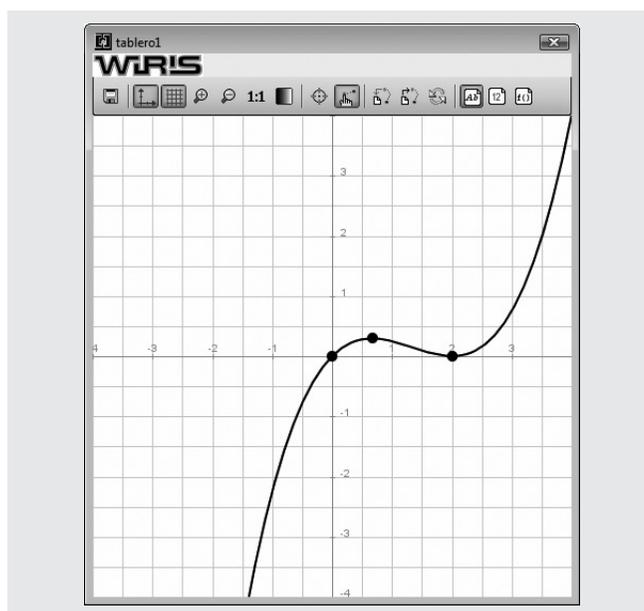
dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 10})

c) Monotonía:

$$f'(0) \rightarrow 1$$

· Creciente: $(-\infty, 2/3) \cup (2, +\infty)$

· Decreciente: $(2/3, 2)$



103 Dada la función:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

se pide:

a) Asíntotas.

b) Máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Dibujar su gráfica.

Solución:

Ejercicio 103

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4};$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

6. Asíntotas:

· Verticales: no tiene, porque nunca se anula el denominador.

· Horizontales:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$$

dibujar(y = 0, {color=verde, anchura_linea=2})

· Oblicuas: no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

8. Máximos y mínimos relativos:

$$f'(x) \rightarrow \frac{-8 \cdot x^2 + 32}{x^4 + 8 \cdot x^2 + 16}$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{\{x=-2\}, \{x=2\}\}$$

$$f(-2) \rightarrow -2$$

A = punto(-2, -2) \rightarrow (-2, -2)

$$f''(x) \rightarrow \frac{16 \cdot x^3 - 192 \cdot x}{x^6 + 12 \cdot x^4 + 48 \cdot x^2 + 64}$$

$$f''(-2) \rightarrow \frac{1}{2}$$

· Mínimo relativo: A(-2, -2)

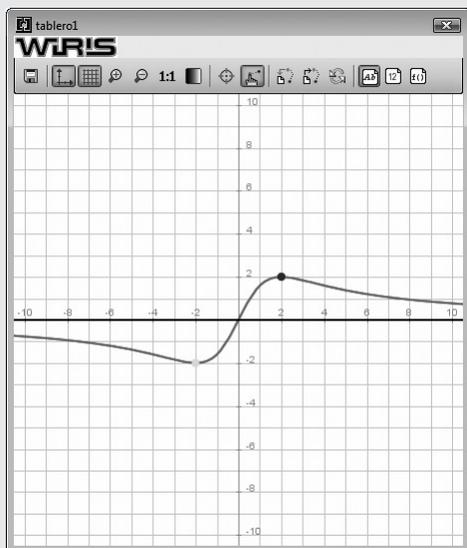
dibujar(A, {color = cian, tamaño_punto = 8})

$$f(2) \rightarrow 2$$

B = punto(2, 2);

$$f''(2) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

· Máximo relativo : B (2, 2)
 dibujar(B, {color = azul, tamaño_punto = 8})
 Monotonía :
 $f'(0) \rightarrow 2$
 · Creciente : $(-2, 2)$
 · Decreciente : $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

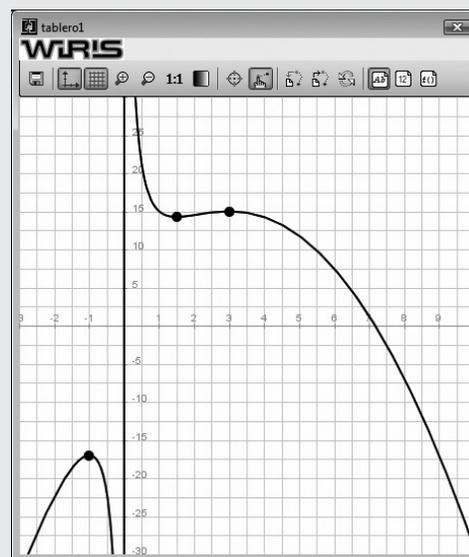


104 Dada la función: $f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x}$

razona a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ y de los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo.

Solución:

Ejercicio 104
 $f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x}$;
 tablero({centro = punto(3.5, 0), anchura = 13, altura = 60})
 dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})
 a) Dominio
 Los dos primeros términos son una función polinómica y existe siempre. El tercer término es una función racional y existe siempre menos cuando se anula el denominador, $x = 0$
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 dibujar(x = 0, {color = negro, anchura_linea = 2})
 b) Máximos y mínimos relativos
 $\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x = -1\}, \{x = 3\}, \{x = \frac{3}{2}\}$
 $f(-1) \rightarrow -17$
 $A = \text{punto}(-1, -17)$
 $f'(-1) \rightarrow -20$
 · Máximo relativo A(-1, -17)
 $f(3) \rightarrow 15$
 $B = \text{punto}(3, 15)$
 $f'(3) \rightarrow -\frac{4}{3}$
 · Máximo relativo A(3, 15)
 $f(\frac{3}{2}) \rightarrow \frac{57}{4}$
 $C = \text{punto}(\frac{3}{2}, \frac{57}{4})$
 $f'(\frac{3}{2}) \rightarrow \frac{10}{3}$
 · Mínimo relativo A($\frac{3}{2}, \frac{57}{4}$)
 dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 10})
 dibujar(C, {color = negro, tamaño_punto = 10})
 dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 10})



