

Unidad 2.

Matrices

1. Tipos de matrices

Piensa y calcula

Escribe en forma de tabla el siguiente enunciado:

«Una familia gasta en enero 400 € en comida y 150 € en vestir; en febrero, 500 € en comida y 100 € en vestir; y en marzo, 300 € en comida y 200 € en vestir».

Solución:

	Enero	Febrero	Marzo
Comida	400	500	300
Vestir	150	100	200

Aplica la teoría

1 Escribe una matriz fila de dimensión 1×4

Solución:

$$A = (1, -5, 0, 7)$$

2 Escribe una matriz columna de dimensión 2×1

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

3 Escribe una matriz cuadrada de orden 3, y marca la diagonal principal.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 6 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

4 Completa la siguiente matriz para que sea simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \blacksquare & 4 & -5 \\ \blacksquare & \blacksquare & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

5 Halla el valor de a , b , c , d , e y f para que la siguiente matriz sea antisimétrica o hemisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & d & e \\ 0 & -7 & f \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a = d = f = 0$$

$$b = -5$$

$$c = 0$$

$$e = 7$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Escribe una matriz nula de dimensión 2×3

Solución:

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7 Escribe una matriz diagonal de orden 2

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

8 Escribe una matriz escalar de orden 3 en la que el elemento $a_{22} = -6$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

9 Escribe una matriz unidad de orden 3

Solución:

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10 Escribe una matriz triangular superior de orden 2 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular inferior.

11 Escribe una matriz triangular inferior de orden 3 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular superior.

12 Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 4x - 7y - z = 9 \end{cases}$$

- Escribe la matriz C de los coeficientes de las incógnitas. ¿De qué dimensión es?
- Escribe una matriz columna X con las incógnitas. ¿De qué dimensión es?
- Escribe una matriz columna B con los términos independientes. ¿De qué dimensión es?

Solución:

a) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ es de dimensión 2×3

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×1

c) $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ es de dimensión 2×1

2. Operaciones con matrices

Piensa y calcula

Halla mentalmente el producto escalar de los siguientes vectores: a) $(3, 4) \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; b) $(2, -3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $15 + 24 = 39$

b) $6 - 6 = 0$

Aplica la teoría

13 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

- a) $A + B$ b) $A - B$ c) $5A$ d) $2A - 3B$

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A - B = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

c) $5A = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$ d) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

14 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1.ª coincide con el número de filas de la 2.ª

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 26 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1.ª coincide con el número de filas de la 2.ª

$$B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -7 & -13 & 12 \\ 9 & 1 & -4 \\ -25 & -15 & 20 \end{pmatrix}$$

15 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. Del resultado obtenido, ¿qué propiedad muy elemental se ha probado que no se verifica?

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -4 & 47 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 27 & 19 \end{pmatrix}$$

No se verifica la propiedad conmutativa del producto.

16 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz B tal que $A \cdot B = O_{2 \times 2}$, con la condición de que B no sea la matriz nula de dimensión 2×2

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

La condición que se debe verificar es que la 1.ª fila sea el doble de la 2.ª cambiada de signo.

Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Potencias de matrices y resolución de sistemas de matrices

Piensa y calcula

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^2 . ¿Qué matriz se obtiene?

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}$$

Se obtiene la matriz identidad de orden 2

Aplica la teoría

17 Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcula A^2 y A^3

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

18 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula A^{183}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3 \times 3}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A , y las pares, I

$$A^{183} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

19 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20 Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{250}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A , y las pares, I

$$A^{250} = I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula A^n

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

22 Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ -9 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas

Piensa y calcula

Una empresa de electrodomésticos tiene tres fábricas: una en Madrid, otra en Málaga y otra en Vigo. La producción semanal de cada una de ellas viene dada por la siguiente matriz:

	Madrid	Málaga	Vigo
Frigoríficos	150	140	130
Lavadoras	175	155	125
Lavaplatos	160	140	100

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 140 & 130 \\ 175 & 155 & 125 \\ 160 & 140 & 100 \end{pmatrix}$$

- Interpreta el elemento a_{12} de la matriz A
- Interpreta el elemento a_{21} de la matriz A
- Interpreta el elemento a_{33} de la matriz A

Solución:

- El elemento a_{12} , que es 140, indica el número de frigoríficos que se fabrican en Málaga.
- El elemento a_{21} , que es 175, indica el número de lavadoras que se fabrican en Madrid.
- El elemento a_{33} , que es 100, indica el número de lavaplatos que se fabrican en Vigo.

