Unidad 7.
Cálculo de derivadas

1. Reglas de derivación. Tabla de derivadas

Aplica la teoría

Deriva en función de *x*:

1 $y = 2x - 1$

Solución:
$y' = 2$

2 $y = (2x - 1)^5$

Solución:
$y' = 10(2x - 1)^4$

3 $y = \sqrt{7x + 3}$

Solución:
$y' = \dfrac{7}{2\sqrt{7x + 3}}$

4 $y = \dfrac{3}{(x - 4)^6}$

Solución:
$y' = -\dfrac{18}{(x - 4)^7}$

5 $y = \dfrac{1}{x}$

Solución:
$y' = -\dfrac{1}{x^2}$

6 $y = \ln (x^2 + x)$

Solución:
$y' = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x}$

7 $y = \ln x^2$

Solución:
$y' = \dfrac{2}{x}$

8 $y = \dfrac{5}{x^3}$

Solución:
$y' = -\dfrac{15}{x^4}$

9 $y = 3^{5x}$

Solución:
$y' = 5 \cdot 3^{5x} \ln 3$

10 $y = \sqrt[4]{5x}$

Solución:
$y' = \dfrac{5}{4\sqrt[4]{(5x)^3}}$

11 $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{5 - 5x^2}{(x^2 + 1)^2}$

12 $y = \dfrac{2}{(3x - 1)^4}$

Solución:
$y' = -\dfrac{24}{(3x - 1)^5}$

13 $y = e^{7x}$

Solución:
$y' = 7e^{7x}$

14 $y = x^3 - 2x + 1$

Solución:
$y' = 3x^2 - 2$

15 $y = \log(5x + 2)$

Solución:

$y' = \frac{5}{5x + 2}\log e$

16 $y = 2x + \ln x$

Solución:

$y' = 2 + \frac{1}{x}$

17 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 2$, para $x = 4$

Solución:

a) $x = 4 \Rightarrow f(4) = -2 \Rightarrow P(4, -2)$

b) $f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(4) = 3$

c) $y + 2 = 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x - 14$

18 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + x$, para $x = 1$

Solución:

a) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow P(1, 2)$

b) $f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 4$

c) $y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 2$

19 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x$, para $x = 0$

Solución:

a) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow P(0, 0)$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(0) = -3$

c) $y = -3x$

Calcula las cinco primeras derivadas de las siguientes funciones:

20 $y = x^7$

Solución:

$y' = 7x^6$

$y'' = 42x^5$

$y''' = 210x^4$

$y^{IV} = 840x^3$

$y^{V} = 2\,520x^2$

21 $y = e^x$

Solución:

$y' = e^x$

$y'' = e^x$

$y''' = e^x$

$y^{IV} = e^x$

$y^{V} = e^x$

22 $y = x^8 - 7x^2 + 5$

Solución:

$y' = 8x^7 - 14x$

$y'' = 56x^6 - 14$

$y''' = 336x^5$

$y^{IV} = 1\,680x^4$

$y^{V} = 6\,720x^3$

23 $y = e^{2x}$

Solución:

$y' = 2e^{2x}$

$y'' = 4e^{2x}$

$y''' = 8e^{2x}$

$y^{IV} = 16e^{2x}$

$y^{V} = 32e^{2x}$

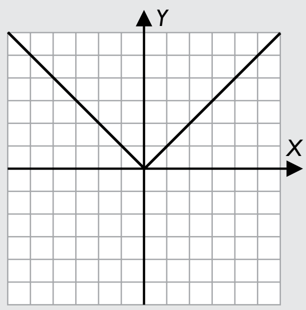
2. Estudio de la derivabilidad

Piensa y calcula

Escribe la función valor absoluto $f(x) = |x|$ como una función definida a trozos y represéntala.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Aplica la teoría

24 Halla la función derivada de la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \le 2 \\ \ln x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

25 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 7 - x & \text{si } 3 < x < 7 \end{cases}$$

justifica si $f(x)$ es derivable en $x = 3$. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado obtenido?

Solución:

a) La continuidad de la función:

$f(3) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 4$$

La función es continua en $x = 3$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -3 < x < 3 \\ -1 & \text{si } 3 < x < 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} 0 = 0 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-1) = -1 \end{cases}$$

$f'(3^-) \ne f'(3^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 3$

La función es continua y no es derivable en $x = 3$; la función tiene en el punto de abscisa $x = 3$ un pico, y en ese punto se pueden dibujar dos tangentes.

26 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

determina el valor de k para que la función sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 5) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + k = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 6$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

Para $k = 6$, la función es continua y las derivadas laterales son iguales; luego la función es derivable en $x = 1$

27 Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1 \end{array}\right\}$$

$f'(2^-) \ne f'(2^+) \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 2$

Ejercicios y problemas

Preguntas tipo test

1 Deriva $f(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{8}{x^2}$

- ❑ $f'(x) = \frac{x}{4} - \frac{16}{x^3}$
- ❑ $f'(x) = -\frac{x}{4} + \frac{16}{x^3}$
- ☒ $f'(x) = \frac{x}{4} + \frac{16}{x^3}$
- ❑ $f'(x) = -\frac{x}{4} - \frac{16}{x^3}$

2 Deriva $f(x) = (2x - 1)^2 \cdot \ln x$

- ☒ $f'(x) = 4(2x - 1) \cdot \ln x + \frac{(2x-1)^2}{x}$
- ❑ $f'(x) = 2(2x - 1) \cdot \ln x + (2x - 1)^2$
- ❑ $f'(x) = (2x - 1)^2 \cdot \ln x + \frac{1}{x}$
- ❑ $f'(x) = 4(2x - 1)^2 \cdot \ln x + 1$

