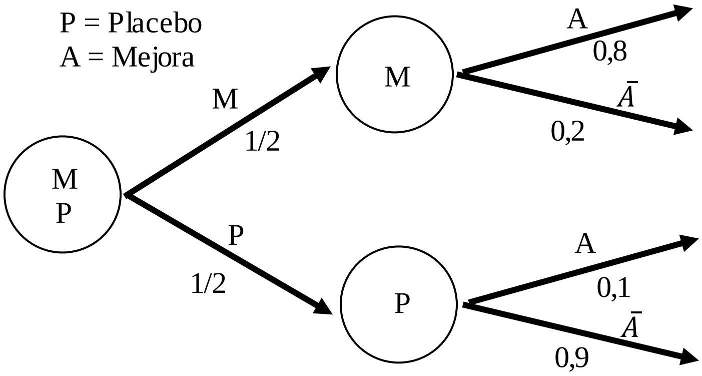
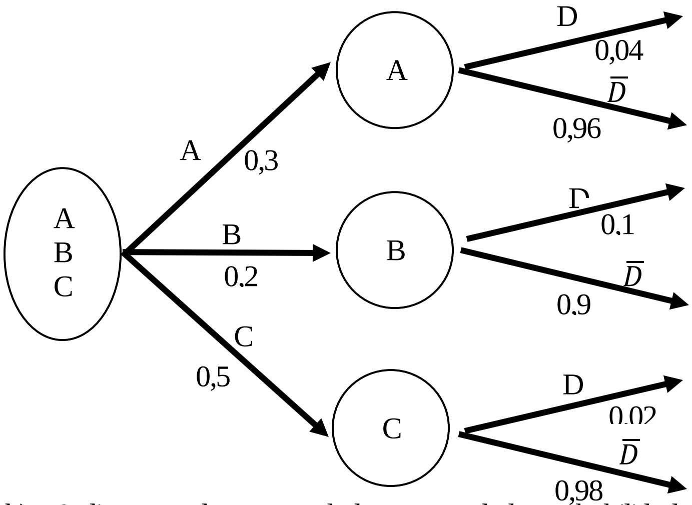
11. Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y que se active segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia: a) Se active al menos uno los dos sensores. Se active solo uno de los dos sensores.	a) Se active al menos uno los dos sensores. P(A) = 0,98 P(B) = 0,96 Como A y B independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A \cap B) = 0{,}98 \cdot 0{,}96 = 0{,}9408$ $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$ $P(A \cup B) = 0{,}98 + 0{,}96 - 0{,}9408 = 0{,}9992$ b) Se active solo uno de los dos sensores. $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}9992 - 0{,}9408 = 0{,}0584$
18. El 40 % de los habitantes y una cierta comarca tienen camelias, el 35 % tienen rosas y el 21 % tienen camelias y rosas. Si se elige al azar un habitante de esa comarca, calcula las cinco probabilidades siguientes: a) Que tenga camelias o rosas b) Que no tengan y camelias ni rosas c) Que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas d) Que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias e) Que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias	a) $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R)$ $P(C \cup R) = 0{,}4 + 0{,}35 - 0{,}21 = 0{,}54$ b) $P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0{,}54 = 0{,}46$ c) $P(C/R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}21}{0{,}35} = 0{,}6$ d) $P(R/C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}21}{0{,}4} = 0{,}525$ e) $P(C \cup R) - P(C \cap R) = 0{,}54 - 0{,}21 = 0{,}33$
19. Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0,\ 55$; $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}9$ y $P(B/A) = 0,\ 25$ Se pide: a) Calcular $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B/\bar{A})$ b) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.	a) $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B/A)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$ $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$ $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0{,}55 - 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}25$ $P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - 0{,}4} =$ $= \frac{0{,}25 - 0{,}1}{0{,}6} = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25$ b) Son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A \cap B) = 0{,}1$ $P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$ Como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, A y B son independientes También podíamos haber argumentado: $P(B/A) = 0{,}25$ y $P(B) = 0{,}25$ y como son iguales son independientes.

