

Unidad 1.

Sistemas lineales

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Piensa y calcula

Resuelve mentalmente el siguiente sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 6 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$x = -1, y = 4, z = 2$$

Aplica la teoría

1 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x + 3y = 1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

a) Se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x + 3y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2.^{\text{a}} - 1.^{\text{a}} \\ 3.^{\text{a}} - 2 \cdot 1.^{\text{a}} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ y = -1 \\ 3y - 4z = 1 \end{array} \right\} y = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ y = -1 \\ -3 - 4z = 1 \end{array} \right\} z = -1 \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}$$

La solución del sistema es: $x = 2, y = -1, z = -1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2.^{\text{a}} - 3 \cdot 1.^{\text{a}} \\ 1.^{\text{a}} - 3.^{\text{a}} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 4y - 5z = 2 \\ y = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 1 + z = 1 \\ 4y - 5z = 2 \\ y = 1 \end{array} \right\} z = 2/5$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 1 + 2/5 = 1 \\ z = 2/5 \\ y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 8/5 \\ z = 2/5 \\ y = 1 \end{array}$$

La solución del sistema es: $x = 8/5, y = 1, z = 2/5$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

2 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 9 \\ x - y - 6z = 5 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

a) Se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 9 \\ x - y - 6z = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1.^{\text{a}} - 2.^{\text{a}} \\ 1.^{\text{a}} - 3.^{\text{a}} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ 3y + 3z = -3 \\ 2y + 8z = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2.^{\text{a}} : 3 \\ 3.^{\text{a}} : 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ y + z = -1 \\ y + 4z = -1 \end{array} \right\} 3.^{\text{a}} - 2.^{\text{a}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ y + z = -1 \\ 3z = 0 \end{array} \right\} z = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 1 = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array} \right\} x = 4$$

La solución del sistema es: $x = 4, y = -1, z = 0$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) La 1.ª ecuación se coloca la 3.ª y se escriben a la derecha las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.ª - 2.ª \\ 2 \cdot 1.ª - 3.ª \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y - z = -2 \\ 3y + z = 3 \end{cases} \begin{matrix} 3.ª - 3 \cdot 2.ª \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y - z = -2 \\ 4z = 9 \end{cases} z = 9/4$$

$$\begin{cases} x + 2y + 9/4 = 2 \\ y - 9/4 = -2 \\ z = 9/4 \end{cases} y = 1/4$$

$$\begin{cases} x + 1/2 + 9/4 = 2 \\ y = 1/4 \\ z = 9/4 \end{cases} x = -3/4$$

La solución del sistema es: $x = -3/4, y = 1/4, z = 9/4$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

3 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 8x + 3y + 2z = 4 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

a) Se permutan la 1.ª y la 2.ª ecuación, y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y + 4z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \begin{matrix} 2 \cdot 1.ª + 2.ª \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z = 1 \\ 5y = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} y = 3/5$$

$$\begin{cases} -x + 6/5 - 2z = 1 \\ y = 3/5 \\ 3/5 + z = 2 \end{cases} z = 7/5$$

$$\begin{cases} -x + 6/5 - 14/5 = 1 \\ y = 3/5 \\ z = 7/5 \end{cases} x = -13/5$$

La solución del sistema es: $x = -13/5, y = 3/5, z = 7/5$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Se coloca la 2.ª ecuación en primer lugar, se permutan las columnas de x e y , y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} -y + 2x = 0 \\ 3y + 8x + 2z = 4 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 3 \cdot 1.ª + 2.ª \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -y + 2x = 0 \\ 14x + 2z = 4 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 2.ª : 2 \\ 7 \cdot 3.ª - 2.ª \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -y + 2x = 0 \\ 7x + z = 2 \\ 12z = 3 \end{cases} z = 1/4$$

$$\begin{cases} -y + 2x = 0 \\ 7x + 1/4 = 2 \\ z = 1/4 \end{cases} \begin{matrix} x = 1/4 \\ z = 1/4 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -y + 1/2 = 0 \\ x = 1/4 \\ z = 1/4 \end{cases} y = 1/2$$

La solución del sistema es: $x = 1/4, y = 1/2, z = 1/4$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

4 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} -x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y - 2z = -5 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} -1.ª \\ 2.ª + 3 \cdot 1.ª \\ y + z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$$

La solución del sistema es: $x = 0, y = 0$ y $z = 0$, que es la solución trivial.

El sistema es homogéneo compatible determinado.

b) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y - 2z = -5 \end{cases} \begin{matrix} 2.ª - 3 \cdot 1.ª \\ 1.ª - 4.ª \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 5z = -10 \\ 2y - z = -2 \\ y + 4z = 8 \end{cases} \begin{matrix} 3.ª - 2 \cdot 2.ª \\ \uparrow \Rightarrow \end{matrix}$$

Se elimina la 4.ª ecuación porque es $4.ª = 3.ª - 2.ª$

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 5z = -10 \\ 9z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 3 \\ y - 10 = -10 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{matrix}$$

La solución del sistema es: $x = -1, y = 0, z = 2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

2. Estudio de los sistemas

Piensa y calcula

Indica el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas y clasificalos:

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Solución:

- a) Infinitas soluciones, porque la 2.^a es el doble de la 1.^a. El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.
 b) No tiene solución, porque la 2.^a ecuación es el doble de la 1.^a excepto el término independiente. El sistema es heterogéneo incompatible.
 c) Una solución. El sistema es heterogéneo compatible determinado.

Aplica la teoría

5 Discute los siguientes sistemas y clasificalos:

$$a) \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + z = -1 \\ x + y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a - 2.^a \\ 2 \cdot 1.^a - 3.^a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ y - 3z = -1 \\ 5y - z = 9 \end{cases} \begin{matrix} \\ 3.^a - 5 \cdot 2.^a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ y - 3z = -1 \\ 14z = 14 \end{cases} z = 1$$

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 6 \\ y - 3 = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 - 1 = 6 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} x = 3$$

La solución del sistema es: $x = 3, y = 2, z = 1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Se elimina la 1.^a ecuación porque es igual a la 3.^a:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 - z + y = 0 \\ x = -1 - z \end{cases} \begin{matrix} y = 1 + z \\ x = -1 - z \end{matrix}$$

La solución del sistema es: $x = -1 - z, y = 1 + z$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

6 Discute los siguientes sistemas y clasificalos:

$$a) \begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a + 2.^a \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 2.^a = 2 \cdot 3.^a \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 - 4z \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - z = 1 - 4z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

La solución del sistema es: $x = -3z, y = 1 - z$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases} \begin{matrix} 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 5y - 5z = 0 \\ 4y - 4z = 2 \end{cases} \begin{matrix} 2.^a : 5 \\ 3.^a : 2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 2y - 2z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ 3.^a - 2 \cdot 2.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = 1$, que es imposible. El sistema no tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