3 Deriva $f(x) = 5\sqrt{\ln x}$

- ❑ $f'(x) = \frac{5}{x\sqrt{\ln x}}$
- ❑ $f'(x) = 10\sqrt{\ln x}$
- ❑ $f'(x) = 5\sqrt{\ln x}$
- ☒ $f'(x) = \frac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

4 Deriva $f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x}$

- ❑ $f'(x) = 6 - 8x + \ln x$
- ☒ $f'(x) = \frac{1}{6} - 16x - \frac{1}{x^2}$
- ❑ $f'(x) = 1 - x - x^2$
- ❑ $f'(x) = \frac{1}{6} - 16x + \frac{1}{x^2}$

5 Deriva $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- ❑ $f'(x) = \frac{x - 1}{(\ln x)^2}$
- ❑ $f'(x) = x \ln x$
- ❑ $f'(x) = 1$
- ☒ $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

6 Deriva $f(x) = xe^{3x}$

- ☒ $f'(x) = (3x + 1)\, e^{3x}$
- ❑ $f'(x) = (3x - 1)\, e^{3x}$
- ❑ $f'(x) = (3x + 1) \ln x$
- ❑ $f'(x) = 9e^{3x}$

7 Deriva $f(x) = x^2 - e^x$

- ❑ $f'(x) = 2x + e^x$
- ❑ $f'(x) = x + e^x$
- ☒ $f'(x) = 2x - e^x$
- ❑ $f'(x) = x - e^x$

8 Si f' es la derivada de la función dada por:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + \frac{3}{x^4} \quad (x \neq 0)$$

calcula $f'(-2)$

- ☒ $f'(-2) = 387/8$
- ❑ $f'(-2) = 1$
- ❑ $f'(-2) = -1$
- ❑ $f'(-2) = 83/6$

9 Encuentra $f'(-2)$, donde f' es la derivada de la función f dada por:

$$f(x) = 4x - x^2 + \frac{2}{x^3} \quad (x \neq 0)$$

- ❑ $f'(-2) = 5$
- ❑ $f'(-2) = -5$
- ☒ $f'(-2) = 61/8$
- ❑ $f'(-2) = 3/8$

10 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

en el punto de abscisa $x = -1$

- ❑ $y = 3x + 2$
- ❑ $y = x - 1$
- ❑ $y = -3x - 2$
- ☒ $y = -3x - 6$

1. Reglas de derivación. Tabla de derivadas

Deriva en función de x:

28 $y = (x^2 - 3)e^x$

Solución:
$y' = (x^2 + 2x - 3)e^x$

29 $y = e^{5x+3}$

Solución:
$y' = 5e^{5x+3}$

30 $y = \ln(x^2 - 7)$

Solución:
$y' = \dfrac{2x}{x^2 - 7}$

31 $y = \dfrac{x}{x+1}$

Solución:
$y' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

32 $y = (2x + 3)^2$

Solución:
$y' = 4(2x + 3)$

33 $y = e^{x^2+3}$

Solución:
$y' = 2xe^{x^2+3}$

34 $y = 2x + \sqrt{x+1}$

Solución:
$y' = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

35 $y = \ln(3x - 2)$

Solución:
$y' = \dfrac{3}{3x - 2}$

36 $y = 2^{7x}$

Solución:
$y' = 7 \cdot 2^{7x} \ln 2$

37 $y = \dfrac{2x}{x-1}$

Solución:
$y' = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

38 $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

39 $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Solución:
$y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

40 $y = \ln \sqrt[4]{x^3 + 5x - 7}$

Solución:
$y' = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 7}$

41 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x - 2$, para $x = 4$

Solución:
a) $x = 4 \Rightarrow f(4) = 2 \Rightarrow P(4, 2)$
b) $f'(x) = -2x + 5 \Rightarrow f'(4) = -3$
c) $y - 2 = -3(x - 4) \Rightarrow y = -3x + 14$

42 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - x + 3$, para $x = 1$

Solución:
a) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow P(1, 3)$
b) $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 2$
c) $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 1$

43 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x$, para $x = -1$

Solución:
a) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -4 \Rightarrow P(-1, -4)$
b) $f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = 6$
c) $y + 4 = 6(x + 1) \Rightarrow y = 6x + 2$

Calcula las cinco primeras derivadas de las siguientes funciones:

44 $y = x^8$

Solución:
$y' = 8x^7$
$y'' = 56x^6$
$y''' = 336x^5$
$y^{IV} = 1\,680x^4$
$y^{V} = 6\,720x^3$

45 $y = e^{-x}$

Solución:

$y' = -e^{-x}$

$y'' = e^{-x}$

$y''' = -e^{-x}$

$y^{IV} = e^{-x}$

$y^{V} = -e^{-x}$

46 $y = x^6 - 2x^5 + 5x - 3$

Solución:

$y' = 6x^5 - 10x^4 + 5$

$y'' = 30x^4 - 40x^3$

$y''' = 120x^3 - 120x^2$

$y^{IV} = 360x^2 - 240x$

$y^{V} = 720x - 240$

47 $y = e^{3x}$

Solución:

$y' = 3e^{3x}$

$y'' = 9e^{3x}$

$y''' = 27e^{3x}$

$y^{IV} = 81e^{3x}$

$y^{V} = 243e^{3x}$

2. Estudio de la derivabilidad

48 Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 4x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

en el punto $x = 2$

Solución:

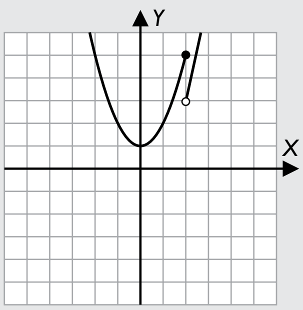
La continuidad de la función:

$f(2) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4x - 5) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) \ne f(2)$$

La función no es continua en $x = 2$

La función no es derivable en $x = 2$



Se observa que las tangentes por la izquierda y por la derecha tienen la misma pendiente, pero la función no es derivable.

