Unidad 3.
Determinantes

1. Determinantes de orden 2 y 3 por Sarrus

Piensa y calcula

Dada la proporción $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, calcula el producto de extremos menos el producto de medios.

Solución:
$3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0$

Aplica la teoría

1 Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene una columna de ceros.

b) $|B| = 0$ porque tiene dos filas iguales, la 1.ª y la 3.ª

2 Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -9 \\ 7 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene dos filas proporcionales; la 2.ª es el doble de la 1.ª

b) $|B| = 0$ porque tiene una fila que es combinación lineal de las otras dos; la 3.ª es la suma de la 1.ª y de la 2.ª

3 Halla los determinantes que se puedan calcular de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 38$

b) No se puede calcular porque no es cuadrada.

4 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 50$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -58$

5 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 255$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

6 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -265$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 867$

7 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 125$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 70$

8 Siendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ la traspuesta de la matriz E, calcula el determinante de la matriz $E^t \cdot E$

Solución:

$E^t \cdot E = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$

$|E^t \cdot E| = |14| = 14$

2. Propiedades de los determinantes

Piensa y calcula

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ halla su determinante y el de su traspuesta. ¿Cómo son?

Solución:

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$ $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ $|A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2$

Ambos determinantes son iguales.

Aplica la teoría

9 Sean $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 9 \\ -8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -374$ y $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -8 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

Halla mentalmente $|B|$. ¿Qué propiedad has utilizado?

Solución:

$|B| = 374$

Porque el determinante $|B|$ se obtiene del $|A|$ cambiando la 2.ª y 3.ª filas.

10 Halla el valor de los siguientes determinantes y comprueba que son iguales.

El $|B|$ se obtiene sustituyendo su 3.ª fila por la suma de las tres filas de $|A|$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$, $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

$|A| = 245$ $|B| = 245$

11 Comprueba la identidad $|A| = |A^t|$ siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -7 \\ 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = -180$ $|A^t| = -180$

12 Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

En el 1.er paso hemos descompuesto el determinante en la suma de otros dos que tienen la 2.ª y 3.ª columna iguales y la suma de las dos primeras columnas coincide con la 1.ª columna inicial.

En el 2.º paso hemos cambiado en el 1.er determinante la 2.ª columna con la 3.ª y, por tanto, el determinante cambia de signo y el 2.º determinante es cero, porque la 1.ª columna es el doble de la 3.ª

13 Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-1), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

Solución:

Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-1), su determinante queda multiplicado por $(-1)^3 = -1$

La propiedad que se ha utilizado dice que para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Como se multiplican las tres líneas, se eleva al cubo.

14 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

comprueba que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{vmatrix} = -1\,071$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 51 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -21$$

$$|A \cdot B| = 51 \cdot (-21) = -1\,071$$

3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Piensa y calcula

Halla una matriz A de orden 3, es decir, de dimensión 3×3, definida por: $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplica la teoría

15 Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \\ 2 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

halla:

a) El menor complementario del elemento a_{21}

b) El menor complementario del elemento a_{13}

Solución:

a) $M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = 24$ b) $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 46$

16 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

halla:

a) El adjunto del elemento a_{12}

b) El adjunto del elemento a_{31}

Solución:

a) $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 35$ b) $A_{31} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -63$

17 Calcula el valor de los siguientes determinantes por los adjuntos de la línea más sencilla:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 23 = 161$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 22 = 176$

18 Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1.^a + 2.^a \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -86$$

19 Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1.^a + 2.^a \\ \\ 7 \cdot 1.^a + 4.^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 12 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 37 & 0 & 48 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 37 & 48 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1.^a + 2.^a \\ 1.^a + 3.^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 17 & 32 & 0 \\ 44 & 60 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 17 & 32 \\ 44 & 60 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-388) = 1\,164$$

4. Matriz inversa

Piensa y calcula

Multiplica las siguientes matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Qué matriz se obtiene?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

En ambos casos se obtiene la matriz unidad de orden 2

Aplica la teoría

20 Comprueba que las siguientes matrices son inversas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

21 Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -5$

$A_{12} = -1 \qquad A_{22} = 3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -3$

$A_{12} = -4 \qquad A_{22} = 7$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

22 Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{32} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$B_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$B_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2$

$B_{12} = -\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8$

$B_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 12$

$B_{13} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$B_{33} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 4 & 6 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23 Dadas las siguientes matrices, determina si son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa y el determinante de dicha inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

Para que una matriz sea invertible tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

a) La matriz A es cuadrada.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

Por tanto, A es invertible.

