Ponte a prueba

Problemas resueltos

1 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x},\ x \neq 0$$

a) Determina las asíntotas de $f(x)$

b) Calcula sus máximos y mínimos relativos y determina sus intervalos de crecimiento.

c) Calcula la integral definida

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

a) Asíntotas:

- Asíntotas verticales:

  $x = 0$

- Asíntotas horizontales:

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x} = +\infty$$

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x} = -\infty$$

  No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

  Se realiza la división: $\dfrac{x^2 + x + 2}{x} = x + 1 + \dfrac{2}{x}$

  La asíntota oblicua: $y = x + 1$

b) Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2 + x + 2)}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x - 2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Si $x = \sqrt{2} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow A(\sqrt{2},\ 1 + 2\sqrt{2})$

Si $x = -\sqrt{2} \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow B(-\sqrt{2},\ 1 - 2\sqrt{2})$

$$f''(x) = \frac{2xx^2 - 2x(x^2 - 2)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

$f''(\sqrt{2}) = \sqrt{2} > 0\ (+) \Rightarrow$ **$A(\sqrt{2},\ 1 + 2\sqrt{2})$ es mínimo relativo.**

$f''(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0\ (-) \Rightarrow$ **$B(-\sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2})$ es un máximo relativo.**

Estudio de la monotonía:

$$f'(1) = \frac{1^2 - 2}{1^2} = -1 < 0\ (-)$$

$f'(x)$	+		−		−		+
x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	

Creciente (↗): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

c) $F(x) = \displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{x} = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x|$

$F(3) = 9{,}7;\ F(1) = 1{,}5$

$$\int_1^3 \frac{x^2 + x + 2}{x}\,dx = F(3) - F(1) = 9{,}7 - 1{,}5 = 8{,}2$$

2 Sea la función f definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determina a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x = -1$

b) Para $a = -1$ y $b = 1$, estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y $x = -1$

a) Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones a las que dan lugar las condiciones impuestas:

Como f es continua, lo es en $x = 1$ y se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2 + ax + b) = \lim_{x\to 1^+} \ln x = f(1)$$

$1 + a + b = \ln 1 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$

Como f tiene un mínimo en $x = -1$, se ha de cumplir que $f'(-1) = 0$, es decir:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (-1) + a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ a \quad = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + b = -1 \Rightarrow b = -3.$$ Los valores son: **$a = 2$, $b = -3$**

b) Para $a = -1$, $b = 1$, se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Continuidad de la función:

La función está definida por un polinomio y el logaritmo neperiano, que son funciones continuas en sus dominios. El único valor que puede presentar un problema es $x = 1$

Para que sea continua, los límites laterales deben coincidir y ser iguales al valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

La función no es continua y, por lo tanto, no es derivable en $x = 1$

Para $x = -1$, la función es la parábola $f(x) = x^2 - x + 1$, que es continua y derivable por ser polinómica.

3 Sea $C(t)$ el dinero en miles de euros que hay depositado en un día en una sucursal bancaria en función del tiempo t en horas desde que la sucursal está abierta. Sabiendo que $C'(t) = t^2 - 7t + 10$ y que la sucursal permaneció abierta un total de 8 horas:

a) Obtén los máximos y mínimos locales de la función $C(t)$

b) Obtén la expresión de $C(t)$ sabiendo que a las 6 horas de estar abierta la sucursal disponía de 20 000 €

a) $C'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 10 = 0$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$C''(t) = 2t - 7$

$C''(5) = 2 \cdot 5 - 7 = 3 > 0\ (+) \Rightarrow$ **Para $t = 5$ se alcanza un mínimo relativo.**

$C''(2) = 2 \cdot 2 - 7 = -3 < 0\ (-) \Rightarrow$ **Para $t = 2$ se alcanza un máximo relativo.**

b) $C(t) = \int C'(t)\, dt \Rightarrow C(t) = \int (t^2 - 7t + 10)\, dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t + k$

$$C(6) = \int_0^6 (t^2 - 7t + 10)\, dt = 20\,000$$

$\frac{1}{3}6^3 - \frac{7}{2}6^2 + 10 \cdot 6 + k = 20\,000 \Rightarrow 6 + k = 20\,000 \Rightarrow$ **$k = 19\,994$**

