

Unidad 4.

Sistemas lineales con parámetros

1. Teorema de Rouché

Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema en forma matricial, escribe sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\}$$

Aplica la teoría

1 Escribe los siguientes sistemas en forma matricial:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + 5z = 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 Escribe en forma ordinaria el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

3 Discute los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x - 5y = -2 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el $R(C) = 3$ y se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas \Rightarrow Sistema compatible determinado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$\begin{aligned} R \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} &= \\ &= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^{\circ} + 3 \cdot 1^{\circ} = \\ 3^{\circ} - 2^{\circ} = \end{array} \\ &= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3^{\circ} : 4 \end{array} = \end{aligned}$$

$$= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{7 \cdot 3^a - 2^a}{=} \\ = R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

4 Discute los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} \text{a) } 2x + y - z = 0 \\ \quad x + y = 1 \\ \quad -x + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{b) } x + 2y + z = 1 \\ \quad 2x + 3y + 2z = 0 \\ \quad x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{2 \cdot 1^a - 2^a}{=} \stackrel{1^a + 3^a}{=} \\ = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas \Rightarrow Sistema compatible indeterminado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el $R(C) = 3$ y se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas \Rightarrow Sistema compatible determinado.

2. Regla de Cramer y forma matricial

Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema, resuélvelo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplica la teoría

5 Resuelve por Cramer:

$$\begin{cases} \text{a) } 2x + y = 5 \\ \quad x + 3z = 16 \\ \quad 5y - z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{b) } x + y - 2z = 6 \\ \quad 2x + 3y - 7z = 16 \\ \quad 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

Solución:

a) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-145}{-29} = 5$$

b) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6 Resuelve por Cramer en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2-2a}{-2} = a-1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2a-2}{-2} = 1-a$$

7 Resuelve por Cramer:

$$\begin{cases} 4x + 4y + 5z + 5t = 0 \\ 2x + 3z - t = 10 \\ x + y - 5z = -10 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -290$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 3 & -1 \\ -10 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-290}{-290} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{290}{-290} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-580}{-290} = 2$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{580}{-290} = -2$$

8 Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -11 & 13 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 2, y = -1, z = 1$$

9 Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{107} \begin{pmatrix} -4 & 9 & 50 \\ 15 & -7 & -27 \\ 7 & 11 & -34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -3, y = 2, z = 1$$

10 Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{La solución es: } x = -1, y = 1, z = -2$$

3. Discusión de sistemas con parámetros

Piensa y calcula

Discute, según los valores de k , el siguiente sistema: $\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{array} \right\}$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 0 = k - 6 \end{array} \right\}$$

Para todo valor $k \neq 6$ el sistema es incompatible.

Para $k = 6$ el sistema se reduce a $x + y = 3$ Compatible indeterminado.

Aplica la teoría

11 Discute, según los valores del parámetro a , los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} (a+1)x + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\text{a) Se calcula } |C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1$$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -2$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \end{array} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a : 3 \\ 3^a : 3 \end{array} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 3^a - 2^a \end{array} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $a = 1$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\text{b) Se calcula } |C| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^3 + 3a^2$$

$$a^3 + 3a^2 = 0$$

$$a^2(a+3) = 0$$

$$a = -3, a = 0$$

Para todo valor de $a \neq -3$ y $a \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -3$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

El rango es 2 porque las dos primeras filas no son proporcionales, y no puede ser 3 porque el determinante es cero.