$A_{11} = 4 \qquad A_{21} = -2$

$A_{12} = -3 \qquad A_{22} = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

El determinante de la inversa es el inverso del determinante.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

b) La matriz B no es cuadrada. Por tanto, no es invertible.

24 Considera la matriz A que depende de un parámetro a

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de a tiene A inversa? Justifica la respuesta.

b) Para $a = 0$ halla la inversa de A

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada, para que tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

La matriz A tiene inversa para $a \neq 1$

b) Para $a = 0$ se tiene:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Ecuaciones matriciales

Piensa y calcula

Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplica la teoría

25 Determina la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

26 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X tal que $AX = B$

Solución:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

27 Halla todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4a + 2c & 4b + 2d \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b & 2b \\ c + 4d & 2d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= a + 4b \\ b &= 2b \\ 4a + 2c &= c + 4d \\ 4b + 2d &= 2d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 0 \\ c &= 4d - 4a \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d - 4a & d \end{pmatrix}$$

28 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existe alguna matriz Y, cuadrada de orden 2, tal que $AY = B^t$? (B^t es la matriz traspuesta de B). Justifica la respuesta.

Solución:

Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$B^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AY = B^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a - c & b - d \\ 2c - 2a & 2d - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 3 \\ a - c &= 2 \\ b - d &= -1 \\ 2c - 2a &= 0 \\ 2d - 2b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

De las cuatro primeras ecuaciones se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 3 \\ c &= -4 \\ d &= 4 \end{aligned}\right\}$$

que no verifican las otras dos ecuaciones; por tanto, no existe ninguna matriz Y, cuadrada de orden 2, que verifique la ecuación pedida.

29 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

Solución:

$XA - B = 2I$

$XA = B + 2I$

$X = (B + 2I)A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Rango de una matriz

Piensa y calcula

De los siguientes vectores, ¿cuáles son proporcionales?: $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$ y $\vec{w}(-2, 6, -4)$

Solución:

Son proporcionales: $\vec{u}(1\ -3, 2)$ y $\vec{w}(-2, 6, -4)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{2}{-4}$

Aplica la teoría

30 Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $R(A) = 2$
Porque las filas no son proporcionales.

b) $R(A) = 1$
Porque las filas son proporcionales.

31 Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $R(A) = 1$
Porque las filas son proporcionales.

b) $R(A) = 2$
Porque las columnas no son proporcionales.

32 Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 241 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 3$

Porque el determinante es distinto de cero.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(A) = 2$

Porque el determinante es cero y las tres filas no son proporcionales.

33 Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 7 & 6 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1.^a + 2.^a \\ 3 \cdot 1.^a + 3.^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = 2$$

34 Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(B) = R\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3 \cdot 1.^a - 3.^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2.^a + 2 \cdot 3.^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 20 \end{pmatrix} = 3$$

35 Calcula el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1.^a + 2 \cdot 2.^a \\ 5 \cdot 2.^a + 3.^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 12 & a+4 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3 \cdot 2.^a + 2 \cdot 3.^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 2a+8 & -3a-12 \end{pmatrix}$$

Si $a = -4 \Rightarrow R(A) = 2$

Si $a \neq -4 \Rightarrow R(A) = 3$

Preguntas tipo test

1 Indica qué igualdad es falsa:

❑ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

☒ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

❑ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

❑ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

2 La matriz inversa de una matriz regular A es igual a:

❑ El producto del inverso del determinante de A por la matriz adjunta de A

❑ La adjunta de su matriz traspuesta.

☒ El producto del inverso del determinante de A por la traspuesta de la matriz adjunta de A

❑ La traspuesta de la matriz adjunta.