7 Discute los siguientes sistemas y clasificalos:

$$\left. \begin{array}{l} a) -3x + y + 4z = 1 \\ -x - 3y - 2z = 1 \\ y + z = -3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) 4x + y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) Se permutan la 1.^a y la 2.^a ecuación cambiando de signo la 2.^a ecuación y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = -1 \\ -3x + y + 4z = 1 \\ y + z = -3 \end{array} \right\} 2.^a + 3 \cdot 1.^a$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = -1 \\ 10y + 10z = -2 \\ y + z = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2.^a : 2 \\ 10 \cdot 3.^a - 2.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = -1 \\ 5y + 5z = -1 \\ 0 = -28 \end{array} \right\}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = -28$, que es imposible. El sistema no tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

b) Se permutan las columnas de las y con las x y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} y + 4x + 2z = 0 \\ y + 2x = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\} 1.^a - 2.^a$$

$$\left. \begin{array}{l} y + 4x + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\} 2.^a = 2 \cdot 3.^a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 4x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y + 4x = -2z \\ x = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - 4z = -2z \\ x = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2z \\ x = -z \end{array} \right\}$$

La solución del sistema es: $x = -z, y = 2z$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

8 Discute los siguientes sistemas y clasificalos:

$$\left. \begin{array}{l} a) x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) x + 2y - 2z = 1 \\ -x - 3y + z = 6 \\ 3x + y + z = 2 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{array} \right\} 2 \cdot 1.^a - 2.^a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

La solución del sistema es: $x = -z, y = 0$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 2z = 1 \\ -x - 3y + z = 6 \\ 3x + y + z = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a + 2.^a \\ 3 \cdot 1.^a - 3.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 2z = 1 \\ -y - z = 7 \\ 5y - 7z = 1 \end{array} \right\} 3.^a + 5 \cdot 2.^a$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 2z = 1 \\ -y - z = 7 \\ -12z = 36 \end{array} \right\} z = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 6 = 1 \\ -y + 3 = 7 \\ z = -3 \end{array} \right\} y = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 8 + 6 = 1 \\ y = -4 \\ z = -3 \end{array} \right\} x = 3$$

La solución del sistema es: $x = 3, y = -4, z = -3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

9 Discute los siguientes sistemas y clasificalos:

$$\left. \begin{array}{l} a) 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 1 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) 3x + y - 2z = -8 \\ x + 2y + z = -1 \\ 2x - 3y + z = -3 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) Se permutan las dos primeras ecuaciones y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 1.^a - 2.^a \\ 2 \cdot 1.^a - 3.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y + z = 1 \\ 13y + z = 2 \\ 13y + z = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3.^a - 2.^a \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y + z = 1 \\ 13y + z = 2 \\ 0 = 2 \end{array} \right\}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = 2$, que es imposible. El sistema no tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

- b) Se permutan la 1.^a y la 2.^a ecuación y se escriben las operaciones que hay que hacer:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = -8 \\ 2x - 3y + z = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 1.^a - 2.^a \\ 2 \cdot 1.^a - 3.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ 5y + 5z = 5 \\ 7y + z = 1 \end{array} \right\} 2.^a : 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ y + z = 1 \\ 7y + z = 1 \end{array} \right\} 7 \cdot 2.^a - 3.^a$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ y + z = 1 \\ 6z = 6 \end{array} \right\} z = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 1 = -1 \\ y + 1 = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\} y = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1 = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array} \right\} x = -2$$

La solución del sistema es: $x = -2, y = 0, z = 1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

- 10** Discute los siguientes sistemas y clasificalos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y = z \\ x + z = y \\ y - z = x \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

- a) Se cambia la columna de x al final y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} y - z + 2x = 0 \\ -y - z + x = 0 \\ -2z + 3x = 0 \end{array} \right\} 1.^a + 2.^a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - z + 2x = 0 \\ -2z + 3x = 0 \\ -2z + 3x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} y - z + 2x = 0 \\ -2z + 3x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2x = z \\ 3x = 2z \end{array} \right\} x = 2z/3$$

$$\left. \begin{array}{l} y + 4z/3 = z \\ x = 2z/3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -z/3 \\ x = 2z/3 \end{array}$$

La solución del sistema es: $x = 2z/3, y = -z/3$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2\lambda/3 \\ y = -\lambda/3 \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) Se pasan todas las incógnitas al primer miembro, se ordenan y se escriben las operaciones que hay que realizar. Se elimina la 3.^a ecuación porque es igual que la 2.^a

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} 2.^a - 1.^a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right\} z = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array}$$

La solución del sistema es: $x = y, z = 0$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

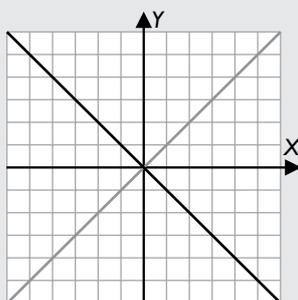
$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Interpretación gráfica

Piensa y calcula

Representa en el plano las rectas del siguiente sistema e interprétalo gráficamente: $\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\}$

Solución:



Las dos rectas son secantes. La solución del sistema es $x = 0, y = 0$

Aplica la teoría

11 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 4x + y = 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

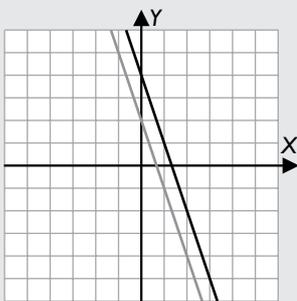
$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 3x + y = 4 \\ 1^{\text{a}} - 2^{\text{a}} \quad 0 = 2 \end{array}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = 2$, que es imposible.

El sistema no tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

La interpretación gráfica es que son dos rectas paralelas.



b) Se permutan las columnas de las x y de las y . Se escriben las operaciones que hay que realizar:

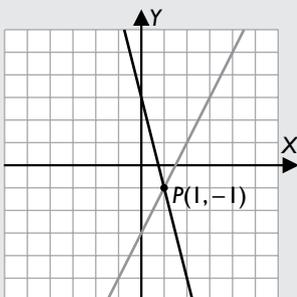
$$\left. \begin{array}{l} -y + 2x = 3 \\ y + 4x = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \\ \Rightarrow -y + 2x = 3 \\ 6x = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} -y + 2x = 3 \\ 6x = 6 \end{array} \right\} x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} -y + 2 = 3 \\ x = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

La interpretación gráfica es que son dos rectas secantes que se cortan en el punto $P(1, -1)$



12 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se sustituye $z = 0$ en la 1.ª y 2.ª ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 - y \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

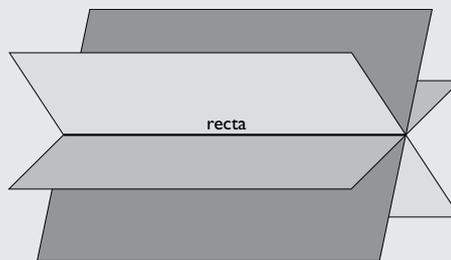
La solución del sistema es: $x = 3 - y$, $z = 0$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

La interpretación gráfica es que los tres planos se cortan en una recta.