<table>
<tr>
<td>
23. Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con el placebo.
a) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado
b) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento
</td>
<td>
a) Dibujamos el árbol de probabilidades
M = Medicamento
P = Placebo
A = Mejora


a) Aplicamos el teorema de la suma o de la probabilidad total:
$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}45$
b) Aplicamos el teorema de Bayes:
$P(M/A) = \frac{P(A/M)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 0{,}8}{0{,}45} = \frac{0{,}4}{0{,}45} = 0{,}\hat{8} = 0{,}8889$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
24. Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una comunidad autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:
a) No salga defectuoso.
b) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C
</td>
<td>
a) Dibujamos el árbol de probabilidades


b) Aplicamos el teorema de la suma o de la probabilidad total:
$P(\bar{D}) = P(A) \cdot P(\bar{D}/A) + P(B) \cdot P(\bar{D}/B) + P(C) \cdot P(\bar{D}/C) =$
$= 0{,}3 \cdot 0{,}96 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}98 = 0{,}958$
c) Aplicamos el teorema de Bayes:
$P(\bar{C}/D) = \frac{P(\bar{D} \cap C)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}2 \cdot 0{,}1}{1 - P(\bar{D})} =$
$\frac{0{,}032}{1 - 0{,}952} = \frac{0{,}032}{0{,}042} = 0{,}7619$
</td>
</tr>
</table>

Ponte a prueba

Problemas resueltos

1 Tres individuos A, B y C disparan a un objetivo. La probabilidad de que cada uno de ellos lo alcance es $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$, respectivamente. Calcula:

a) La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.

b) La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.

c) La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

a) Se aplica la probabilidad del producto:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$$

b) Se aplica la probabilidad del producto y la del contrario:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) =$$

$$= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \cdot (1 - P(C)) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$$

c) Se aplican las propiedades de la probabilidad:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$

$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

2 En un mercado de valores cotizan un total de 60 empresas, de las cuales 15 son del sector bancario, 35 son industriales y 10 son del sector tecnológico. La probabilidad de que un banco de los que cotizan en el mercado se declare en quiebra es 0,01, la probabilidad de que se declare en quiebra una empresa industrial es 0,02 y de que lo haga una empresa tecnológica es 0,1

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una quiebra en una empresa de dicho mercado de valores?

b) Habiéndose producido una quiebra, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una empresa tecnológica?

B = Empresa del sector bancario.

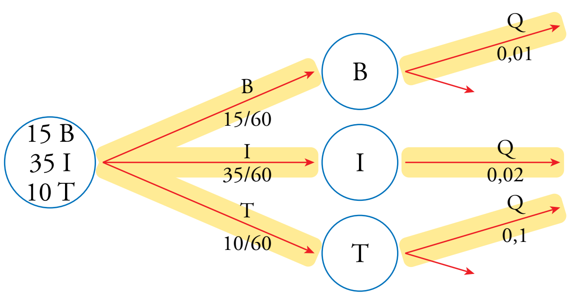
I = Empresa industrial.

T = Empresa del sector tecnológico.

Q = Se declara en quiebra.

a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

Diagrama en árbol:



$$P(Q) = P(B) \cdot P(Q/B) + P(I) \cdot P(Q/I) + P(T) \cdot P(Q/T) =$$

$$= \frac{15}{60} \cdot 0{,}01 + \frac{35}{60} \cdot 0{,}02 + \frac{10}{60} \cdot 0{,}1 = 0{,}0308$$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(T/Q) = \frac{P(T) \cdot P(Q/T)}{P(Q)} =$$

$$= \frac{\frac{10}{60} \cdot 0{,}1}{0{,}0308} = 0{,}54$$

3 En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esa muestra es de 2 años.

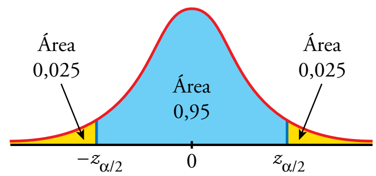
a) Obtén un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 0,5?

a) El intervalo de confianza para la media de la población μ con un nivel de confianza $1 - \alpha$, es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



- Como $1 - \alpha = 0,95$, se tiene que $P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0,95$

  $z_{\alpha/2} = 1,96$

- El intervalo es:

$$\left(17,4 - 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}}; 17,4 + 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}}\right) = (17,16; 17,65)$$

Se tiene que $\mu \in (17,16; 17,65)$ con una probabilidad del 95 %

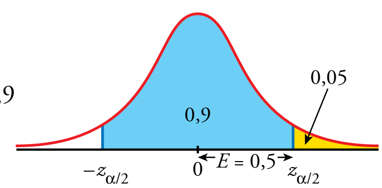
b) El tamaño de la muestra es:

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

Al nivel de confianza $1 - \alpha = 0,9$

$Pz_{\alpha/2} = 1,645 = 1,65$

$$n = \left(1,65 \cdot \frac{2}{0,5}\right)^2 \Rightarrow n = 43,56$$



Se debe tomar una muestra de 44 individuos.

4 El cociente intelectual de los individuos presentes en una sala puede suponerse que sigue una distribución normal de media μ y varianza igual a 81

a) ¿Cuánto vale μ si sabemos que solo un 10 % de las personas en la sala sobrepasa un cociente intelectual de 105?