Ponte a prueba

Problemas resueltos

4 Dada la función

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x$$

se pide hallar:

a) El dominio de definición.

b) Los puntos de corte con el eje X

c) Los intervalos de crecimiento y los valores de x para los cuales se alcanza un máximo o un mínimo

d) La curvatura y los puntos de inflexión.

e) El área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ y por el eje OX

a) Dominio: por ser una función polinómica el dominio es toda la recta real $\mathbb{R}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Puntos de corte con el eje X:

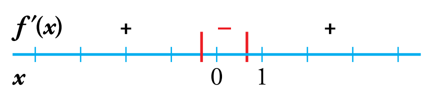
$3x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2/3$

Puntos de corte con el eje X: **$O(0, 0)$, $B(1, 0)$; $C(-2/3, 0)$**

c) Máximos, mínimos relativos y crecimiento:

- $f'(x) = 9x^2 - 2x - 2$
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{19}}{9};\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{19}}{9}$
- $f''(x) = 18x - 2$
- $f''\left(\dfrac{1 + \sqrt{19}}{9}\right) = 2\sqrt{19} > 0\ (+) \Rightarrow x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{19}}{9}$ **mínimo relativo.**
- $f''\left(\dfrac{1 - \sqrt{19}}{9}\right) = -2\sqrt{19} < 0\ (-) \Rightarrow x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{19}}{9}$ **máximo relativo.**

Estudio de la monotonía:



$f'(0) = -2 < 0\ (-)$

Creciente (↗): $\left(-\infty, \dfrac{1 - \sqrt{19}}{9}\right) \cup \left(\dfrac{1 + \sqrt{19}}{9}, +\infty\right)$

Decreciente (↘): $\left(\dfrac{1 - \sqrt{19}}{9}, \dfrac{1 + \sqrt{19}}{9}\right)$

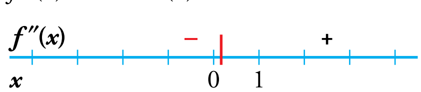
d) Puntos de inflexión y curvatura:

- $f''(x) = 18x - 2 \Rightarrow 18x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/9$
- $f(1/9) = -56/243 \Rightarrow F(1/9, -56/243)$
- $f'''(x) = 18 \neq 0 \Rightarrow F(1/9, -56/243)$ punto de inflexión.

Estudio de la curvatura:

Es una función polinómica y no tiene discontinuidades.

$f''(0) = -2 < 0\ (-)$



Convexa (∪): $(1/9, +\infty)$

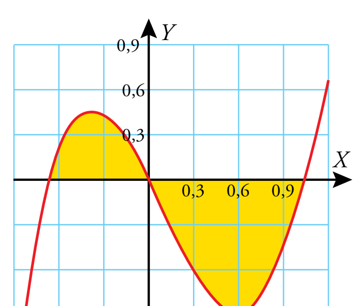
Cóncava (∩): $(-\infty, 1/9)$

e) Área:

$$A_1 = \left|\int_{-2/3}^{0} (3x^3 - x^2 - 2x)\, dx\right| = \frac{16}{81}$$

$$A_2 = \left|\int_{0}^{1} (3x^3 - x^2 - 2x)\, dx\right| = \frac{7}{12}$$

Área $= A_1 + A_2 = \dfrac{253}{324}$ unidades cuadradas

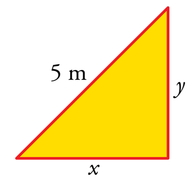


5 Se quiere diseñar un panel, con forma de triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mida 5 metros.

1. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de los otros lados para que su área sea máxima?
2. Si el panel se fabrica con chapa cuyo coste es de10 euros el metro cuadrado, ¿cuánto costará?

1. Dimensiones

   a) Datos, incógnitas y dibujo:



   b) Función que hay que maximizar:

   $A(x, y) = \frac{1}{2}xy$

   sujeta a las condiciones: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

   c) Se escribe la función con una sola variable:

   $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2}$

   d) Se calculan máximos y mínimos:

   $A'(x) = \dfrac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}}$

   $A'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Rightarrow 25 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 25 \Rightarrow x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

   e) Se comprueba en la 2.ª derivada:

   $A''(x) = \dfrac{75x - 2x^3}{(2x^2 - 50)\sqrt{25 - x^2}} \Rightarrow A''\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right) = -2 < 0$, máximo relativo.