13 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y - 6z = -10 \end{array} \right\}$$

Solución:

La 1.ª ecuación se pone la 3.ª y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ x + y - 6z = -10 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^{\text{a}} - 2^{\text{a}} \\ 2 \cdot 1^{\text{a}} - 3^{\text{a}} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ y + 5z = 11 \\ 5y - 5z = 1 \end{array} \right\} 5 \cdot 2^{\text{a}} - 3^{\text{a}}$$

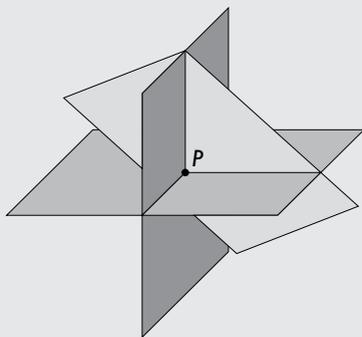
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ y + 5z = 11 \\ 30z = 54 \end{array} \right\} z = 9/5$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 9/5 = 1 \\ y + 9 = 11 \\ z = 9/5 \end{array} \right\} y = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 4 - 9/5 = 1 \\ y = 2 \\ z = 9/5 \end{array} \right\} x = -6/5$$

La solución es: $x = -6/5$, $y = 2$, $z = 9/5$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.
La interpretación gráfica es que los tres planos se cortan en un punto, que es la solución del sistema.



14 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{array} \right\}$$

Solución:

La 3.ª ecuación se pone la 1.ª y se escriben las operaciones que hay que realizar:

$$\left. \begin{array}{l} -x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2.ª + 3 \cdot 1.ª \\ 2.ª - 3.ª \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + 3y + 3z = 3 \\ 11y + 11z = 24 \\ 4y + 4z = 16 \end{array} \right\} 3.ª : 4$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + 3y + 3z = 3 \\ 11y + 11z = 24 \\ y + z = 4 \end{array} \right\} 11 \cdot 3.ª - 2.ª$$

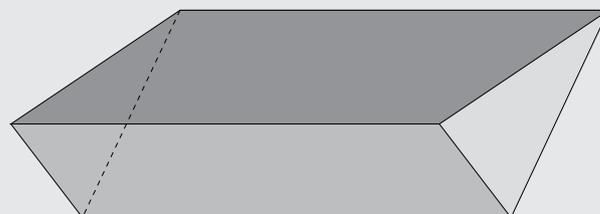
$$\left. \begin{array}{l} -x + 3y + 3z = 3 \\ 11y + 11z = 24 \\ 0 = 20 \end{array} \right\}$$

Se observa que se ha llegado a una contradicción, $0 = 20$, que es imposible.

El sistema no tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

La interpretación gráfica es que los tres planos no se cortan a la vez. Se cortan dos a dos.



4. Resolución de problemas

Piensa y calcula

Plantea un sistema de ecuaciones para resolver el siguiente enunciado:

«Encuentra dos números cuya suma sea 14 y el doble del mayor menos el menor sea 10».

Solución:

N.º mayor: x

N.º menor: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 14 \\ 2x - y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 8, y = 6$$

Los números son 8 y 6

Aplica la teoría

15 Si la altura de Carlos aumentase el triple de la diferencia entre las alturas de Toni y de Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Toni es igual que nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Altura de Carlos: x

Altura de Toni: y

Altura de Juan: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} x + 3(y - z) = z \\ x + y + z = 515 \\ 8y = 9x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y - 4z = 0 \\ x + y + z = 515 \\ 9x - 8y = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 160 \\ y = 180 \\ z = 175 \end{array} \right\}$$

c) **Solución**

Las estaturas son:
 Altura de Carlos: 160 cm
 Altura de Toni: 180 cm
 Altura de Juan: 175 cm

16 En unos almacenes, Arturo ha comprado 3 discos duros y un adaptador de red. María ha comprado 2 discos duros y dos adaptadores de red por un 20 % menos que lo ha pagado Arturo. Si el precio de un adaptador excede en 5 € al 25 % del precio del disco duro, calcula el precio de cada producto.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio del disco duro: x

Precio del adaptador: y

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} 0,8(3x + y) = 2x + 2y \\ y = 0,25x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 60, y = 20$$

c) **Solución**

El precio del disco duro es de 60 €
 El precio del adaptador de red es de 20 €

17 La edad de una madre es en la actualidad el triple de la de su hijo. Las edades del padre, la madre y el hijo suman 80 años, y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tienen en la actualidad el padre, la madre y el hijo?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

	Actualmente	Dentro de 5 años
Hijo	x	$x + 5$
Madre	y	$y + 5$
Padre	z	$z + 5$

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ x + y + z = 80 \\ x + 5 + y + 5 = z + 5 + 5 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 30 \\ z = 40 \end{array} \right\}$$

c) **Solución**

Las edades actuales son:
 Madre: 30 años.
 Hijo: 10 años.
 Padre: 40 años.

18 Alba compra tres pantalones, dos camisas y un sombrero por 135 €. Natalia compra un pantalón, tres camisas y un sombrero por 100 €. Javier compra dos pantalones, tres camisas y dos sombreros por 155 €. Si todos los artículos se han comprado al mismo precio, ¿cuál es el precio de cada una de las prendas?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio del pantalón: x

Precio de la camisa: y

Precio del sombrero: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 135 \\ x + 3y + z = 100 \\ 2x + 3y + 2z = 155 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 25 \\ y = 15 \\ z = 30 \end{array} \right\}$$

c) **Solución**

Precio del pantalón: 25 €
 Precio de la camisa: 15 €
 Precio del sombrero: 30 €

Ejercicios y problemas

Preguntas tipo test

1 El siguiente sistema es:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

- Heterogéneo.
- Homogéneo.
- No se puede clasificar porque tiene más ecuaciones que incógnitas.
- Ninguna de las anteriores.

2 Se llama sistemas equivalentes a:

- Los que tienen el mismo número de ecuaciones.
- Los que tienen las mismas soluciones.
- Los que tienen el mismo número de incógnitas.
- Ninguna de las respuestas anteriores.

3 ¿Cuál de estas transformaciones no produce un sistema equivalente?

- Suprimir ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes.
- Cambiar de orden las ecuaciones.
- Sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes.
- Suprimir una incógnita que tenga el mismo coeficiente en todas las ecuaciones.

4 En un sistema compatible determinado:

- Existen infinitas soluciones.
- No existe solución.
- Existe una solución.
- Ninguna de las respuestas anteriores.

5 Un sistema homogéneo

- Es siempre compatible indeterminado.
- Es incompatible.
- Es siempre compatible.
- Es siempre compatible determinado.

6 La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y - z = 0 \\ 3x - 2y - 5z = -7 \end{cases}$$

- $x = 1, y = 2, z = 0$
- $x = 1, y = 0, z = -2$
- $x = 1, y = 0, z = 2$
- No tiene solución.

7 La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$$

- $x = -1, y = 0, z = 1$
- $x = -1, y = 2 - \lambda, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$
- $x = -\lambda, y = 2 - \lambda, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$
- No tiene solución.