49 Halla el valor de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 2$

Solución:

a) La continuidad de la función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 6 = -2b$

$2a + b = -3$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2ax + 3) = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - b) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 3 = 4 - b$

$4a + b = 1$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2, b = -7$$

50 Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x|x|$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

La función es continua y derivable por estar definida por polinomios.

El único punto que hay que estudiar es el correspondiente al valor de la abscisa $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

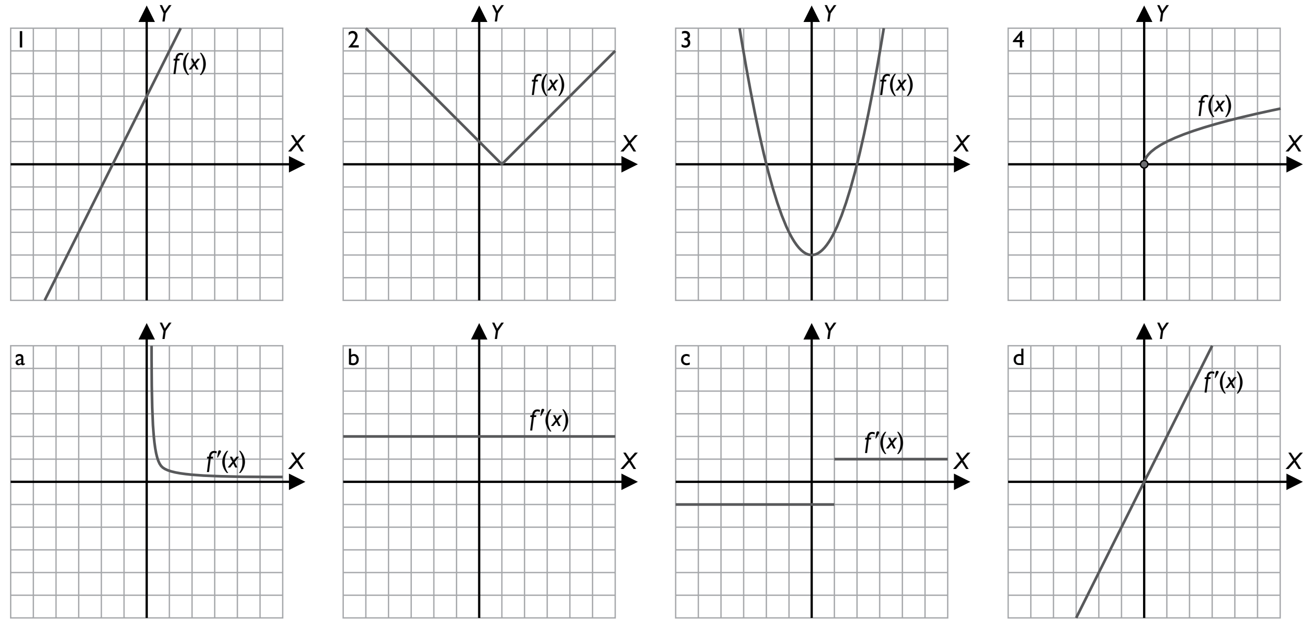
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(0^-) = f'(0^+)$

La función es derivable en $x = 0$

Para ampliar

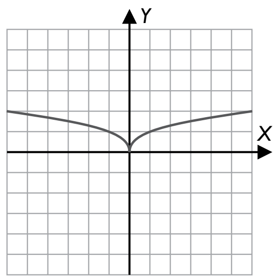
51 Asocia cada gráfica de la función $f(x)$ con su función derivada $f'(x)$



Solución:

$f(x)$	1	2	3	4
$f'(x)$	b	c	d	a

52 Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

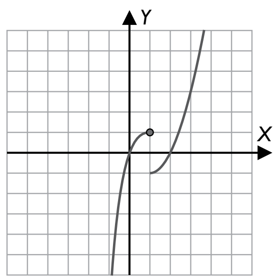


analiza si dicha función es derivable en $x = 0$

Solución:
No es derivable en $x = 0$ porque tiene una tangente vertical de ecuación $x = 0$

53 Dada la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

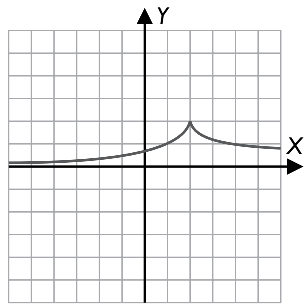


analiza si dicha función es derivable en $x = 1$

Solución:
No es derivable en $x = 1$ porque la función no es continua en ese valor.

54 Dada la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



analiza si dicha función es derivable en $x = 2$

Solución:
No es derivable en el punto $x = 2$ porque la función tiene un pico.
La gráfica de la función en ese valor tiene dos tangentes distintas.