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $a = 0$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

12 Discute, según los valores del parámetro k , los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} a) \quad kx + y + z = 4 \\ \quad x + y + z = k \\ \quad x - y + kz = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b) \quad x + y + z = 0 \\ \quad kx + 2z = 0 \\ \quad 2x - y + kz = 0 \end{cases}$$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 1$$

Para todo valor de $k \neq -1$ y $k \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $k = -1$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $k = 1$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3^a : 2 \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6$

$$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = -3, k = 2$$

Para todo valor de $k \neq -3$ y $k \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $k = -3$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^a$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $k = 2$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 2^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

13 Discute, según los valores del parámetro a , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 10y = -4 \\ ax + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

Solución:

Como hay más ecuaciones que incógnitas, se calcula el determinante de la matriz ampliada:

$$\text{Se calcula } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$$

$$2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $a = 1$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a : 2 \\ 3^a : 7 \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2^a$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

14 Discute, según los valores del parámetro m , los siguientes sistemas:

$$a) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ mx + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix} = -m^2 - m$

$$m^2 + m = m(m + 1) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 0$$

Para todo valor de $m \neq -1$ y $m \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = -1$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^{\cdot 3} + 2^{\cdot 3} \\ 2^{\cdot 3} + 3^{\cdot 3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $m = 0$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Se calcula el $|C| = \begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} =$

$$= -2m(m+1)(m-1)$$

$$m(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = -1, m = 1$$

Para todo valor de $m \neq 0$, $m \neq -1$ y $m \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = 0$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 3^{\cdot 3} \\ 2^{\cdot 3} \cdot 2 \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^{\cdot 3} - 2^{\cdot 3} \\ 1^{\cdot 3} - 2^{\cdot 3} \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $m = -1$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $m = 1$ se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3^{\cdot 3} \cdot 2 \\ 3^{\cdot 3} \cdot 2 \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^{\cdot 3} - 4 \cdot 1^{\cdot 3} \\ 3^{\cdot 3} - 2 \cdot 1^{\cdot 3} \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Preguntas tipo test

1 Un sistema lineal heterogéneo es compatible determinado si (C , matriz de los coeficientes, y A , matriz ampliada con los términos independientes):

- $R(C) < R(A)$
- $R(C) = R(A) = N.º$ de incógnitas
- $R(C) > R(A)$
- $R(C) \neq R(A)$

2 Si tenemos el sistema lineal matricial $CX = B$ tal que existe C^{-1} , la solución es:

- $X = BC$
- $X = BC^{-1}$
- $X = CB$
- $X = C^{-1}B$

3 Un sistema lineal homogéneo:

- Siempre es compatible.
- Siempre es incompatible.
- Unas veces es compatible y otras incompatible.
- Ninguna de las anteriores es cierta.

4 Un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas:

- Si $R(C) = R(A) = 2$, es compatible.
- Si $R(A) = 3$, es compatible.
- Si $R(C) = 3$, es compatible.
- Si $R(C) = R(A) = 3$, es compatible.

5 Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

- Si $R(C) = R(A) = 2$, es compatible determinado.
- Si $R(C) \neq R(A)$, es compatible determinado.
- Si $R(C) = R(A) = 3$, es compatible determinado.
- Si $R(C) < R(A)$, es compatible determinado.

6 Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

Discute el sistema para los distintos valores de a

- $a \neq -7/4$, S.C.D., si $a = -7/4$, S.I.
- $a = -7/4$, S.C.D., si $a \neq -7/4$, S.I.
- $a \neq 2$, S.C.D., si $a = 2$, S.I.
- $a = 2$, S.C.D., si $a \neq 2$, S.I.

7 Resuelve el sistema del ejercicio 6 para $a = 4$

- $x = 2, y = 3, z = 4$
- $x = -2, y = 3, z = -4$
- $x = y = z = 1$
- $x = -1, y = -2, z = -3$

8 Discute, en función del parámetro a , la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + 4y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + az = -a \end{cases}$$

- $a \neq -1$, S.C.D., si $a = -1$, S.I.
- $a \neq 1$, S.C.D., si $a = 1$, S.C.I.
- $a = 1$, S.C.D., si $a \neq 1$, S.C.I.
- $a = 2$, S.C.D., si $a \neq 2$, S.I.