8 La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 2 \\ 5x + 15y - 5z = 5 \end{cases}$$

- $x = 1, y = 1, z = 5$
- $x = 1 + \lambda, y = \lambda, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$
- Es incompatible.
- $x = 1 + \lambda - 3\mu, y = \mu, z = \lambda; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

9 En el siguiente sistema no cambia la solución si añadimos la ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

- Cualquier ecuación que se añada cambiará la solución.
- $y + 2z = 5$
- $y + 2z = 1$
- $2x + 3y = 0$

10 Un comercio tiene un total de 270 unidades de un producto de tres tipos: A, B y C. Del tipo A tiene 30 unidades menos que de la totalidad de B más C, y del tipo C tiene el 35% de la suma de A más B. El número de productos que hay en el comercio de cada tipo es:

- Del tipo A hay 120; del tipo B, 80, y del tipo C, 70
- Del tipo A hay 120; del tipo B, 70, y del tipo C, 80
- El problema no tiene solución.
- Del tipo A hay 100; del tipo B, 90, y del tipo C, 80

Ejercicios y problemas propuestos

1. Sistemas de ecuaciones lineales

19 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + z = 2 \\ x + y = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

- a) Solución: $x = 1, y = 1, z = -1$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.
- b) Solución: $x = 5, y = -2, z = -3$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.

20 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + y + z = 6 \\ x + 3y + z = -10 \\ x + y + 3z = 4 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

- a) Solución: $x = -9, y = 4, z = 7$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.
- b) Solución: $x = 3, y = -5, z = 2$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.

21 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + z = 6 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ x + y + 2z = 8 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

- a) Solución: $x = 4/3, y = 2/3, z = 0$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.
- b) Solución: $x = -2, y = 4, z = 3$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.

2. Estudio de los sistemas

22 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ x + z = -2 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + y - 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

- a) Solución: $x = 1/2, y = -1/2, z = -5/2$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.
- b) Solución: $x = \frac{9-5z}{6}, y = \frac{13z-3}{6}$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{9-5\lambda}{6} \\ y = \frac{13\lambda-3}{6} \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

23 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para el valor $a = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{array} \right\}$$

Solución:

- a) Solución: $x = z, y = -z$
La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

24 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

- a) Solución: $x = z/7, y = 3z/7$
La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda/7 \\ y = 3\lambda/7 \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

- b) Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$

El sistema es homogéneo compatible determinado.

25 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

- a) Solución: $x = \frac{2z+1}{2}, y = 0$
La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2\lambda+1}{2} \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1 - y, z = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

26 Discute los siguientes sistemas y clasificalos:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 4y - 6z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - z = 2 \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

b) Solución: $x = 29, y = -19, z = 0$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

27 Discute el siguiente sistema y clasificalo para los valores:

a) $\lambda = -1$

b) $\lambda = 2$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + \lambda z = 2 \\ \lambda x + \lambda y - z = 5 \\ (\lambda + 1)x + \lambda y - z = \lambda \end{array} \right\}$$

Solución:

a) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

b) Solución: $x = -3, y = 9, z = 7$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

28 Discute el siguiente sistema y clasificalo para los valores:

a) $a = 1$

b) $a = 2$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + (a - 1)z = 0 \\ x + (a - 1)y + az = a \end{array} \right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = 1 - z, y = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

3. Interpretación gráfica

29 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

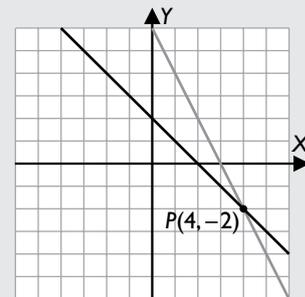
$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + y = 6 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = 4, y = -2$

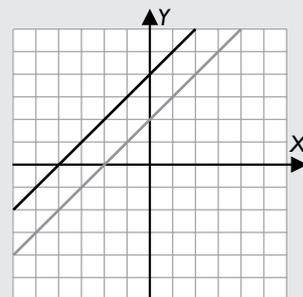
El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Son dos rectas secantes.

b) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.



Son rectas paralelas.

30 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 8x + 4y = 12 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x - y = -3 \end{array} \right\}$$

Solución:

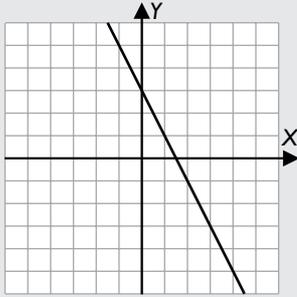
a) Solución: $2x + y = 3$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{3 - \lambda}{2} \\ y = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

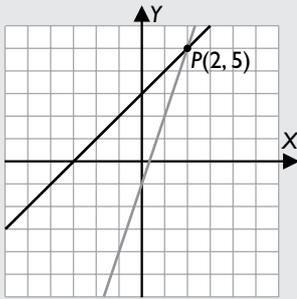
Ejercicios y problemas propuestos



Son dos rectas coincidentes.

b) Solución: $x = 2, y = 5$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Son dos rectas secantes.

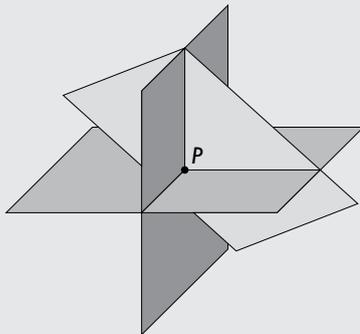
31 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$x = 1, y = 1, z = 1$$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Los tres planos se cortan en el punto que es la solución del sistema.

32 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$$

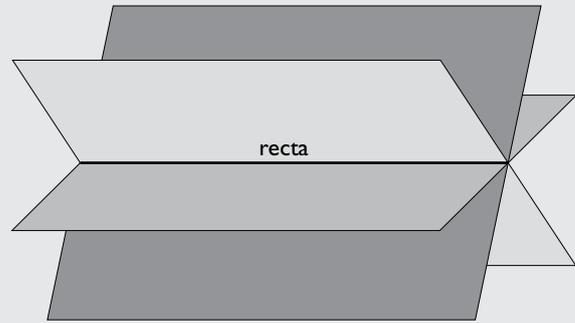
Solución:

$$x = 3 + 2z, y = -1 - z$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$



Los planos se cortan en una recta.

33 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + 7y - 6z = -10 \end{cases}$$

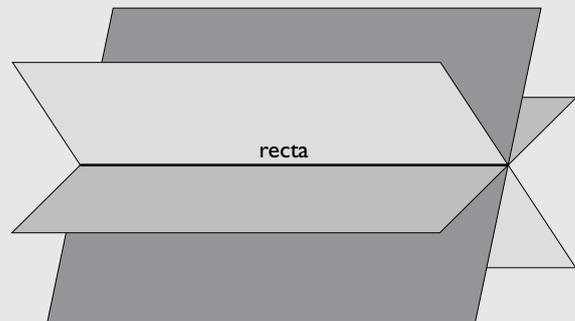
Solución:

$$x = -1/5 - z, y = -7/5 + z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = -1/5 - \lambda \\ y = -7/5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.