Aplica la teoría

- 23** Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz A . La evolución de los precios de los años 2012 al 2015 viene reflejada en la matriz B , expresada en céntimos de euro.

$$A = \begin{matrix} & \text{pan} & \text{agua} & \text{leche} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & 2012 & 2013 & 2014 & 2015 \\ \begin{matrix} \text{pan} \\ \text{agua} \\ \text{leche} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Halla, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indica qué información proporciona el producto matricial.
b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A \cdot B &= \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 106150 & 111300 & 113250 & 122750 \\ 108580 & 113940 & 115800 & 125450 \\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cada valor del producto proporciona los gastos de cada familia en pan, agua y leche en cada uno de los años 2012, 2013, 2014, 2015

El producto $B_{3 \times 4} \cdot A_{3 \times 3}$ no se puede realizar porque el número de columnas de B no coincide con el de filas de A

- b) El elemento c_{34} de la matriz producto es el consumo de la familia 3, F_3 , durante el año 2015, que son 845 €, ya que todos los valores están en céntimos de euro.

- 24** Un constructor puede adquirir ladrillos (L), tejas (T), madera (M) y cemento (C) de tres proveedores: P, Q y R. Los precios de cada proveedor por paquete de materiales vienen dados en miles de euros por la matriz:

$$\begin{matrix} & L & T & M & C \\ \begin{matrix} P \\ Q \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El constructor tiene que comenzar tres obras. Necesita:

- a) Primera obra: 24 paquetes de ladrillos, 5 de tejas, 12 de madera y 18 de cemento.
b) Segunda obra: 20 paquetes de ladrillos, 7 de tejas, 15 de madera y 20 de cemento.
c) Tercera obra: 20 paquetes de ladrillos, 4 de tejas, 15 de madera y 15 de cemento.

El constructor quiere adquirir todos los materiales de cada obra al mismo proveedor. ¿Qué proveedor es el más económico para cada obra?

Solución:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 20 & 20 \\ 5 & 7 & 4 \\ 12 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 15 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 437 & 461 & 392 \\ 432 & 469 & 393 \\ 436 & 468 & 391 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Debe elegir:

Para la primera obra, el proveedor Q

Para la segunda obra, el proveedor P

Para la tercera obra, el proveedor R

Preguntas tipo test

1 En una matriz hemisimétrica o antisimétrica, los elementos de la diagonal principal:

- Son todos unos.
- Pueden ser cualesquiera.
- Son unos cero y otros uno.
- Son todos cero.

2 Para poder multiplicar dos matrices:

- La primera ha de tener tantas filas como columnas la segunda.
- La primera ha de tener tantas columnas como filas la segunda.
- Tienen que ser cuadradas.
- Dos matrices se pueden multiplicar siempre.

3 Sean A y B matrices tales que se pueda multiplicar $A \cdot B$ y $B \cdot A$

- Unas veces $A \cdot B = B \cdot A$ y otras $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Siempre $A \cdot B = B \cdot A$
- Siempre $A \cdot B \neq B \cdot A$
- No es cierta ninguna de las anteriores.

4 Sean A y B matrices tales que $A \cdot B = O$, siendo O la matriz nula.

- Siempre $A = B = O$
- Al menos una de las dos $A = O$, o bien $B = O$
- Puede ser $A \neq O$ y $B \neq O$
- No es cierta ninguna de las anteriores.

5 Sean A , B y C matrices tal que $A \cdot B = A \cdot C$

- Siempre $B = C$
- Unas veces $B = C$, y otras, $B \neq C$
- Nunca $B = C$
- No es cierta ninguna de las anteriores.