   Dimensiones de los catetos $x = y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ m

2. Coste:

   Área $= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{25}{4}$ m^2

   Coste $= 10 \cdot \dfrac{25}{4} = 62{,}5 \Rightarrow$ **Costará 62,5 €**

6 Calcula el área limitada por la curva

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$, $x = 3$. Haz una representación gráfica aproximada de dicha área.

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$

$F(x) = \int\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 1\right)dx = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^2}{4} + x$

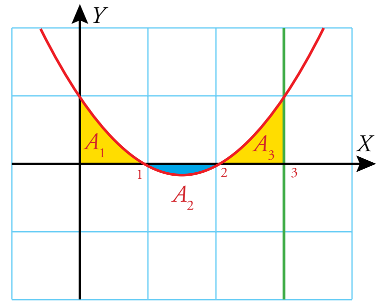
$F(3) = \dfrac{3}{4}$; $F(2) = \dfrac{1}{3}$; $F(1) = \dfrac{5}{12}$; $F(0) = 0$

$A_1 = \left|\int_0^1\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 1\right)dx\right| = |F(1) - F(0)| = \dfrac{5}{12}$

$A_2 = \left|\int_1^2\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 1\right)dx\right| = |F(2) - F(1)| = \dfrac{1}{12}$

$A_3 = \left|\int_2^3\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 1\right)dx\right| = |F(3) - F(2)| = \dfrac{5}{12}$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{5}{12} = $ **$\dfrac{11}{12}$ u^2**



Ponte a prueba

Problemas resueltos

7 Una parcela está rodeada por dos carreteras cuyo trazado viene dado por las funciones

$$f(x) = -x^2 + 9x - 8$$
$$g(x) = 2x - 2$$

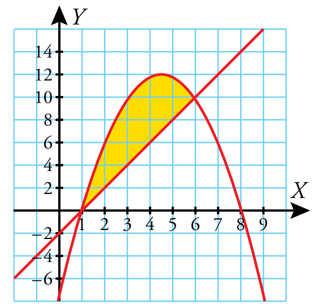
Si se mide en decámetros:

a) Represente la parcela.

b) ¿Qué superficie tiene la parcela?

c) Si el 70 % de la superficie de la parcela se vende como suelo urbano a 500 € el metro cuadrado, el 20 % se tiene que donar al ayuntamiento y el resto se vende como suelo rústico a 45 € el metro cuadrado, ¿cuál es el valor de la parcela?

a)



b) Se resuelve $f(x) = g(x)$:

$-x^2 + 9x - 8 = 2x - 2$

$-x^2 + 7x - 6 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = 1, x = 6$

$$F(x) = \int(-x^2 + 7x - 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x$$

$$F(6) = 18;\ F(1) = -\frac{17}{6}$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^6 (-x^2 + 7x - 6)\,dx\right| = |F(6) - F(1)| = \left|18 - \left(-\frac{17}{6}\right)\right| = \frac{125}{6}\ \text{u}^2$$

c) Se vende el 70 % a 500 € el metro cuadrado y el 10 % que queda tras la donación, a 45 € el metro cuadrado.

$$\frac{125}{6} \cdot 0{,}7 \cdot 500 + \frac{125}{6} \cdot 0{,}1 \cdot 45 = 7\,385{,}42\ €$$

8 Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de:

$$f(x) = ax^2 - b$$

en el punto (1, 5) sea la recta

$$y = 3x + 2$$

Para determinar los valores de a y b se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones que vienen dadas por las condiciones impuestas:

a) $f(x) = ax^2 - b$ pasa por (1, 5)

$a \cdot 1^2 - b = 5$

$a - b = 5$

b) La recta tangente en (1, 5) es $y = 3x + 2$; es decir, la pendiente de la recta tangente, que es 3, es la derivada de $f(x)$ en $x = 1$

$f'(x) = 2ax$

$f'(1) = 3$

$2a \cdot 1 = 3$

$2a = 3$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 5 \\ 2a \quad &= 3 \end{aligned}\right\} a = 3/2$$

Sustituyendo $a = 3/2$ en la 1.ª ecuación:

$$\frac{3}{2} - b = 5 \Rightarrow -b = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow b = -\frac{7}{2}$$

La parábola es: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}$