55 Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + 3x$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 3 \qquad y'' = 6x \qquad y''' = 6$

56 Dada la función $y = x^3 - 3x^2$

a) Halla las tres primeras derivadas.

b) Halla los puntos de la gráfica en los que la tangente sea horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 6x \qquad y'' = 6x - 6 \qquad y''' = 6$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

Si $x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(2, -4)$

Halla las derivadas de las funciones siguientes:

57 $y = (x^2 + 1)2^x$

Solución:

$y' = 2x \cdot 2^x + (x^2 + 1)\, 2^x \ln 2$

58 $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

59 $y = (x + 2)e^x$

Solución:

$y' = (x + 3)\, e^x$

60 $y = \sqrt{1 - x^2}$

Solución:

$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

61 $y = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Solución:

$y' = -\dfrac{5}{(x - 2)^2}$

62 $y = \dfrac{9}{x^2 - 3}$

Solución:

$y' = -\dfrac{18x}{(x^2 - 3)^2}$

63 $y = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^3$

Solución:

$y' = 3\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^2 \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)$

64 $y = e^{5x}$

Solución:

$y' = 5e^{5x}$

65 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Solución:

$y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

66 $y = \ln e^x$

Solución:

$y = x$

$y' = 1$

67 $y = x^2e^x + 2x$

Solución:

$y' = e^x(x^2 + 2x) + 2$

68 $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

69 $y = 2^x \ln x$

Solución:

$y' = 2^x\left(\ln 2 \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

70 Dada la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) Halla las tres primeras derivadas.

b) Halla los puntos de la gráfica en los que la tangente sea horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9 \qquad y'' = 6x - 12 \qquad y''' = 6$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

Si $x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$

71 Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 3$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x + 1 \qquad y'' = 6x + 6 \qquad y''' = 6$

72 Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + x^2$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 2x \qquad y'' = 6x + 2 \qquad y''' = 6$

73 Dada la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) Halla las tres primeras derivadas de la función.

b) Halla los puntos en los que la recta tangente es horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Si $x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(-1, -2)$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(1, 2)$

74 Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{8x^3 - 24x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-24x^4 + 144x^2 - 24}{(x^2 + 1)^4}$

75 Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) Halla las tres primeras derivadas.

b) Analiza si puede haber algún punto de la gráfica que tenga tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-6x^4 - 36x^2 - 6}{(x^2 - 1)^4}$

b) Si la recta tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' \neq 0$ para todo valor de x

No hay ningún punto de la gráfica que tenga recta tangente horizontal.

76 Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-48x^3 - 48x}{(x^2 - 1)^4}$

77 Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{10x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{30x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-120x^3 + 120x}{(x^2 + 1)^4}$

78 Dada la función $y = xe^x$

a) Halla las tres primeras derivadas.

b) Halla los puntos de la gráfica en los que la tangente es horizontal.

Solución:

a) $y' = (x + 1)e^x \qquad y'' = (x + 2)e^x \qquad y''' = (x + 3)e^x$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1$

Si $x = -1, y = -1/e \Rightarrow A(-1, -1/e)$

79 Halla las tres primeras derivadas de la siguiente función:

$$y = x^2e^x$$

Solución:

$y' = (x^2 + 2x)e^x$

$y'' = (x^2 + 4x + 2)e^x$

$y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$

80 Halla las tres primeras derivadas de la siguiente función:

$$y = x \ln x$$

Solución:

$y' = 1 + \ln x \qquad y'' = \dfrac{1}{x} \qquad y''' = -\dfrac{1}{x^2}$

81 Dada la función $y = \ln x^2$

a) Halla las tres primeras derivadas.

b) Analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2}{x}$ $\quad y'' = -\dfrac{2}{x^2}$ $\quad y''' = \dfrac{4}{x^3}$

b) No hay ningún punto con tangente horizontal porque $y' \neq 0$ para todo valor de x

82 Dada la función $y = \ln (x^2 + 1)$

a) Halla las tres primeras derivadas.

b) Analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $\quad y'' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ $\quad y''' = \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Si $x = 0, y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

83 Dada la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$

a) Halla las tres primeras derivadas.

b) Analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ $\quad y'' = \dfrac{2 \ln x - 3}{x^3}$

$y''' = \dfrac{11 - 6 \ln x}{x^4}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = e$

Si $x = e, y = 1/e \Rightarrow A(e, 1/e)$

84 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$, para $x = 2$

Solución:

a) $x = 2 \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow P(2, 4)$

b) $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

c) $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$

85 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$, para $x = -1$

Solución:

a) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow P(-1, -1)$

b) $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(-1) = 3$

c) $y + 1 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 2$

86 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = -x^3$, para $x = 1$

Solución:

a) $x = 1 \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow P(1, -1)$

b) $f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f'(1) = -3$

c) $y + 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 2$

Problemas

87 Halla las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función $y = x^3 - 27x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 27$

$y' = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$

Si $x = -3, y = 54 \Rightarrow A(-3, 54)$

Si $x = 3, y = -54 \Rightarrow A(3, -54)$

Recta tangente en A: $y = 54$

Recta tangente en B: $y = -54$

88 Encuentra el valor de k tal que la recta $y = 4x - 9$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - kx$

Solución:

Sea $A(x, y)$ el punto de tangencia. Se tiene:

$y' = 4$

$f'(x) = 2x - k$

$2x - k = 4 \qquad (1)$

El punto A es común a la tangente y a la curva:

$4x - 9 = x^2 - kx \qquad (2)$

Resolviendo el sistema de (1) y (2):

$x = 3, k = 2$

$x = -3, k = -10$

89 Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$

Solución:

Se estudia el punto $x = 1$

a) La continuidad de la función:

$f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x-1)^3 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3(x-1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2(x-1) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 1$

90 Determina los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función $f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 1$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a = a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} a = 2$$

Resolviendo el sistema:

$a = 2, b = -1$

91 Determina el valor de a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \ge 3 \\ 2x + a & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 3$

Solución:

a) La continuidad de la función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x+a) = 6+a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^2-2x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$6 + a = 3 \Rightarrow a = -3$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x > 3 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x-2) = 4 \end{array}\right\}$$

$f'(3^-) \ne f'(3^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 3$ para ningún valor de a

92 Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$

Solución:

Se estudia el punto $x = 1$

a) La continuidad de la función:

$f(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2-x)^3 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -3(2-x)^2 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) \ne f'(1^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$

93 Halla los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{si } x \le 1 \\ a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función:

$f(1) = a + 5$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax + 5) = a + 5\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x}\right) = a + b\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a + 5 = a + b \Rightarrow b = 5$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1\\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a = a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2}\right) = \dfrac{a}{2} - b\end{array}\right\}$$

$a = \dfrac{a}{2} - b \Rightarrow a = -2b$

Resolviendo el sistema:

$a = -10, b = 5$

94 Halla el valor de a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x \le 2\\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2\end{cases}$$

sea continua y estudia si para dicho valor es derivable.