3 La matriz adjunta es:

❑ La matriz cuyo elemento a_{ij} es el menor complementario del elemento a_{ij} de la matriz A

❑ La matriz inversa de A

❑ La matriz que se obtiene de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A

☒ La matriz cuyo elemento a_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A

4 Si $|A| = 3$ y $|B| = -3$, $|AB|$ es igual a:

❑ 0

☒ –9

❑ 9

❑ –1

5 Las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad $XA = AX$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, son de la forma:

❑ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

6 La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es:

❑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

7 La matriz A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$ es:

❑ $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} 3/13 \\ 5/13 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} 102 \\ 131 \end{pmatrix}$

8 Despeja la matriz X en la ecuación:

$$2X - AX = C - BX$$

❑ $X = (2 - A + B)^{-1}C$

☒ $X = (2I - A + B)^{-1}C$

❑ $X = (2 - A + B)C$

❑ $X = C(2I - A + B)^{-1}$

9 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, la solución de la ecuación $XA^2 + 5A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$ es:

❑ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

10 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz X solución de la ecuación $AXB = I$ es:

☒ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

❑ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

❑ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

❑ $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Determinantes de orden 2 y 3 por Sarrus

36 Calcula mentalmente el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 0$ porque tiene las filas opuestas.

37 Calcula mentalmente el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 0$ porque tiene una columna de ceros.

38 Calcula mentalmente el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -15 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 0$ porque tiene dos filas proporcionales; la 2.ª es el quíntuplo de la 1.ª cambiada de signo.

39 Calcula mentalmente el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 0$ porque tiene una columna que es combinación de las otras dos; la 3.ª es la suma de la 1.ª y la 2.ª

40 Halla el determinante que se pueda calcular de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

No se puede calcular porque no es cuadrada.

41 Halla los determinantes que se pueda calcular de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35$$

42 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$$

43 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

44 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

45 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 103$$

46 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -200$$

47 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -87$$

2. Propiedades de los determinantes

48 Sea: $|A| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 8 \\ -7 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 219$ y $|B| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Halla mentalmente $|B|$. ¿Qué propiedad has utilizado?

Solución:

$|B| = -219$

Porque $|B|$ se obtiene del $|A|$ cambiando la 1.ª y 3.ª columnas.

49 Halla el valor de los siguientes determinantes y comprueba que son iguales. La 3.ª fila del 2.º se ha obtenido sustituyéndola por la suma del doble de la 2.ª más la 3.ª

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 9$

$|B| = 9$

50 Comprueba la identidad $|A| = |A^t|$ siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 238$

$|A^t| = 238$

51 Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

En el 1.^{er} paso hemos sacado factor común el 3 en la 1.ª fila, y en el 2.º paso hemos sacado factor común el 5 en la 3.ª columna.

52 Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-2), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

Solución:

Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-2), su determinante queda multiplicado por $(-2)^3 = -8$

La propiedad que se ha utilizado dice que para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Como se multiplican las tres líneas, se eleva al cubo.

3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

53 Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

halla:

a) El menor complementario del elemento a_{12}

b) El menor complementario del elemento a_{31}

Solución:

a) $M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 57$ b) $M_{31} = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24$

54 Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 7 & -8 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

halla:

a) El adjunto del elemento a_{22}

b) El adjunto del elemento a_{23}

Solución:

a) $A_{22} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -11$ b) $A_{23} = -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3$

55 Calcula el valor del siguiente determinante por los adjuntos de la línea más sencilla:

$$\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$$

4. Matriz inversa

56 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprueba que B es la inversa de A

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

57 Halla la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$A_{11} = 4$ $\quad$ $A_{21} = 2$

$A_{12} = 5$ $\quad$ $A_{22} = 3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

58 Halla la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$A_{11} = -3$ $\quad$ $A_{21} = 7$

$A_{12} = -2$ $\quad$ $A_{22} = 5$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

59 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$ $\quad$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$ $\quad$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

60 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, la matriz A no tiene inversa.

61 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, la matriz A no tiene inversa.

62 Considera la matriz A que depende de un parámetro k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de k tiene A inversa? Justifica la respuesta.

b) Para $k = -5$, halla la inversa de A

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada, para que tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = k + 8$$

$k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$

La matriz A tiene inversa para $k \neq 8$

b) Para $k = -5$ se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -7/3 & 5/3 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Ecuaciones matriciales

63 Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

razona si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en caso afirmativo, resuélvela.

Solución:

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

64 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz X que verifique:

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

65 Determina la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 27 & -11 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Rango de una matriz

66 Halla mentalmente el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 1$

Porque las dos filas son proporcionales.

67 Halla mentalmente el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 2$

Porque las dos filas no son proporcionales.

68 Halla mentalmente el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 1$

Porque las dos columnas son proporcionales.

69 Halla mentalmente el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 2$

Porque las dos filas no son proporcionales.

70 Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$R(A) = 2$

Porque el determinante es cero y no todas las filas son proporcionales.