9 Resuelve el sistema del ejercicio 8 cuando sea compatible determinado.

- $x = y = z = 5$
- $x = 15, y = 6, z = 1$
- $x = -1/2, y = 2/3, z = -4/5$
- $x = 15/13, y = 6/13, z = -1$

10 Resuelve el sistema del ejercicio 8 cuando sea compatible indeterminado.

- $x = y - 2, z = -y + 2$
- $x = 9y - 3, z = -13y + 5$
- $x = 3y - 1, z = -3y + 1$
- $x = -9y + 3, z = 13y - 5$

Ejercicios y problemas propuestos

1. Teorema de Rouché

15 Discute el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= 3 \\ 2x - 5y + z &= -2 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

16 Discute el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 5x + 4y + 5z &= 9 \\ x - 2y &= 1 \\ 5x + 3y + 5z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = -10$, el $R(C) = R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

17 Discute el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 4z &= 0 \\ 4x - y + 2z &= -4 \\ 3x - y + z &= -2 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

18 Discute el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 8x + y + 4z &= 9 \\ 5x - 2y + 4z &= 6 \\ x + y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

19 Discute el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= -2 \\ x + 2y + 3z &= -1 \\ x - 3y - 2z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

20 Discute el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - 4z &= 1 \\ 2x + y - 5z &= -1 \\ x - y - z &= -2 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

21 Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 4y - z + 2t &= 0 \\ x + y + z &= 3 \\ 5x - 2y - 4z - t &= -12 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como hay más incógnitas que ecuaciones, se pasa t al 2.º miembro y se resuelve por Gauss, obteniéndose la solución:

$$x = \frac{3t - 2}{13}, y = \frac{9 - 7t}{13}, z = \frac{4t + 32}{13}$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3\lambda - 2}{13} \\ y &= \frac{9 - 7\lambda}{13} \\ z &= \frac{4\lambda + 32}{13} \\ t &= \lambda \end{aligned} \right\} \lambda \Rightarrow \mathbb{R}$$

2. Regla de Cramer y forma matricial

22 Resuelve por Cramer:

$$\left. \begin{aligned} 7x + 2y + 3z &= 15 \\ 5x - 3y + 2z &= 15 \\ 10x - 11y + 5z &= 36 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = -36$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 2, y = -1, z = 1$$

23 Resuelve por Cramer:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Como $|C| = 5$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = -\frac{1}{5}, y = 0, z = \frac{2}{5}$$

24 Resuelve por Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 4y = 5 \\ 7x - y - 3z = 8 \end{cases}$$

Solución:

Como $|C| = 46$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = \frac{27}{23}, y = -\frac{17}{46}, z = \frac{9}{46}$$

25 Resuelve por Cramer:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Solución:

Como $|C| = -2$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 4, y = -2, z = 0$$

26 Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = -5$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -1, y = 0, z = 2$

27 Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = 2$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = 0, y = -2, z = 2$

3. Discusión de sistemas con parámetros

28 Discute, según el valor del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx + my = 6 \\ x + (m-1)y = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{Se calcula } |C| = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$$

$$m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, m = 0$$

Para todo valor de $m \neq 2$ y $m \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 2 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = 2$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $m = 0$ se tiene:

$R(C) = 1 < R(A) = 2$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

29 Discute, según el valor del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - m^2 + 6m$$

$$m^3 + m^2 - 6m = 0 \Rightarrow m = 0, m = -3, m = 2$$

Para todo valor de $m \neq 0, m \neq -3$ y $m \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = 0$ se tiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $m = -3$ se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $m = 2$ se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

30 Discute, según el valor del parámetro a , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + az = 9 \\ x - y - 6z = 5 \end{cases}$$

Solución:

Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 2a + 16$

$$2a + 16 = 0 \Rightarrow a = -8$$

Para todo valor de $a \neq -8$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -8$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

31 Discute, según el valor del parámetro a , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$$

Solución:

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a + 24$

$$3a - 24 = 0 \Rightarrow a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$$