Solución:

La función está definida por dos funciones que son continuas y derivables en sus dominios. Se tiene que estudiar el valor $x = 2$

a) La continuidad de la función:

$f(2) = 3a + 3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x - 1) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para $a = -1$, la función es continua en $x = 2$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2\\ \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x > 2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x + a) = 4 + a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x - 1} = 1\end{array}\right\}$$

Para $a = -1$ se tiene

$f'(2^-) = 3$

$f'(2^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 2$

95 Determina el valor de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1\\ ax + b & \text{si } x \ge 1\end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función:

$f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^3 - 1) = 0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax + b) = a + b\end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 0$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 1\\ a & \text{si } x > 1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 = 3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} a = a\end{array}\right\} \Rightarrow a = 3$$

Resolviendo el sistema:

$a = 3, b = -3$

96 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

Calcula el valor del parámetro real λ para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$

Solución:

$$f'(x) = \frac{4\lambda - \lambda x^2}{(4 + x^2)^2}$$

$$f'(-1) = 2 \Rightarrow \frac{3\lambda}{25} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{50}{3}$$

97 Determina los valores que ha de tomar a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & \text{si } x < 1\\ 4x - b & \text{si } x \ge 1\end{cases}$$

sea derivable en $\mathbb{R}$

Solución:

a) Continuidad:

$f(1) = 4 - b$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + ax - 7) = a - 8 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4x - b) = 4 - b\end{array}\right\}$$

$a - 8 = 4 - b \qquad (1)$

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-2x + a) = a - 2 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} 4 = 4 \end{array}\right\}$$

$a - 2 = 4 \qquad (2)$

Resolviendo el sistema (1) y (2) se obtiene:

$a = 6; b = 6$

98 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determina los valores de a y b para que la función sea derivable en $x = 2$

Solución:

a) Continuidad:

$f(2) = 4a + 6$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 4a + 6 = -2b \quad (1)$

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2ax + 3) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - b) = 4 - b \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 4a + 3 = 4 - b \quad (2)$

Resolviendo el sistema (1) y (2) se obtiene:

$a = 2; b = -7$

99 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$$

Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{-3}{(x - 1)^2}$

$P(0, -2)$

$f'(0) = -3 \Rightarrow y = -3x - 2$

100 Calcula los puntos en los que la tangente a la función:

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

es paralela a la recta $x + 4y = 0$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x - 2)^2}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = 0; x = 4$

Si $x = 0 \Rightarrow A(0, -1/2)$

Si $x = 4 \Rightarrow B(4, 1/2)$

101 Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{9 - x^2}$$

Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{2x}{(9 - x^2)^2}$

$P(0, 1/9)$

$f'(0) = 0 \Rightarrow y = 1/9$

102 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \le 2 \\ 4 - \dfrac{a}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla el valor de a para que la función sea derivable.

Solución:

a) Continuidad:

$f(2) = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 3x + 4) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(4 - \dfrac{a}{x}\right) = 4 - \dfrac{a}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow 2 = 4 - \frac{a}{2} \quad (1)$$

b) Derivabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{a}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x - 3) = 1 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{a}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{a}{4} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema (1) y (2) se obtiene:

$a = 4$

103 Sea la función:

$$f(x) = x - e^{-3x}$$

Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

$f'(x) = 1 + 3e^{-3x}$

$P(0, -1)$

$f'(0) = 4 \Rightarrow y = 4x - 1$

104 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 4 & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 2x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Determina si la función es derivable.

Solución:

a) Continuidad:

$f(-1) = -5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 2x - 4) = -5 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-x^2 + 2x - 2) = -5 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow f(x)$ es continua.

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ -2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (2x + 2) = 0 \\ f'(-1^+) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-2x + 2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1^-) \ne f'(-1^-)$$

La función no es derivable en $x = -1$

105 Dada la siguiente parábola $y = 2x^2 - 2x - 4$

a) Halla los puntos de la parábola en los que la tangente a la misma pasan por el punto $(1, -6)$

b) Halla las ecuaciones de dichas tangentes.

Solución:

a) Sea la función $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$

Sea $x = a$ el valor de la abscisa del punto de tangencia.

$f(a) = 2a^2 - 2a - 4$

$f'(x) = 4x - 2$

$f'(a) = 4a - 2$

La recta tangente será:

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Como la tangente debe pasar por $P(1, -6)$ se tiene:

$-6 = (4a - 2)(1 - a) + 2a^2 - 2a - 4$

$2a^2 - 4a = 0$

$a = 0$

$a = 2$

Los puntos de tangencia son $A(0, -4)$ y $B(2, 0)$

b) Las rectas tangentes son:

$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow y = -2x - 4$

$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \Rightarrow y = 6x - 12$

Para profundizar

106 Determina el valor de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx} & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$

Solución:

a) La continuidad de la función:

$f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + a)e^{-bx} = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-bx} - b(x + a)e^{-bx} & \text{si } x < 0 \\ 2ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-bx} - b(x + a)e^{-bx} = 1 - ab \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2ax + b) = b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$1 - ab = b$

Resolviendo el sistema:

$a = 1, b = 1/2$

107 Una población de 400 bacterias de un cultivo se sabe que varía según la función

$$f(x) = 400\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

donde x se mide en minutos. ¿Qué velocidad de crecimiento instantáneo tendrá la población en $t = 3$ minutos?