En los dos siguientes apartados supondremos que $\mu = 95$:

b) Elegida una persona al azar de la sala, ¿cuál es la probabilidad de que su cociente intelectual esté entre 86 y 107?

c) Elegimos 9 personas al azar de la sala y calculamos la media de sus cocientes intelectuales. ¿Cuál es la probabilidad de que esa media esté entre 86 y 107?

a) Variable: x = cociente intelectual

$N(\mu, 9)$

$P(x \geq 105) = 0,1$

$$P(x \geq 105) = P\left(z \geq \frac{105 - \mu}{9}\right) = 1 - P\left(z \leq \frac{105 - \mu}{9}\right) = 0,1$$

$$P\left(z \leq \frac{105 - \mu}{9}\right) = 0,9 \Rightarrow \frac{105 - \mu}{9} = 1,28 \Rightarrow \mu = 93,48$$

b) Variable: x = cociente intelectual

$N(95, 9)$

$P(86 \leq x \leq 107)$

$$P(86 \leq x \leq 107) = P\left(\frac{86 - 95}{9} \leq z \leq \frac{107 - 95}{9}\right) =$$

$$= P(-1 \leq z \leq 1,33) = 0,7495$$

c) Variable: $\overline{X}$ = medias muestrales

$$n = 9 \Rightarrow \overline{X} \equiv \left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv N(95, 3)$$

$$P(86 \leq \overline{X} \leq 107) = P\left(\frac{86 - 95}{9} \leq z \leq \frac{107 - 95}{9}\right) = P(-3 \leq z \leq 4) =$$

$$= P(z \leq 4) - P(z \leq -3) = P(z \leq 4) - (1 - P(z \leq 3)) =$$

$$= P(z \leq 4) + P(z \leq 3) - 1 = 0,9999 + 0,9987 - 1 = 0,9986$$

Ponte a prueba

Problemas resueltos

5 El gasto mensual (en euros) en electricidad por familia en una cierta ciudad, sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ €

a) A partir de una muestra aleatoria de 100 familias de esa ciudad, se obtuvo el intervalo de confianza (45, 55) para el gasto medio mensual por familia en electricidad. Determina el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

b) ¿Qué número de familias se tendrían que seleccionar, como mínimo, para garantizar, con un nivel de confianza del 99 %, una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a 3 €?

a) Como el intervalo es (45, 55), se tiene que $\bar{x} = \dfrac{45 + 55}{2} = 50$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ con } P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

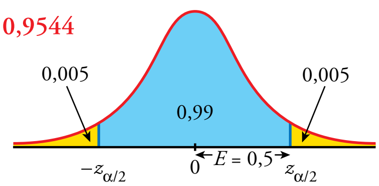
Se tiene:

$$50 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 55 \Rightarrow 50 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{25}{\sqrt{100}} = 55 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2}{2,5} = 2$$

$P(-2 \le z \le 2) = 0,9544$

El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0,9544$

b) El tamaño de la muestra es:



$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

Al nivel de confianza $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$$n = \left(2,575 \cdot \frac{25}{3}\right)^2 \Rightarrow n = 460,46$$

Se debe tomar una muestra de 461 individuos.

6 Dos estudiantes quieren contrastar si el consumo medio en teléfono móvil entre los estudiantes es como máximo de 10 € frente a si es mayor. El primero, en una muestra de 36 estudiantes, obtuvo una media de 10,4 € con una desviación típica de 2 €. El segundo obtuvo, en una muestra de 49 estudiantes, una media de 10,39 con una desviación típica de 2 €.

a) ¿Qué decisión toma el primero con un nivel de significación del 10 %?

b) ¿Qué decisión toma el segundo con un nivel de significación del 10 %?

	Media	D. típica	Tamaño
Población	10	2	
Muestra (1.er estudiante)	10,4		36
Muestra (2.º estudiante)	10,39		49

Se definen las hipótesis nula y alternativa:

H_0: $\mu \le 10$ $\qquad$ H_1: $\mu > 10$

a) Para el 1.er estudiante:

Se define la región de aceptación para el nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 90\,\% = 0,9 \Rightarrow z_\alpha = 1,28 \Rightarrow$ La región de aceptación es $(-\infty; 1,28)$

Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{10,4 - 10}{\frac{2}{\sqrt{36}}} = 1,2$$

Como $1,2 \in (-\infty; 1,28)$, se acepta la hipótesis nula.

b) Para el 2.º estudiante:

Se tiene la misma región de aceptación: $(-\infty; 1,28)$

Se define el estadístico para el contraste:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{10,39 - 10}{\frac{2}{\sqrt{49}}} = 1,365 = 1,37$$

Como $1,37 \notin (-\infty; 1,28)$, se rechaza la hipótesis nula.