Los planos se cortan en una recta.

34 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

Solución:

No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.



Los planos no tienen ningún punto en común. Se cortan dos a dos.

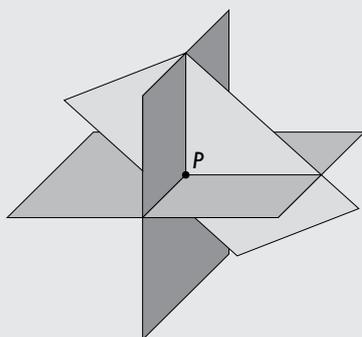
- 35** Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ 4y + z &= 0 \\ 3x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

$$x = 1/9, y = -1/3, z = 4/3$$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.



Los planos se cortan en un punto que es la solución del sistema.

4. Resolución de problemas

- 36** Sonia ha comprado unos bolígrafos de 2 €, unos cuadernos de 1 € y unas cajas de 3 €. Entre bolígrafos y cuadernos hay el triple que cajas. Considerando que ha comprado 12 objetos y ha pagado 22 €, calcula el número de bolígrafos, cuadernos y cajas que ha comprado.

Solución:

- a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

N.º de bolígrafos: x

N.º de cuadernos: y

N.º de cajas: z

- b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 22 \\ x + y &= 3z \\ x + y + z &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 4, y = 5, z = 3$$

c) **Solución**

Se ha comprado:

N.º de bolígrafos: 4

N.º de cuadernos: 5

N.º de cajas: 3

- 37** Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento; que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento; y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:

- a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

	Madre	Hijo 1	Hijo 2
Actualmente	x	y	z
Hace 14 años	$x - 14$	$y - 14$	$z - 14$
Dentro de 10 años	$x + 10$	$y + 10$	$z + 10$
Dentro de $x - y$ años	$2x - y$	x	$z + x - y$

- b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} x - 14 &= 5(y - 14 + z - 14) \\ x + 10 &= y + 10 + z + 10 \\ z + x - y &= 42 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x - 5y - 5z &= -126 \\ x - y - z &= 10 \\ x - y + z &= 42 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 44, y = 18, z = 16$$

- c) **Solución**

Las edades son:

Madre: 44 años.

Hijo 1: 18 años.

Hijo 2: 16 años.

- 38** Una persona invierte 7000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1%. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5% en las acciones de la empresa A y un 3% en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es de 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si se sabe que el dinero total dedicado a comprar acciones superó en 2600 € al dinero del depósito.

Solución:

- a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Dinero invertido en acciones de A: x

Dinero invertido en acciones de B: y

Dinero invertido en el depósito: z

b) Manos a la obra

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 7000 \\ 0,05x + 0,03y + 0,01z &= 202 \\ x + y &= z + 2600 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x = 1800, y = 3000, z = 2200$$

c) Solución

Invierte en acciones de A 1800 €, en B, 3000 € y en el depósito 2200 €

- 39** Un tren transporta 470 viajeros, y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 4250 €. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que asciende a 10 €, cuántos han pagado el 80% del billete y cuántos han pagado el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 50% es la mitad del número de viajeros que pagaron el 80%

Solución:

- a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Viajeros que pagan el 100%: x

Viajeros que pagan el 80%: y

Viajeros que pagan el 50%: z

b) Manos a la obra

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 470 \\ 10x + 8y + 5z &= 4250 \\ z &= y/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 320, y = 100, z = 50$$

c) Solución

320 viajeros pagan el 100% del billete.

100 viajeros pagan el 80% del billete.

50 viajeros pagan el 50% del billete.

Para ampliar

- 40** Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } 2x + y - z &= -1 \\ x - 2y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 4 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{b) } 2x - y &= 4 \\ -2x + y &= -4 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

a) $x = 0, y = 2, z = 3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) $x = 2; y = 0$

El sistema es heterogéneo compatible.

- 41** Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } 2x + y + z &= 6 \\ x + y + 2z &= 4 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{b) } x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 3z &= 1 \\ 8x - 5y + 3z &= 19 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

a) $x = 5, y = -7, z = 3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) $x = \frac{2z + 4}{3}, y = \frac{5z - 5}{3}$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2(\lambda + 2)}{3} \\ y &= \frac{5(\lambda - 1)}{3} \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

- 42** Resuelve y clasifica el siguiente sistema para el valor de $m = 3$:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 5 \\ -x + (m + 2)z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

$x = -3, y = 8, z = 0$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

- 43** Resuelve y clasifica el sistema para los siguientes valores de a :

a) $a = -1$

b) $a = 2$

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 2 \\ ax + y + 2z &= 0 \\ x - y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = 2 + y, z = 1$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 1 \end{aligned} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1, y = -1, z = -1/2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

- 44** Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } -3x + y + 4z &= 1 \\ -x - 3y - 2z &= 1 \\ y + z &= -3 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{b) } x + y + 5z &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

a) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

b) Solución: $x = -3z, y = -2z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

45 Discute el sistema y clasifícalo para los siguientes valores de λ :a) $\lambda = 2$ b) $\lambda = -1$

$$\left. \begin{array}{l} -x - \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y + 2z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{array} \right\}$$

Solución:a) Solución: $x = 2/3, y = 2/3, z = 2/3$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) Solución: $x = 1 + z, y = z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

46 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\left. \begin{array}{l} a) \begin{cases} x - y = 3 \\ x + 9z = 7 \\ x - y + 6z = 6 \end{cases} \\ b) \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases} \end{array} \right\}$$

Solución:a) Solución: $x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

b) No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

47 Resuelve por Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} a) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \\ b) \begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y = -7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases} \end{array} \right\}$$

Solución:a) Solución: $x = 1 - z, y = z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = -5, y = -2, z = 9$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

48 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores de λ :a) $\lambda = 0$ b) $\lambda = 3$

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda - 1)x + y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:a) Solución: $x = 1, y = 1 - z$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1, y = 0, z = 1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

49 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para $a = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array} \right\}$$

Solución: $x = 3 - y, z = -1$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

50 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\left. \begin{array}{l} a) \begin{cases} -x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ b) \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \end{array} \right\}$$

Solución:a) $x = 0, y = 0, z = 0$

El sistema es homogéneo compatible determinado.

b) $x = 0, y = 0, z = 0$

El sistema es homogéneo compatible determinado.

51 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores de a :

a) $a = -1$

b) $a = 1$

$$\left. \begin{aligned} (a+1)x + 2y + z &= a+3 \\ ax + y &= a \\ ax + 3y + z &= a+2 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

a) Solución:

$$x = \frac{4-z}{2}, y = \frac{2-z}{2}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{4-\lambda}{2} \\ y &= \frac{2-\lambda}{2} \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

b) Solución: $x = 1, y = 0, z = 2$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

Problemas

52 Juan compró 4 entradas de adulto y 6 de niño por 56 €, y Sara abonó 48 € por 5 entradas de adulto y 2 de niño. ¿Cuánto valen las entradas de adulto y de niño?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio entrada adulto: x

Precio entrada niño: y

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} 4x + 6y &= 56 \\ 5x + 2y &= 48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 8, y = 4$$

c) **Solución**

El precio de la entrada de adulto es 8 €

El precio de la entrada de niño es 4 €

53 Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta, descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 € respecto del precio inicial; si compra en la segunda oferta tres productos A, uno B y cinco C, el ahorro es de 29 €; y si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 €.