Solución:

El crecimiento instantáneo es la derivada de la función

$$f'(x) = 400\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(3) = -32$

El signo menos indica que están disminuyendo las bacterias.

108 Halla la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por el punto $A(0, 1)$ y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto $B(1, 0)$

Solución:

a) Si pasa por $A(0, 1)$

$c = 1$

b) Si es tangente a la recta $y = x - 1$ en $B(1, 0)$, la derivada de la parábola en $x = 1$ es la pendiente de la recta tangente.

$2a + b = 1$

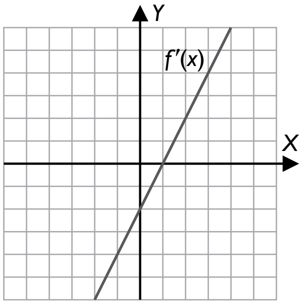
c) Como pasa por $B(1, 0)$

$a + b + c = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$a = 2, b = -3, c = 1$

109 La siguiente gráfica corresponde a la función derivada de la función $f(x)$



a) ¿Existe algún punto de tangente horizontal en la gráfica de $f(x)$?

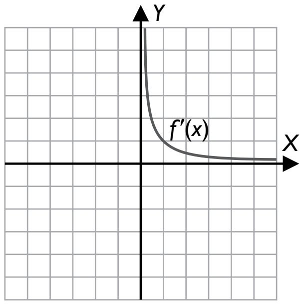
b) ¿Puede ser la derivada de una función polinómica? ¿De qué grado?

Solución:

a) En $x = 1$ la derivada se hace cero y, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es cero. La tangente es horizontal.

b) Si la derivada es un polinomio de primer grado, la función es un polinomio de segundo grado.

110 La siguiente gráfica corresponde a la función derivada de la función $f(x)$



a) ¿Existe algún punto de tangente horizontal en la gráfica de $f(x)$?

b) Escribe la ecuación de la gráfica de $f'(x)$

c) Da una función cuya derivada sea la de la gráfica.

Solución:

a) No, porque $f'(x)$ no corta al eje X

b) $f'(x) = 1/x$

c) $f(x) = \ln x$

Practica

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

115 $f(x) = e^{4x-5}$

Solución:

Ejercicio 115

$f(x) = e^{4x-5};$

$f'(x) \Rightarrow 4 \cdot e^{4 \cdot x - 5}$

116 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Solución:

Ejercicio 116

$f(x) = \ln(x^2 + 1);$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x}{x^2 + 1}$

117 $f(x) = x^2 \ln(x + 1)$

Solución:

Ejercicio 117

$f(x) = x^2 \cdot \ln(x + 1);$

$f'(x) \Rightarrow 2 \cdot x \cdot \ln(x+1) + \dfrac{x^2}{x+1}$

118 $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

Solución:

Ejercicio 118

$f(x) = \ln(x^2 - 4);$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x}{x^2 - 4}$

119 $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$

Solución:

Ejercicio 119

$f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 1};$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{-5 \cdot x^2 + 5}{x^4 + 2 \cdot x^2 + 1}$

120 Halla la recta tangente a la curva:

$$f(x) = x^2 - 5 \text{ en } x = 2$$

Representa la función y la recta tangente.

Solución:

Ejercicio 120

$a = 2;$

$f(x) = x^2 - 5;$

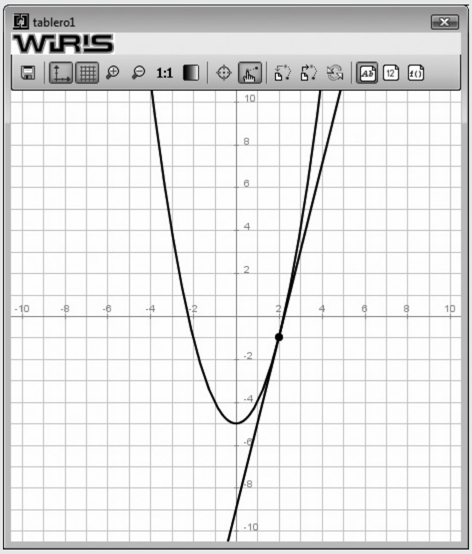
$P = \text{punto}(a, f(a)) \Rightarrow (2, -1)$

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \Rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 9$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_línea = 2})

dibujar(t(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})



121 Estudia la derivabilidad de la función en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 2$

Solución:

Ejercicio 121

$a = 2;$

$g(x) = x^2 - 3;$

$P = \text{punto}(a, g(a)) \Rightarrow (2,1)$

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x \mapsto -x^2 + 2 \cdot x + 4$

dibujar(g(x), $-\infty..a$, {color = azul, anchura_línea = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \Rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 7$

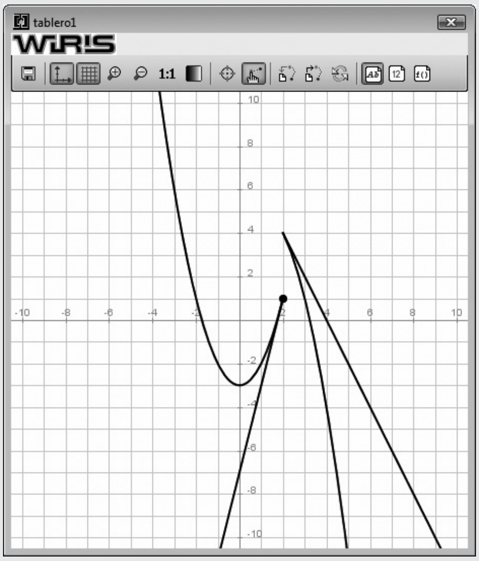
dibujar(t1(x), $-\infty..a$, {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(h(x), $a..+\infty$, {color = azul, anchura_línea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \Rightarrow x \mapsto -2 \cdot x + 8$

dibujar(t2(x), $a..+\infty$, {color = rojo, anchura_línea = 2})

La función no es continua en x = 2, por tanto no es derivable.