Para todo valor de $a \neq 8$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C| = 0$

• Para $a = 8$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

32 Discute, según el valor del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + y = k \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -11k + 22$$

$$-11k + 22 = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

Para todo valor de $k \neq 2$ se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

• Para $k = 2$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

33 Discute, según el valor del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ kx + 3y - 2z = 0 \\ -x - 4z = 3 \end{cases}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ k & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = k + 20$$

$$k + 20 = 0 \Rightarrow k = -20$$

Para todo valor de $k \neq -20$ se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

• Para $k = -20$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

34 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m + 2)z = 3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de m

b) Resuelve el sistema para $m = 3$

Solución:

a) $|C| = m - 1$

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = 1$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 3$ la solución del sistema es:

$$x = -3, y = 8, z = 0$$

Para ampliar

35 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a
- Resuelve el sistema para $a = -1$
- Resuelve el sistema para $a = 2$

Solución:

a) $|C| = a^2 + a = a(a + 1)$

$$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -1$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $a = 0$ se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = -1$ la solución del sistema es:

$$x = 2 + y, z = 1$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para $a = 2$ la solución es:

$$x = 1, y = -1, z = -1/2$$

36 Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores del parámetro a
- Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

Solución:

a) $|C| = a^2 - a - 2$

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -1$ se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $a = 2$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 2$ la solución del sistema es:

$$x = z - 1, y = 2 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

37 Siendo a un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{cases}$$

a) Discute el sistema en función del valor de a

b) Encuentra todas sus soluciones para $a = 1$

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 2a - 1$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = 1$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 1$ la solución del sistema es:

$$x = 1 - z, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

38 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - \lambda y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ y resuélvelo.

Solución:

a) $|C| = 4\lambda - 12$

$$4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

Para todo valor de $\lambda \neq 3$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $\lambda = 3$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 3$ la solución del sistema es:

$$x = -3z, y = -2z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{array} \right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda \neq 3$ la solución del sistema es la solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

39 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x - y = m \\ x + my + z = 1 \end{array} \right\}$$

a) Discute la compatibilidad del sistema en función del parámetro m

b) Encuentra, cuando existan, sus soluciones.

Solución:

a) $|C| = 0$ para cualquier valor de m

Se estudia el sistema por Gauss y se obtiene que es incompatible.

b) No hay soluciones.

Problemas

41 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real a

b) Resuélvelo para $a = 4$

Solución:

a) $|C| = -2a + 4$

$$2a - 4 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Para todo valor de $a \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = 2$ se tiene: $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 4$ la solución del sistema es:

$$x = -5, y = -2, z = 9$$

40 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro a

b) Resuélvelo para $a = 2$

Solución:

a) $|C| = 2a^2 - 8$

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 2$$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -2$ se tiene: $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y , por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $a = 2$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 2$ la solución del sistema es:

$$x = 3 - y, z = -1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

42 Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} (a + 1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real a

b) Resuelve el sistema en los casos en que resulte compatible determinado.

Solución:

a) $|C| = a + 1$

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Para todo valor de $a \neq -1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -1$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a \neq -1$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 2$$

43 Se considera el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + my &= 0 \\ x + mz &= m \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m
 b) Resuelve el sistema para $m = 6$

Solución:

a) $|C| = m^2 - 5m$

$$m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m - 5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 5$$

Para todo valor de $m \neq 0$ y $m \neq 5$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = 0$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $m = 5$ se tiene: $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $m = 6$ la solución del sistema es:

$$x = -12, y = 4, z = 3$$

44 Sea el sistema homogéneo:

$$\left. \begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + my + 2mz &= 0 \\ 2x + my + (2m + 3)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) Calcula el valor de m para el que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.
 b) Halla las soluciones.