71 Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -477$$

$R(B) = 3$

Porque el determinante es distinto de cero.

Para ampliar

72 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

73 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 42$$

74 Siendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ la traspuesta de la matriz E, calcula el determinante de la matriz $E \cdot E^t$

Solución:

$$E \cdot E^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|E \cdot E^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Porque tiene las tres filas proporcionales, la 2.ª es el doble de la 1.ª, y la 3.ª es el triple de la 1.ª

75 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

comprueba que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{vmatrix} = -118$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 59$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A| \cdot |B| = 59 \cdot (-2) = -118$$

76 Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & -10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 7 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot 170 = 340$$

77 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Encuentra, si existe, una matriz X tal que verifique: $AB + 2CX = D$

Solución:

$AB + 2CX = D$

$2CX = D - AB$

$X = (2C)^{-1}(D - AB)$

$$X = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

78 De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y, en los casos en que exista, calcula la matriz inversa y el determinante de dicha inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

a) La matriz A es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, la matriz A no es invertible.

b) La matriz B es cuadrada.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad B_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la inversa es el inverso del determinante.

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = 1$$

79 Determina los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & x\\y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3\\3y-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-y\\3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3\\3y-2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}x-\ \ y&=2x+3\\3x+2y&=3y-2\end{aligned}\right\}$$

$$x=-\frac{5}{4},\ y=-\frac{7}{4}$$

80 Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 0\\-1 & 2 & 4 & 7\\1 & 5 & -1 & 7\end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(A)=R\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 0\\-1 & 2 & 4 & 7\\1 & 5 & -1 & 7\end{pmatrix}\begin{matrix}\\1.^a+2\cdot 2.^a\\2.^a+3.^a\end{matrix}=$$

$$=R\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 0\\0 & 7 & 3 & 14\\0 & 7 & 3 & 14\end{pmatrix}=$$

$$=R\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 0\\0 & 7 & 3 & 14\end{pmatrix}=2$$

81 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & -1 & 0\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Halla la matriz X tal que verifique:

$$AX-I=A$$

Solución:

$AX-I=A$

$AX=A+I$

$X=A^{-1}(A+I)$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

Problemas

82 Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2-2M=3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Estudia si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1}en términos de M e I

Solución:

$M^2-2M=3I$

$$\frac{1}{3}(M^2-2M)=I$$

$$M\left(\frac{1}{3}(M-2I)\right)=I$$

$$M^{-1}=\frac{1}{3}(M-2I)$$

Existirá M^{-1} cuando el determinante de $|M-2I|$ sea distinto de cero, $|M-2I|\neq 0$

83 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\-1 & 4\end{pmatrix}$$

Calcula $|ABC|$

Solución:

$$ABC=\begin{pmatrix}-3 & 6\\0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow |ABC|=-9$$

84 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\\-2 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

¿Se cumple la igualdad rang$(A\cdot B)$ = rang (A) · rang (B)? Justifica la respuesta.

Solución:

rang$(A)=2$, rang$(B)=2$

rang$(A)\cdot$ rang$(B)=2\cdot 2=4$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\-5 & 3 & -1\\10 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

rang$(A\cdot B)=2$

Porque la 3.ª fila es: $-2 \cdot 2$.ª. Por tanto, no se verifica la igualdad.

También se observa que:

$$\text{rang}(A) \cdot \text{rang}(B) = 4$$

y que la matriz $A \cdot B$ tiene de dimensión 3×3; luego nunca puede tener rango 4

85 Se sabe que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$$

a) Calcula el valor de:

$$\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix}$$

b) Enuncia una de las propiedades de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a - b & 6a \\ 3c - d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a - b & 2b \\ 3c - d & 2d \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a \\ d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{vmatrix} =$

$= 0 - 6 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 0 =$

$= 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$

b) Se han utilizado las propiedades:

- Un determinante se puede descomponer en la suma de otros dos de forma que tenga todas las líneas iguales menos una, cuya suma sea la del primero. Se ha aplicado 3 veces.
- Para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Por tanto, en una línea se pueden sacar los factores comunes.
- Si en la matriz se cambian dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.
- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.

86 Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

razona si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en caso afirmativo, resuélvela.

Solución:

Tiene solución si la matriz A tiene inversa, es decir, si $|A| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego tiene inversa y la ecuación matricial tiene solución.