Calcula el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio del producto A: x

Precio del producto B: y

Precio del producto C: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} 0,04x + 0,12y + 0,15z &= 16 \\ 0,24x + 0,1y + 0,3z &= 29 \\ x + y + z &= 135 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 25, y = 50, z = 60$$

c) **Solución**

Precio del producto A es 25 €

Precio del producto B es 50 €

Precio del producto C es 60 €

54 Un cliente ha gastado 90 € en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas en una tienda. Cada disco le ha costado 12 €; cada libro, 9 €; y cada carpeta, 3 €. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros. Calcula cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

N.º de discos: x

N.º de libros: y

N.º de carpetas: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 12x + 9y + 3z &= 90 \\ x + z &= 3y \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 4, y = 3, z = 5$$

c) **Solución**

N.º de discos: 4

N.º de libros: 3

N.º de carpetas: 5

55 En una competición deportiva celebrada en un centro escolar participaron 50 atletas distribuidos, según la edad, en tres categorías: infantiles, cadetes y juveniles. El doble del número de atletas infantiles, por una parte, excede en una unidad al número de atletas cadetes y , por otra parte, coincide con el quintuplo del número de atletas juveniles. Determina el número de atletas que hubo en cada categoría.

Solución:a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntasN.º de atletas infantiles: x N.º de atletas cadetes: y N.º de atletas juveniles: z b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 2x = y + 1 \\ 2x = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow x = 15, y = 29, z = 6$$

c) **Solución**

N.º de atletas infantiles: 15

N.º de atletas cadetes: 29

N.º de atletas juveniles: 6

56 Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264 000 €. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 € y un dólar es igual a 1,1 €, ¿cuál es la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible?

Solución:a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntasCantidad de dinero en euros: x Cantidad de dinero en libras: y Cantidad de dinero en dólares: z b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} x + 1,5y + 1,1z = 264\,000 \\ x = 2,2z \\ 1,5y = x/10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1,5y + 1,1z = 264\,000 \\ x - 2,2z = 0 \\ x - 15y = 0 \end{array} \right\}$$

$$x = 165\,000, y = 11\,000, z = 75\,000$$

c) **Solución**

Cantidad de dinero en euros: 165 000

Cantidad de dinero en libras: 11 000

Cantidad de dinero en dólares: 75 000

57 Una tienda tiene tres tipos de conservas, A, B y C. El precio medio de las tres conservas es de 1 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, y abona 58 €. Otro compra 20 unidades de A, y 30 de C, y abona 51 €. Calcula el precio de cada unidad de A, B y C.

Solución:a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntasPrecio de la conserva A: x Precio de la conserva B: y Precio de la conserva C: z b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 30x + 20y + 10z = 58 \\ 20x + 30z = 51 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0,9; y = 1; z = 1,1$$

c) **Solución**

Precio de la conserva A: 0,9 €

Precio de la conserva B: 1 €

Precio de la conserva C: 1,1 €

58 Una heladería prepara helados de tres tamaños; 125 g, 250 g y 500 g cuyos precios son 1 €, 2 € y 3 €, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2,5 kg, y paga por ellos 18 €

Halla el número de helados que ha comprado de cada tipo.

Solución:a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntasN.º de helados de 125 gramos: x N.º de helados de 250 gramos: y N.º de helados de 500 gramos: z b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} 125x + 250y + 500z = 2\,500 \\ x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4, y = 4, z = 2$$

c) **Solución**

N.º de helados de 125 gramos: 4

N.º de helados de 250 gramos: 4

N.º de helados de 500 gramos: 2

59 Una editorial va a lanzar al mercado tres libros de bolsillo, L1, L2 y L3. El importe total de la edición es 24 500 €. Los costes en euros, por unidad, son 5 €, 3 € y 4 €, respectivamente. Se sabe que el número de ejemplares de L3 es igual a los dos séptimos de los del tipo L2, y que si al triple del número de ejemplares de L1 se le suma el número de ejemplares de L3, se obtiene el doble de ejemplares de L2.

Averigua cuántos libros se han editado de cada tipo.

Solución:a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntasN.º de libros L1: x N.º de libros L2: y N.º de libros L3: z b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y + 4z = 24\,500 \\ z = 2y/7 \\ 3x + z = 2y \end{array} \right\}$$

$$x = 2\,000, y = 3\,500, z = 1\,000$$

c) Solución

N.º de libros L1: 2 000

N.º de libros L2: 3 500

N.º de libros L3: 1 000

60 En una reunión hay 60 personas entre deportistas, artistas y docentes. Se sabe que los docentes y los artistas duplican el número de deportistas. También se sabe que los deportistas y el doble de los artistas son el doble de los docentes.

¿Cuál es el número de personas deportistas, artistas y docentes?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

N.º de deportistas: x

N.º de artistas: y

N.º de docentes: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y + z = 2x \\ x + 2y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow x = 20, y = 15, z = 25$$

c) **Solución**

N.º de deportistas: 20

N.º de artistas: 15

N.º de docentes: 25

61 Un padre deja a sus hijos herederos de todo su dinero, con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media de la cantidad que les deja a los otros dos más 30 000 €; al mediano, exactamente la media de la cantidad de los otros dos; y al pequeño, la media de la cantidad de los otros dos menos 30 000 €.

Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden saber los hijos cuánto dinero ha heredado cada uno? Justifica la respuesta.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Cantidad del hijo mayor: x

Cantidad del hijo mediano: y

Cantidad del hijo pequeño: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{y+z}{2} + 30\,000 \\ y = \frac{x+z}{2} \\ z = \frac{x+y}{2} - 30\,000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 60\,000 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = -60\,000 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 40\,000 \\ y - z = 20\,000 \end{array} \right\}$$

c) Solución

El sistema es compatible indeterminado. No se puede saber la cantidad que le corresponde a cada hijo.

Para profundizar

62 Resuelve y clasifica el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 13 \end{array} \right\}$$

Solución:

No tiene solución.

El sistema es heterogéneo incompatible.