Solución:

a) $|C| = 2m$

$$2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Para todo valor de $m \neq 0$, la solución es la trivial.

b) Para $m = 0$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es: $x = 0, z = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \lambda \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

45 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudia su compatibilidad.
 b) Añade al sistema una ecuación de tal forma que el sistema resultante tenga solución única. Justifica la respuesta y encuentra dicha solución.

- c) Añade al sistema dado una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

Solución:

a) $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

El sistema tiene como solución:

$$x = 1, y = -1, z = 0$$

c) Se añade una ecuación contradictoria con las otras dos; por ejemplo, sumando y cambiando el término independiente:

$$3x + 2z = 0$$

46 Se considera el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= a \\ x + a^2z &= 2a + 1 \\ x - y + a(a - 1)z &= 2a \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute el sistema según los valores del parámetro real a
 b) Resuelve el sistema para $a = 3$

Solución:

a) $|C| = a^2 - a$

$$a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$$

Para todo valor de $a \neq 0$ y $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = 0$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $a = 1$ se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 3$ la solución del sistema es:

$$x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$$

Para profundizar

47 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t :

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \\ 2x + 2ky - t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) Encuentra los valores de k para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2
 b) Resuelve el sistema anterior para $k = 0$

Solución:

a) Estudiando la matriz de los coeficientes por Gauss se obtiene que si $k = 3/2$, el $R(C) = 2$

b) Para $k = 0$, la solución es:

$$x = t/2, y = 0, z = -t/2$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = 0 \\ x = -\frac{\lambda}{2} \\ t = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

48 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{array} \right\}$$

a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discute el sistema para los restantes valores de λ

Solución:

a) $|C| = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$

$$2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0$$

$$\lambda = -7, \lambda = 1$$

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $\lambda = -7$ se tiene: $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $\lambda = 1$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 < \text{número de incógnitas}$ y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ la solución del sistema es:

$$x = 1 + 2z, y = 1 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para todo valor de $\lambda \neq -7$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas}$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

49 Discute el sistema, según el valor del parámetro m , y resuelve en los casos de compatibilidad.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + mz = 6 \\ -2x - 10y - 2z = m - 4 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) $|C| = 14m - 14$

$$14m - 14 = 0$$

$$m - 1 = 0$$

$$m = 1$$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas}$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = 1$ se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $m \neq 1$ la solución del sistema es:

$$x = \frac{3m^2 + 27m - 28}{14(m-1)}, y = \frac{-m(2m-3)}{14(m-1)}, z = \frac{-m}{2(m-1)}$$

50 Dado el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema según el valor del parámetro a

b) Resuelve el sistema en todos los casos de compatibilidad.

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 3a - 2$

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2$$

Para todo valor de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas}$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = 1$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 < \text{número de incógnitas}$ y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $a = 2$ se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 1$ la solución es:

$$x = 1 - z, y = 0$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la solución es:

$$x = \frac{a-1}{a-2}, y = \frac{a-1}{a-2}, z = -\frac{1}{a-2}$$

Practica

54 Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 54

$$\text{resolver} \begin{cases} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow \{x=-3, y=4, z=2\}$$

Solución: $x = -3, y = 4, z = 2$

55 Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + ay + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = 2$

Solución:

Ejercicio 55

a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

$$C(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix};$$

$$|C(a)| \Rightarrow -a^2 + 1$$

$$\text{resolver}(-a^2 + 1 = 0) \Rightarrow \{a = -1, a = 1\}$$

$$C(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(-1)) \Rightarrow 2$$

$$A(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(-1)) \Rightarrow 2$$

Para $a = -1, R(C) = R(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

$$C(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(1)) \Rightarrow 2$$

$$A(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(1)) \Rightarrow 3$$

Para $a = 1, R(C) = 2 \neq R(A) = 3$

Sistema incompatible.