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

87 Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$A^2 \cdot X = 2B \Rightarrow X = (A^2)^{-1}2B$

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

$X = (A^2)^{-1}2B$

$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$

88 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$

Solución:

$A^2 + AX = I$

$AX = I - A^2$

$X = A^{-1}(I - A^2)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$I - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

89 Se sabe que la siguiente matriz M tiene de rango 1

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

¿Pueden determinarse a, b, c y d? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, hállalos.

Solución:

Si la matriz tiene rango 1, la 2.ª fila es proporcional a la 1.ª. Por tanto:

$$a = \frac{6}{5} \text{ y } b = \frac{7}{5}$$

Si la matriz tiene rango 1, también la 3.ª fila es proporcional a la 1.ª. Por tanto:

$$c = \frac{12}{5} \ \text{ y } \ d = \frac{14}{5}$$

Para profundizar

90 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de x para los que no existe la inversa de A

b) Para $x = 3$, calcula, si es posible, A^{-1}

Solución:

a) No existe la inversa para los valores de x que hagan su determinante cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$$

b) Para $x = 3$ se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

91 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$

Solución:

a) La matriz A no tiene inversa cuando su determinante sea cero, $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$$

$$1 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda = 1,\ \lambda = -1$$

b) Para $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

92 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $(A^tA^{-1})^2A$

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 21/4 & -5/4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2A = \begin{pmatrix} 21/2 & -5/4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

93 Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Halla todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 2M = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix}$$

$$3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $M^2 - 2M = 3I$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2a &= 3 \\ 2ab - 2b &= 0 \\ a^2 + b^2 - 2a &= 3 \\ 2ab - 2b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2a &= 3 \\ ab - b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$ab - b = 0 \Rightarrow b(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Si $a = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

$$a = 1,\ b = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 1,\ b = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$
$a = -1, a = 3$

$$a = -1,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a = 3,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Practica

99 Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -7 & 8\end{pmatrix}$$

comprueba que:

a) $|A| = |A^t|$ b) $|B| = |B^t|$ c) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

Solución:

Problema 99

$A = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix}5 & 6\\ -7 & 8\end{pmatrix}$;

a)

$|A| \rightarrow 10$

$|A^T| \rightarrow 10$

b)

$|B| \rightarrow 82$

$|B^T| \rightarrow 82$

c)

$|A\cdot B| \rightarrow 820$

$|A|\cdot|B| \rightarrow 820$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

100 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

halla una matriz P que verifique: $PB = AP$

Solución:

Problema 100

$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$;

$P = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$;

$P\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix}a & -b\\ c & -d\end{pmatrix}$

$A\cdot P \rightarrow \begin{pmatrix}a+2\cdot c & b+2\cdot d\\ c & d\end{pmatrix}$

$\text{resolver}\begin{bmatrix}a = a + 2c\\ -b = b + 2d\\ c = c\\ -d = d\end{bmatrix} \rightarrow \{\{a=a, b=0, c=0, d=0\}\}$

La matriz es $P = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

101 Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Discute, en función de los valores que pueda tomar k, si la matriz:

a) AB tiene inversa.

b) BA tiene inversa.

Solución:

Problema 101

$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

a)

$|A\cdot B| \rightarrow 0$

$A\cdot B$ no tiene inversa nunca, independiente del valor de k.

a)

$|B\cdot A| \rightarrow k^2+2\cdot k+3$

$\text{resolver}(k^2+2\cdot k+3 = 0) \rightarrow \{\square\}$

$B\cdot A$ tiene inversa siempre, independiente del valor de k.

102 Halla el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

según los valores de a

Solución:

Problema 102

$A(a) = \begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$;

$|A(a)| \rightarrow a^3-3\cdot a+2$

$\text{resolver}(a^3 - 3\cdot a + 2 = 0) \rightarrow \{\{a=-2\},\{a=1\}\}$

Si $a \neq -2$, $a \neq 1$, Rango (A) = 3

Para a = −2

$A(-2) \rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(-2)) \rightarrow 2$

Para a = 1

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(1)) \rightarrow 1$

103 Encuentra el valor de a que hace que la siguiente matriz no tenga inversa:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ a & 5 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 103

$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ a & 5 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

$\text{resolver}(|A| = 0) \rightarrow \{\{a=10\}\}$

Para a = 10 no tiene inversa

104 Calcula la matriz X tal que:

$$XA + B = C$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 104

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(C - B) \cdot A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$