1. Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay 3 modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es 6 veces el número de cajas del modelo C. Halla el número de cajas de cada tipo.	a) Incógnita, datos y preguntas A = Nº de cajas del modelo A B = Nº de cajas del modelo B C = Nº de cajas del modelo C b) Planteamiento y operaciones $\left.\begin{array}{r} 5A+10B+15C=325 \\ A+B+C=35 \\ A+B=6C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5A+10B+15C=325 \\ A+B+C=35 \\ A+B-6C=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^{a}-5\cdot 2^{a} \\ 2^{a}-3^{a} \end{array}$ $\left.\begin{array}{r} 5A+10B+15C=325 \\ 5B+10C=150 \\ 7C=35 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2^{a}/5 \\ 3^{a}/7 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5A+10B+15C=325 \\ B+2C=30 \\ C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A=10 \\ B=20 \\ C=5 \end{array}\right\}$ c) Solución Nº de cajas del modelo A = 10 Nº de cajas del modelo B = 20 Nº de cajas del modelo C = 5
2. Una estudiante le pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 €. Al mirar la cuenta comprobó que la habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 € Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un carrillo y un refresco por sólo 3 €, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de la bolsa de patatas?	a) Incógnita, datos y preguntas b = precio de un bocadillo r = precio de un refresco p = precio de una bolsa de patatas Los 3 € antes de hacerle el 40 % de descuento eran: 3/(1 – 0,4) = 3/0,6 = 5 € b) Planteamiento y operaciones $\left.\begin{array}{r} 4b+2r+3p=19 \\ b+p=4 \\ b+r=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4b+2r+3p=19 \\ p=4-b \\ r=5-b \end{array}\right\}$ 4b + 2(5 – b) + 3(4 – b) = 19 ⇒ 4b + 10 – 2b + 12 – 3b = 19 – b = – 3 ⇒ b = 3, p = 1, r = 2 c) Solución Precio de un bocadillos = 3 € Precio de un refresco = 2 € Precio una bolsa de patatas = 1 €
3. Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece tres tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes, y el peso total de su pedido que es 1800 kg. Si el peso de 2 sacos pequeños y de 3 medianos en el mismo que el de 2 sacos grandes y el peso de un saco grande es 4 veces el peso de un saco pequeño. Halla el peso de cada uno de los sacos.	a) Incógnita, datos y preguntas p = peso de un saco pequeño m = peso de un saco mediano g = peso de un saco grande b) Planteamiento y operaciones $\left.\begin{array}{r} 20p+14m+6g=1800 \\ 2p+3m=2g \\ g=4p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 10p+7m+3g=900 \\ 2p+3m=8p \\ g=4p \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 10p+7m+3g=900 \\ 3m=6p \\ g=4p \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 10p+7m+3g=900 \\ m=2p \\ g=4p \end{array}\right\}$ 10 p + 14 m + 12 p = 900 ⇒ 36p = 900 ⇒ p = 25, m = 50, g = 100 c) Solución Peso del saco de tamaño pequeño = 25 kg Peso del saco de tamaño mediano = 50 kg Peso del saco de tamaño grande = 100 kg

4. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Razona si la matriz A es simétrica.

b) Calcula A^{-1}

c) Resuelve la ecuación matricial:

$$2X \cdot A - A^2 - 3I = 0$$

a) Una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que $A^t \neq A$, porque $a_{23} \neq a_{32}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Existe la matriz inversa A^{-1}

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $2X \cdot A - A^2 - 3I = 0 \Rightarrow 2X \cdot A = A^2 + 3I$

$X = \dfrac{1}{2} A^{-1}(A^2 + 3I) \Rightarrow X = \dfrac{1}{2}(A + 3A^{-1})$

$$A + 3A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 3/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

5. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A

b) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A?

a) Determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - a^2$$

b) La matriz A tiene inversa siempre que su determinante sea distinto de cero.