122 Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ para $x = \dfrac{1}{2}$

Solución:

Ejercicio 122

$f(x) = \dfrac{1}{x};$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

$a = \dfrac{1}{2};$

$f(a) \Rightarrow 2$

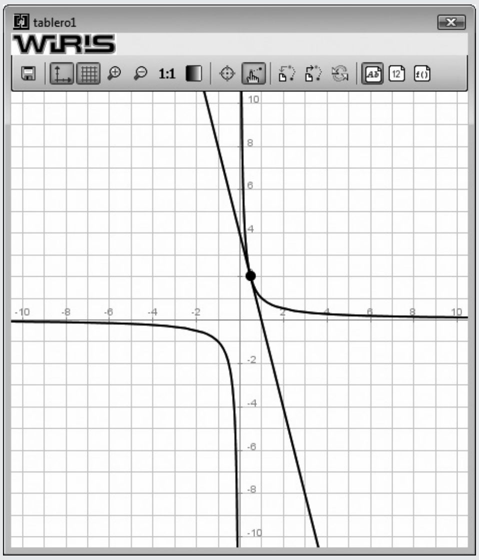
$f'(x) \Rightarrow \dfrac{-1}{x^2}$

$f'(a) \Rightarrow -4$

$t(x) = f'(a)\cdot(x - a) + f(a) \Rightarrow x \mapsto -4\cdot x+4$

dibujar(t(x), {color = verde, anchura_línea = 2})

dibujar(punto(a, f(a)), {color = rojo, tamaño_punto = 10})



123 Estudia la derivabilidad de la función para $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 3$

Solución:

Ejercicio 123

$a = 3;$

$g(x) = -x^2 + 4x - 1;$

$P = \text{punto}(a, g(a)) \Rightarrow (3,2)$

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = 2x - 4 \Rightarrow x \mapsto 2\cdot x-4$

dibujar(g(x), $-\infty..a$, {color = azul, anchura_línea = 2})

$t1(x) = g'(a)\cdot(x - a) + g(a) \Rightarrow x \mapsto -2\cdot x+8$

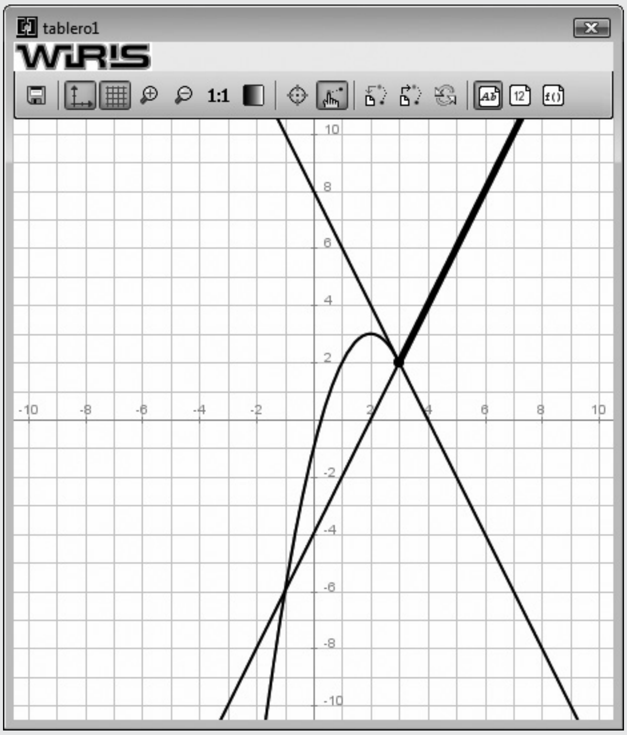
dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(h(x), $a..+\infty$, {color = azul, anchura_línea = 5})

$t2(x) = h'(a)\cdot(x - a) + h(a) \Rightarrow x \mapsto 2\cdot x-4$

dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

La función es continua en x = 3, pero no es derivable porque las rectas tangentes son distintas.



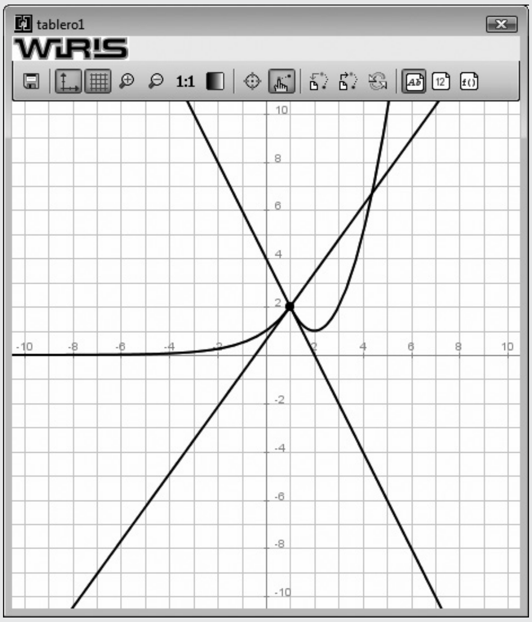
124 Estudia la derivabilidad de la función para $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 1$