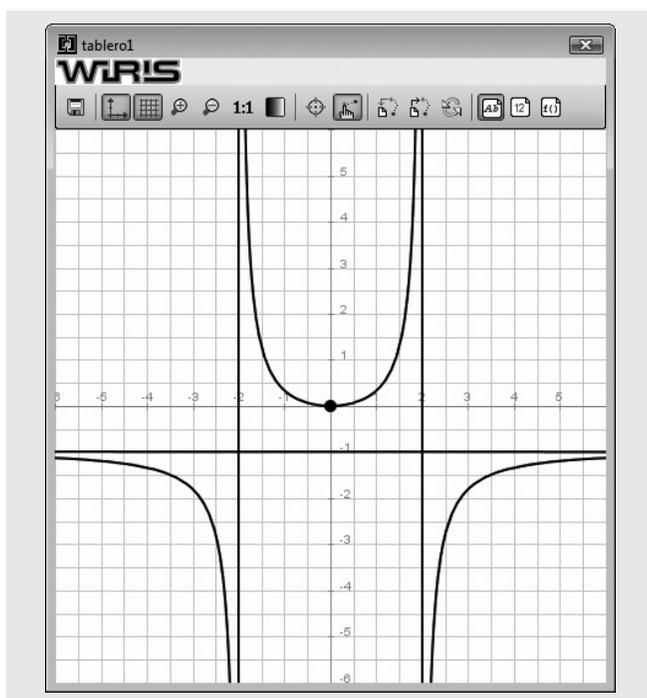
105 Dada la función: $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$

dibuja la gráfica estudiando:

- Dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Ecuación de sus asíntotas.
- Máximos y mínimos relativos.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Utiliza la información anterior para representar la gráficamente.

Solución:

Ejercicio 105
 $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$;
 tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12})
 dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})
 a) Dominio y corte con los ejes
 Es una función racional y existe siempre menos cuando se anula el denominador, $x_1 = -2, x_2 = 2$
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
 Punto de corte con los ejes O(0, 0)
 b) Asíntotas
 · Verticales : $x = -2, x = 2$
 dibujar(x = -2, {color = negro, anchura_linea = 2})
 dibujar(x = 2, {color = negro, anchura_linea = 2})
 · Horizontales :
 $h = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow -1$
 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -1$
 Asíntota horizontal : $y = -1$
 dibujar(y = -1, {color = negro, anchura_linea = 2})
 · Asíntota oblicua : no tiene porque el grado del numerador no es uno más que el grado del denominador.
 c) Máximos y mínimos relativos
 $\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x=0\}$
 $f(0) \rightarrow 0$
 $O = \text{punto}(0, 0)$
 $f'(0) \rightarrow \frac{1}{2}$
 · Mínimo relativo : O(0, 0)
 dibujar(O, {color = negro, tamaño_punto = 10})



106 Dada la función:

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

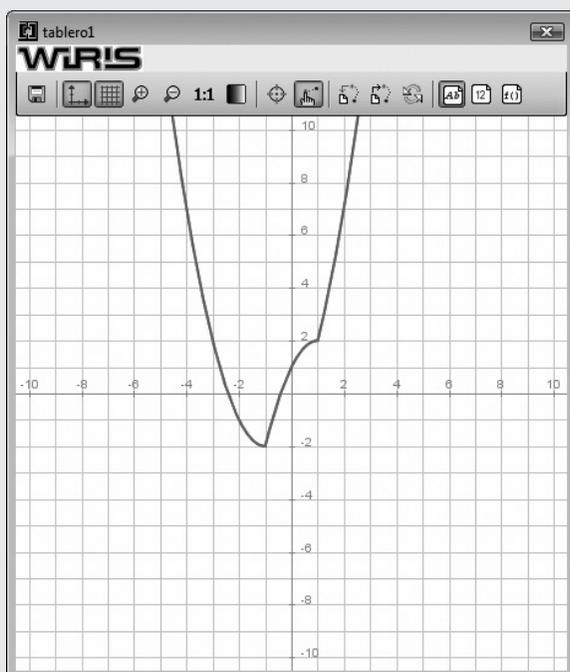
dibuja la gráfica de $f(x)$

Solución:

Ejercicio 106

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|;$$

dibujar $(f(x), \{\text{color} = \text{rojo}, \text{anchura_línea} = 2\})$



107 Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

e indica su dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Ejercicio 107

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x};$$

dibujar $(f(x), \{\text{color} = \text{rojo}, \text{anchura_línea} = 2\})$

2. Dominio :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

6. Asíntotas :

· Verticales : $x = 2$

dibujar $(x = 2, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura_línea} = 2\})$

· Horizontales :

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 1$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -1$$

dibujar $(y = -1, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura_línea} = 2\})$

dibujar $(y = 1, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura_línea} = 2\})$

· Oblicuas : no tiene, porque el grado del numerador no es uno mayor que el del denominador.

8. Monotonía :

$$f'(1) \rightarrow 2$$

· Creciente : $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

· Decreciente : $(-\infty, 0)$