$|A| = -a^3 - a^2 \Rightarrow -a^3 - a^2 = 0 \Rightarrow a^3 + a^2 = 0$

$a^2(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$

Por tanto la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 0$ y $a \neq -1$

6. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x+2 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x+2 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones o raíces: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

Ponte a prueba

Problemas resueltos

1 Un autobús transporta durante un viaje 60 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero que cuesta 1 €; estudiantes que tienen un 25 % de descuento y jubilados con un descuento del 50 % en el precio del billete. La recaudación del autobús en el viaje fue de 48 €. Calcula el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el doble que el número del resto de pasajeros.

Entérate

N.º de viajeros que pagan el billete entero: x

N.º de estudiantes: y

N.º de jubilados: z

Número de viajeros totales: 60

¿Cuántos viajeros de cada clase hay?

Manos a la obra

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x + 0{,}75y + 0{,}5z = 48 \\ y = 2(x + z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 100x + 75y + 50z = 4\,800 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 100 \cdot 1.^{a} - 2.^{a} \Rightarrow \\ 2 \cdot 1.^{a} + 3.^{a} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 25y + 50z = 1\,200 \\ 3y = 120 \end{array}\right\} y = 40 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 50z = 200 \end{array}\right\} z = 4 \Rightarrow x = 16$$

La solución del sistema es: $x = 16$, $y = 40$, $z = 4$

Solución

Viajan 16 viajeros que pagan el billete completo, 40 estudiantes y 4 jubilados.

2 Antonio ha conseguido 1 372 € trabajando durante las vacaciones. Ese dinero puede gastarlo íntegramente comprando un ordenador portátil, una cámara digital y haciendo un viaje. El precio del ordenador portátil excede en 140 € la suma de los precios de la cámara y del viaje. Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad que el precio inicial, Antonio podría invitar a su hermano al viaje en el caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 €. Calcula los precios del ordenador, de la cámara y del viaje.

Entérate

Precio del ordenador: x

Precio de la cámara: y

Precio del viaje: z

Manos a la obra

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ x = y + z + 140 \\ x + y + y/2 = 1\,164 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ x - y - z = 140 \\ 2x + 3y = 2\,328 \end{array}\right\} 1.^{a} + 2.^{a} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ 2x = 1\,512 \\ 2x + 3y = 2\,328 \end{array}\right\} x = 756 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ 3y = 816 \end{array}\right\} y = 272 \Rightarrow z = 344$$

La solución $x = 756$, $y = 272$, $z = 344$

Solución

El precio del ordenador es de 756 €, el de la cámara, 272 €, y el del viaje, 344 €

3 Determina la matriz X que verifica la ecuación:

$$A^2X - B = AX$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Justifica la respuesta.

$A^2X - B = AX$; $A^2X - AX = B$; $(A^2 - A)X = B$; $X = (A^2 - A)^{-1}B$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 - A| = 4,\ (A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Dado el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de a

b) Resuelve el sistema para $a = 3$, $a = 1$

a) Discusión: $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a$

$a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 1$

Para $a \neq 0$, $a \neq 1 \Rightarrow R(C) = R(A) =$ n.º de incógnitas $= 3$, sistema compatible determinado.

Para $a = 0$, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2.^a/2 \\ 3.^a - 1.^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2.^a - 3.^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3$, sistema incompatible.

Para $a = 1$, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 3.^a - 1.^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado.

b) Resuelve para $a = 3$, $a = 1$

Para $a = 3$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = 14 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ 1.^a - 3.^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ 2y \quad = 0 \end{array}\right\}\begin{array}{l} x = 1/3 \\ z = 2/3 \\ y = 0 \end{array}$$

La solución única es: $x = 1/3$, $y = 0$, $z = 2/3$

Para $a = 1$ se ha visto que el sistema es compatible indeterminado; se pasa de la última matriz de la discusión al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\} z = 2 - 2y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 2 - 2y = 1 \\ z = 2 - 2y \end{array}\right\}\begin{array}{l} x = y - 1 \\ z = 2 - 2y \end{array}$$

La solución es: **$x = y - 1$, $z = 2 - 2y$**

En paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}$

Ponte a prueba

Problemas resueltos

5 Un proyecto de jardinería puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G_1 y G_2. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo en cada zona durante una semana:

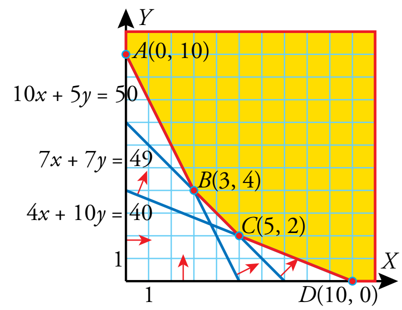
	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G_1	4	10	7
Grupo G_2	10	5	7

Se necesita ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C; su coste semanal se estima en 3 300 € para el grupo G_1 y en 4 000 € para el grupo G_2. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste? Expresa la función objetivo y las restricciones del problema. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

a) Tabla con los datos del problema.

	Grupo G_1	Grupo G_2	Rectricciones	
N.º de semanas	x	y	$x \geq 0;\ y \geq 0$	
A	4	10	$4x + 10y \geq 40$	
B	10	5	$10x + 5y \geq 50$	
C	7	7	$7x + 7y \geq 49$	
Coste	$3\,300x$	$4\,000y$	$f(x, y) = 3\,300x + 4\,000y$	**Minimizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(5, 2) \Rightarrow f(5, 2) = 3\,300 \cdot 5 + 4\,000 \cdot 2 = = 24\,500$ € **Mínimo**

$B(10, 0) \Rightarrow f(10, 0) = 3\,300 \cdot 10 + 4\,000 \cdot 0 = = 33\,000$ €

$C(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 3\,300 \cdot 0 + 4\,000 \cdot 10 = = 40\,000$ €

$D(3, 4) \Rightarrow f(3, 4) = 3\,300 \cdot 3 + 4\,000 \cdot 4 = = 25\,900$ €

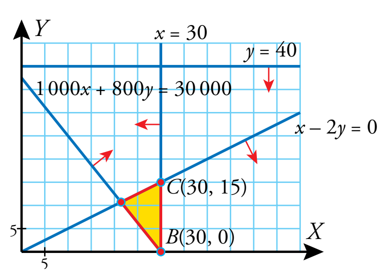
d) La solución óptima es $A(5, 2)$, es decir, **$x = 5$ semanas del grupo G_1 e $y = 2$ semanas del grupo G_2**

6 Una tienda de informática lanza una producción destinada a comercializar dos modelos de ordenadores portátiles: modelo A y modelo B. Cada unidad del modelo A se vende a 1 000 € y cada unidad del B a 800 €. Se trata de una promoción destinada a un número limitado de unidades: solo afecta a 30 ordenadores del modelo A y a 40 del modelo B. El objetivo de la tienda es vender del modelo A al menos el doble de unidades que del modelo B y obtener unos ingresos mínimos de 30 000 €. ¿Cuántas unidades de cada modelo deberá vender para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

a) Tabla con los datos del problema.

	Grupo G_1	Grupo G_2	Rectricciones	
N.º de ordenadores	x	y	$0 \leq x \leq 30;\ 0 \leq y \leq 40$	
Objetivo	x	y	$x \geq 2y$	
Ingresos mínimos	x	y	$1\,000x + 800y \geq 30\,000$	
Ingresos totales	$1\,000x$	$800y$	$f(x, y) = 1\,000x + 800y$	**Maximizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(150/7, 75/7) \Rightarrow f(150/7, 75/7) \Rightarrow$ No tiene sentido 150/7 de ordenador.

$B(30, 0) \Rightarrow f(30, 0) = 1\,000 \cdot 30 + 800 \cdot 0 = 3\,000$ €

$C(30, 15) \Rightarrow f(30, 15) = 1\,000 \cdot 30 + 800 \cdot 15 = 42\,000$ € **Máximo**

d) La solución óptima es $C(30, 15)$, es decir, **$x = 30$ ordenadores modelo A e $y = 15$ ordenadores modelo tipo B. Los ingresos ascienden a 42 000 €**