63 Discute el siguiente sistema y clasifícalo:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - 2z + t = 4 \\ x + y + z - t = 5 \\ x - y - z + t = 6 \\ 6x - 3y - 3z + 2t = 32 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$x = 11/2, y = 2 - z, t = 5/2$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 11/2 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \\ t = 5/2 \end{array} \right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

64 Resuelve y clasifica el sistema para los siguiente valores de m :

a) $m = -3$

b) $m = 1$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

a) Solución: $x = -1, y = -1, z = -1$

El sistema es heterogéneo compatible determinado

b) Solución $x + y + z = 1$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right\}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

65 Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 5 320 €. El precio original era de 10 € por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30% del precio original, y otra parte con un descuento del 40%. Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 10 €, calcula cuántas camisetas se vendieron a cada precio.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

N.º de camisetas sin descuento: x

N.º de camisetas con el 30%: y

N.º de camisetas con el 40%: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 600 \\ 10x + 7y + 6z &= 5\,320 \\ y + z &= x/2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 600 \\ 10x + 7y + 6z &= 5\,320 \\ -x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 400, y = 120, z = 80$$

c) **Solución**

N.º de camisetas vendidas sin descuento: 400

N.º de camisetas vendidas con el 30%: 120

N.º de camisetas vendidas con el 40%: 80

66 Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de estos tipos, se necesitó la utilización de unidades de madera, plástico y aluminio, tal y como se indica en la siguiente tabla:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sofá	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1 500 unidades de aluminio.

Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

N.º de sillas: x

N.º de mecedoras: y

N.º de sofás: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 400 \\ x + y + 2z &= 600 \\ 2x + 3y + 5z &= 1\,500 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 100, y = 100, z = 200$$

c) **Solución**

N.º de sillas: 100

N.º de mecedoras: 100

N.º de sofás: 200

67 Un banco invirtió 2 millones de euros en tres empresas diferentes, A, B y C. Lo que invirtió en A era el doble de lo que invirtió en B. Al cabo de un año, la rentabilidad de la operación ha sido del 10%. Las acciones de la empresa A han aumentado su valor un 10%, y las de B, en un 30%. Si las acciones de la empresa C han perdido un 10% de su valor, ¿qué cantidad se invirtió en cada empresa?

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Cantidad invertida en A: x

Cantidad invertida en B: y

Cantidad invertida en C: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 2\,000\,000 \\ x &= 2y \\ 0,1x + 0,3y - 0,1z &= 200\,000 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 1\,000\,000, y = 500\,000, z = 500\,000$$

c) **Solución**

Cantidad invertida en A: 1 000 000 €

Cantidad invertida en B: 500 000 €

Cantidad invertida en C: 500 000 €

68 En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 de cuentos. Sabiendo que la librería ingresó por dicha promoción 8 600 €, que el precio de un ejemplar de novela es el doble del precio de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela, calcula el precio al que se vendió cada libro.

Solución:

a) **Entérate:** incógnitas, datos y preguntas

Precio de libro de novela: x

Precio del libro de poesía: y

Precio del libro del cuento: z

b) **Manos a la obra**

$$\left. \begin{aligned} 200x + 100y + 150z &= 8\,600 \\ x &= 2z \\ 3(y - z) &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 24, y = 20, z = 12$$

c) **Solución**

Precio de libro de novela: 24 €

Precio del libro de poesía: 20 €

Precio del libro del cuento: 12 €

Practica

Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y, a la vista del resultado, clasificalos:

$$\mathbf{72} \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 72
 resolver $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \{x=1, y=-1\}$
 El sistema es heterogéneo compatible determinado.

$$\mathbf{73} \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 73
 resolver $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \{\emptyset\}$
 El sistema es heterogéneo incompatible.

$$\mathbf{74} \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 74
 resolver $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}, y=y \right\} \right\}$
 resolver $\left(\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}, \{y\} \right) \rightarrow \{y=2 \cdot x - 3\}$
 El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

$$\mathbf{75} \begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 75
 resolver $\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow \{x=2, y=3, z=1\}$
 El sistema es heterogéneo compatible determinado.

$$\mathbf{76} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 5y - 4z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 76
 resolver $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 5y - 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{1}{2} \cdot z, y = \frac{1}{2} \cdot z, z=z \right\} \right\}$
 El sistema es homogéneo compatible indeterminado.

$$\mathbf{77} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = 8 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Solución:

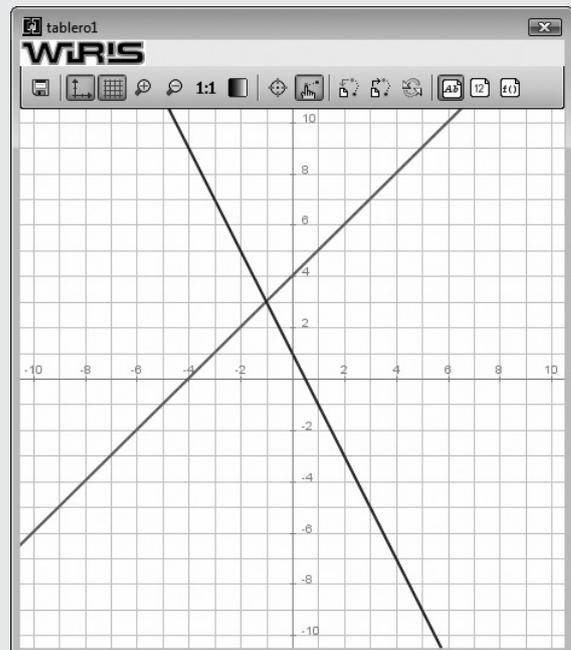
Ejercicio 77
 resolver $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = 8 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \{\emptyset\}$
 El sistema es heterogéneo incompatible.

Resuelve los sistemas siguientes. Clasificalos e interprétalos gráficamente:

$$\mathbf{78} \begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 78
 resolver $\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \{x=-1, y=3\}$
 El sistema es heterogéneo compatible determinado.
 dibujar $(x - y = -4, \{color = rojo, anchura_linea = 2\})$
 dibujar $(2x + y = 1, \{color = azul, anchura_linea = 2\})$
 Las dos rectas son secantes.



$$\begin{cases} 79 & x - 2y = 2 \\ & x - 2y = -2 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 79

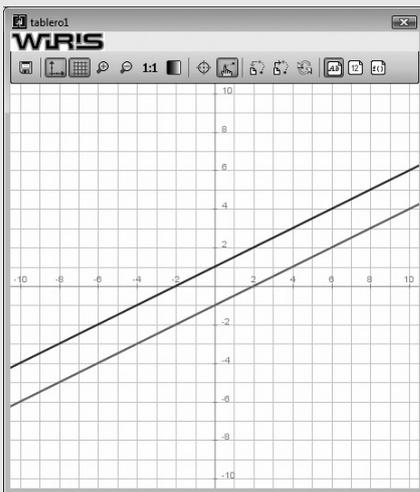
$$\text{resolver} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \rightarrow \{\emptyset\}$$

El sistema es heterogéneo incompatible.

dibujar($x - 2y = 2$, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar($x - 2y = -2$, {color = azul, anchura_linea = 2})

Las dos rectas son paralelas.



$$\begin{cases} 80 & x + 2y = 2 \\ & 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 80

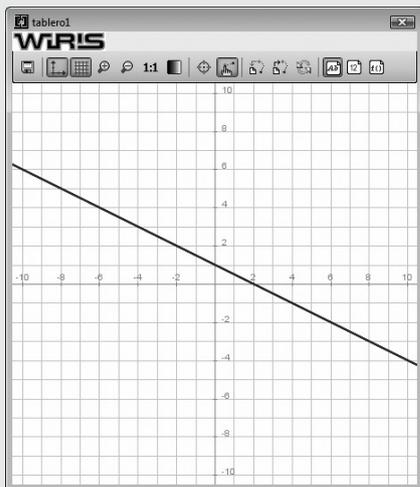
$$\text{resolver} \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases} \rightarrow \{x = -2 \cdot y + 2, y = y\}$$

El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

dibujar($x + 2y = 2$, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar($2x + 4y = 4$, {color = azul, anchura_linea = 2})

Las dos rectas son coincidentes.



$$\begin{cases} 81 & x + y + z = 3 \\ & 2x - y + z = 2 \\ & x - y + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 81

$$\text{resolver} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \{x=1, y=1, z=1\}$$

El sistema es heterogéneo compatible.