Es compatible indeterminado para $a = -1$

Lo resolvemos para $a = -1$

$$\text{resolver} \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \left\{ x = -\frac{3}{2}, y = -z + \frac{5}{2}, z = z \right\} \right\}$$

b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = 2$

$$\text{resolver} \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \{x=0, y=1, z=3\}$$

Solución, $x = 0, y = 1, z = 3$

56 Discute, según los valores del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + (k+1)y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 56

$$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix};$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix};$$

$$|A(k)| \Rightarrow k-1$$

$$\text{resolver}(k-1=0) \Rightarrow \{k=1\}$$

Para $k \neq 1, R(C) < R(A) = 3$, sistema incompatible.

Para $k = 1$

$$C(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(1)) \Rightarrow 2$$

$$A(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(1)) \Rightarrow 2$$

Si $k = 1, R(C) = R(A) = 2 = n^\circ$ de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

57 Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro k

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0 \\ -x - y + kz = 1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Solución:

Problema 57

$$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix};$$

$$|C(k)| \Rightarrow -k^2 + 1$$

$$\text{resolver}(-k^2 + 1 = 0) \Rightarrow \{k = -1, k = 1\}$$

Para $k \neq -1, k \neq 1, R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas.

Sistema heterogéneo compatible determinado.

$$C(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(-1)) \Rightarrow 2$$

$$A(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(-1)) \Rightarrow 2$$

$R(C) = R(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

$$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(1)) \rightarrow 2$$

$$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(1)) \rightarrow 3$$

$R(C) \neq R(A)$, sistema incompatible.

58 Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averigua para qué valores de k tienen soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resuélvelo en tales casos.

Solución:

Problema 58

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow k^2 - k - 2$$

$$\text{resolver}(k^2 - k - 2 = 0) \rightarrow \{k = -1, k = 2\}$$

Tiene soluciones distintas de $x = y = z$ para $k \neq -1, k \neq 2$

Para $k = -1$

$$\text{resolver} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = z, y = 0, z = z\}$$

Solución $x = z, y = 0$

Para $k = 2$

$$\text{resolver} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left\{ x = -\frac{1}{5}z, y = \frac{3}{5}z, z = z \right\} \right\}$$

Solución $x = -z/5, y = 3z/5$

59 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

determina para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$

Solución:

Problema 59

Resolvemos el sistema cuando $y = 2$

$$\text{resolver} \begin{cases} x - 2a = 2 \\ a \cdot x - 2 = a + 1 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left\{ a = 1, x = 4 \right\}, \left\{ a = -\frac{3}{2}, x = -1 \right\} \right\}$$

Tiene la solución $y = 2$ cuando $a = 1$ o $a = -3/2$

60 Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 + 3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 60

$$\begin{pmatrix} 1 + 3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \\ 3 \cdot x - y \end{pmatrix}$$

$$\text{resolver} \begin{cases} 9x + 2y + 3 = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{2}{3}, y = -2 \right\} \right\}$$

La solución es: $x = 2/3, y = -2$

61 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula dos números reales x e y tales que se verifique:

$$A + xA + yI = 0$$

siendo I la matriz unidad de orden 2 y O la matriz nula de orden 2

Solución:

Problema 61

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + x \cdot A + y \cdot I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x + y + 2 & x + 1 \\ 2 \cdot x + 2 & 3 \cdot x + y + 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{resolver} \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ 2x + 2 = 0 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \{x = -1, y = 0\}$$

La solución es: $x = -1, y = 0$

62 Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 5y + z = 4 \\ x - y + (a-2)z = 2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de a

b) Halla todas las soluciones para $a = 3$

Solución:

Problema 62

$$C(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix} \rightarrow a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$|C(a)| \rightarrow a - 1$$

$$\text{resolver}(|C(a)| = 0) \rightarrow \{a = 1\}$$

Para $a \neq 1$, sistema compatible determinado.

Para $a = 1$

$$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(1)) \rightarrow 2$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

Sistema compatible indeterminado.

b) Para $a = 3$

$$\text{resolver} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 5y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \{x = 3, y = 1, z = 0\}$$