Solución:

```
Ejercicio 124
a = 1;
g(x) = 2^x;
P = punto(a, g(a)) → (1,2)
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
h(x) = x² − 4x + 5 → x↦x²−4·x+5
dibujar(g(x), -∞..a, {color = azul, anchura_línea = 2})
t1(x) = g'(a)·(x − a) + g(a) → x↦1.3863·x+0.61371
dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
dibujar(h(x), a..+∞, {color = azul, anchura_línea = 2})
t2(x) = h'(a)·(x − a) + h(a) → x↦−2·x+4
dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
La función es continua en x = 3, pero no es derivable porque
las rectas tangentes son distintas.
```



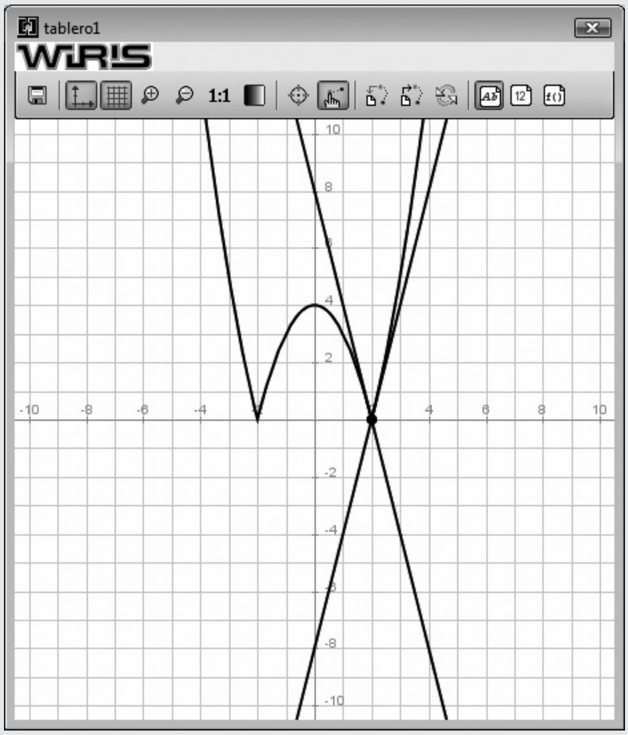
125 Estudia la derivabilidad de la función para $x = 2$

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 2$

Solución:

```
Ejercicio 125
a = 2;
f(x) = |x² − 4|;
dibujar(f(x), {color = azul, anchura_línea = 2})
g(x) = − x² + 4 → x↦−x²+4
P = punto(a, g(a)) → (2,0)
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
h(x) = x² − 4 → x↦x²−4
t1(x) = g'(a)·(x − a) + g(a) → x↦−4·x+8
dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
t2(x) = h'(a)·(x − a) + h(a) → x↦4·x−8
dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
```



Halla las tres primeras derivadas de las siguientes funciones:

126 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$

Solución:

```
Ejercicio 126
f(x) = x³ + 3x² + x − 3;
f'(x) → 3·x²+6·x+1
f''(x) → 6·x+6
f'''(x) → 6
```

127 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

Ejercicio 127

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x};$

$f'(x) \to \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f''(x) \to \dfrac{2}{x^3}$

$f'''(x) \to \dfrac{-6}{x^4}$

128 $f(x) = x \cdot e^x$

Solución:

Ejercicio 128

$f(x) = x \cdot e^x;$

$f'(x) \Rightarrow (x+1) \cdot e^x$

$f''(x) \Rightarrow (x+2) \cdot e^x$

$f'''(x) \Rightarrow (x+3) \cdot e^x$

129 $f(x) = x \cdot \ln x$

Solución:

Ejercicio 129

$f(x) = x \cdot \ln(x);$

$f'(x) \Rightarrow \ln(x) + 1$

$f''(x) \Rightarrow \dfrac{1}{x}$

$f'''(x) \Rightarrow \dfrac{-1}{x^2}$

130 Halla el valor de a y b para que la recta tangente a la gráfica de:

$$f(x) = ax^2 - b$$

en el punto $P(1, 5)$ sea la recta:

$$y = 3x + 2$$

Solución:

Ejercicio 130

$f(x) = a \cdot x^2 - b;$

$t(x) = 3x + 2;$

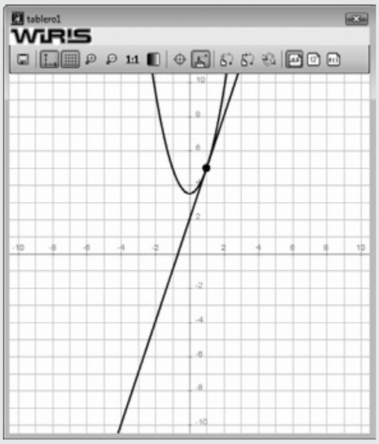
$\text{resolver}\begin{Bmatrix} f(1) = t(1) \\ f'(1) = t'(1) \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{\left\{a = \frac{3}{2}, b = -\frac{7}{2}\right\}\right\}$

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2} \Rightarrow x \mapsto \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{7}{2}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(t(x), {color = verde, anchura_línea = 2})

dibujar(punto(1, 5), {color = rojo, tamaño_punto = 10})



131 Estudia la derivabilidad de la función para $x = 0$

$$f(x) = x|x|$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 0$

Solución:

Ejercicio 131

$a = 0;$

$f(x) = x|x|;$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_línea = 2})

$g(x) = -x^2 \Rightarrow x \mapsto -x^2$

$P = \text{punto}(a, g(a)) \Rightarrow (0,0)$

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = x^2 \Rightarrow x \mapsto x^2$

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \Rightarrow x \mapsto 0$

dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \Rightarrow x \mapsto 0$

dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})