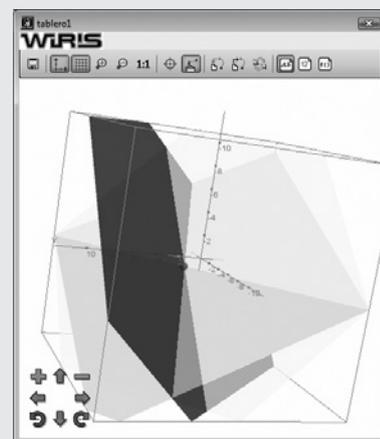
dibujar3d($x + y + z = 3$, {color = azul})

dibujar3d($2x - y + z = 2$, {color = verde})

dibujar3d($x - y + z = 1$, {color = amarillo})

Los tres planos se cortan el punto P(1, 1, 1)

dibujar3d(punto(1, 1, 1), {color = rojo, tamaño_punto = 10})



$$\begin{cases} 82 & 2x - y + z = 3 \\ & 8x - 4y + 4z = 12 \\ & -6x + 3y - 3z = -9 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 82

$$\text{resolver} \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 8x - 4y + 4z = 12 \\ -6x + 3y - 3z = -9 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left\{ x = -\frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}, y = y, z = z \right\} \right\}$$

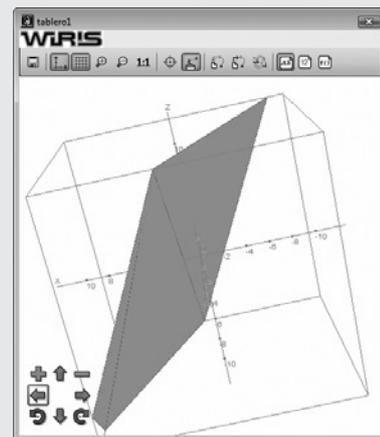
El sistema es heterogéneo compatible indeterminado.

dibujar3d($2x - y + z = 3$, {color = rojo})

dibujar3d($8x - 4y + 4z = 12$, {color = azul})

dibujar3d($-6x + 3y - 3z = -9$, {color = verde})

Los tres planos son coincidentes.



$$\begin{cases} -5x + 2y - 2z = 7 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y + 2z = 8 \end{cases}$$

Solución:

Ejercicio 83

$$\text{resolver} \begin{cases} -5x + 2y - 2z = 7 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \rightarrow \{\emptyset\}$$

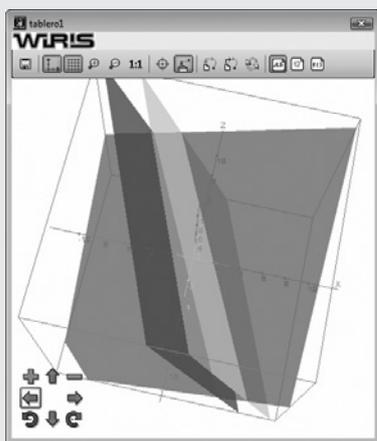
El sistema es heterogéneo incompatible.

dibujar3d(-5x + 2y - 2z = 7, {color = rojo})

dibujar3d(x + 2y + z = 3, {color = azul})

dibujar3d(5x - 2y + 2z = 8, {color = verde})

Dos planos son paralelos y el otro es secante.



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

- 84** Hemos comprado un videojuego, unos auriculares y una mochila. El precio de los auriculares es el doble del precio del videojuego, y también es el triple de la diferencia del precio de la mochila y el videojuego. Considerando que hemos pagado 70 €, calcula los precios de los tres artículos.

Solución:

Problema 84

a) Entérate

Se compra un libro, un disco y una agenda

Precio libro es el doble del disco.

Precio del libro es triple de la diferencia de agenda y disco

Se pagan 140 €

Pregunta: El precio de los artículos

b) Manos a la obra

Precio del disco: x

Precio del libro: y

Precio de la agenda: z

$$\text{resolver} \begin{cases} y=2x \\ y=3(z-x) \\ x+y+z=140 \end{cases} \rightarrow \{x=30, y=60, z=50\}$$

c) Solución

El disco cuesta 30 €, el libro 60 € y la agenda 50 €

- 85** El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50 €, 20 € y 10 €. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €.

Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 € y de 10 € es el doble del número de billetes de 20 €

Solución:

Problema 85

a) Entérate

Se depositan billetes de 50€, 20 € y 10 €

Se depositan 225 billetes por valor de 7000 €

La suma de billetes de 50 € y de 10 € es el doble de los de 20 €

Pregunta: El número de billetes de cada valor.

b) Manos a la obra

Nº de billetes de 50 €: x

Nº de billetes de 20 €: y

Nº de billetes de 10 €: z

$$\text{resolver} \begin{cases} x+y+z=225 \\ 50x+20y+10z=7000 \\ x+z=2y \end{cases} \rightarrow \{x=100, y=75, z=50\}$$

c) Solución

Hay 100 billetes de 50 €, 75 de 20 € y 50 de 10 €

- 86** En un teatro hay localidades de tres clases, A, B y C, cuyos precios son 3 €, 6 € y 12 €, respectivamente.

Cierta día, la recaudación total fue de 6600 €. Si se sabe, además, que de la clase A se vendieron tantas localidades como de las clases B y C juntas, y que de la B se vendió el doble que de la C, ¿cuántas localidades de cada clase se vendieron ese día?

Solución:

Problema 86

a) Entérate

Localidades de tres clases A, B y C a 3 €, 6 € y 12 €

Se recaudan 6600 €

De la clase A se venden tantas como B y C

De la B el doble que de C

Pregunta: ¿Cuántas localidades se venden de cada tipo?

b) Manos a la obra

Nº de localidades del tipo A: x

Nº de localidades del tipo B: y

Nº de localidades del tipo C: z

$$\text{resolver} \begin{cases} 3x+6y+12z=6600 \\ x=y+z \\ y=2z \end{cases} \rightarrow \{x=600, y=400, z=200\}$$

c) Solución

Se han vendido 600 localidades del tipo A, 400 del tipo B y 200 del tipo C.