6 Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Calcula A^2

- $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7 Sea A la matriz cuadrada siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Calcula A^3

- $\begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -1 & -17 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -29 & 17 \\ 1 & -23 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8 Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Halla los números reales α y β para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha \cdot I + \beta \cdot A$

- $\alpha = 2, \beta = -2$
- $\alpha = 0, \beta = 0$
- $\alpha = 3, \beta = 5$
- $\alpha = -2, \beta = 2$

9 Halla todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

- $a = 0, b = 0; a = 0, b = 1; a = 1, b = 0$
- $a = 1, b = 1$
- $a = -1, b = -1; a = 1, b = 2$
- $a = 3, b = 5$

10 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula $M = A + A^2 + \dots + A^{10}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicios y problemas propuestos

1. Tipos de matrices

25 Escribe una matriz fila de dimensión 1×3

Solución:

$$A = (2 \quad -8 \quad -9)$$

26 Escribe una matriz columna de dimensión 3×1

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

27 Escribe una matriz cuadrada de orden 2 y marca la diagonal principal.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

28 Halla el valor de a , b , c para que la siguiente matriz sea simétrica:

$$\begin{pmatrix} 3 & a & b \\ -2 & -7 & c \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a = -2, b = 0, c = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

29 Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica o hemisimétrica:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & 5 & -1 \\ \blacksquare & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

30 Escribe una matriz nula de dimensión 3×2

Solución:

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

31 Escribe una matriz diagonal de orden 3

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

32 Escribe una matriz escalar de orden 2 en la que el elemento $a_{11} = 5$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

33 Escribe una matriz unidad de orden 4

Solución:

$$I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

34 Escribe una matriz triangular superior de orden 3 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular inferior.

35 Escribe una matriz triangular inferior de orden 2 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A^t es una matriz triangular superior.

36 Dado el sistema lineal:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 7y + 6z &= 8 \\ z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

- Escribe la matriz C de los coeficientes de las incógnitas. ¿De qué dimensión es? ¿De qué tipo es?
- Escribe una matriz columna X con las incógnitas. ¿De qué dimensión es?
- Escribe una matriz columna B con los términos independientes. ¿De qué dimensión es?

Solución:

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×3

Es una matriz triangular superior.

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×1

c) $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×1

2. Operaciones con matrices

37 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula:

- a) $A + B$ b) $A - B$ c) $-3A$ d) $-5A + 2B$

Solución:

$$\text{a) } A + B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A - B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } -3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & -3 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} \quad \text{d) } -5A + 2B = \begin{pmatrix} -22 & 15 \\ -2 & 3 \\ 9 & -31 \end{pmatrix}$$

38 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz opuesta $-A$ y comprueba que $-A + A$ es la matriz nula de dimensión 2×2

Solución:

$$-A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A + A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

39 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y respecto a los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1.^a coincide con el número de filas de la 2.^a

$$A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -9 & 6 & -7 \\ -30 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b) $B_{2 \times 3} \cdot A_{3 \times 2}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1.^a coincide con el número de filas de la 2.^a

$$B_{2 \times 3} \cdot A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}$$

40 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula $A \cdot C$ y $B \cdot C$. Del resultado obtenido ¿qué propiedad muy elemental se ha probado que no se verifica?

Solución:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix} \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices no es simplificable:

Si $A \cdot C = B \cdot C$, no se deduce que $A = B$

41 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz B , tal que $B \cdot A = O_{2 \times 2}$, con la condición de que B no sea la matriz nula de dimensión 2×2

Solución:

Hay muchas soluciones, por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición que se debe verificar es que la 1.^a columna sea el doble de la 2.^a

3. Potencias de matrices y resolución de sistemas de matrices

42 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^2

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

43 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula A^{83}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A , y las pares, I

$$A^{83} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

44 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

calcula A^n

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

45 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula A^{2004}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3 \times 3}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{2004} = I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

46 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

47 Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 13 \\ 11 & -14 \end{pmatrix} \quad A - 3B = \begin{pmatrix} -18 & 8 \\ -5 & -25 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas

48 En un centro escolar, el 80% de los alumnos de 4.º de ESO pasan a Bachillerato, el 70% de los alumnos de 1.º de Bachillerato pasa a 2.º, el 65% de los alumnos de 2.º aprueban el curso. Repiten curso el 20% de los alumnos de 1.º y el 30% de los alumnos de 2.º. En este centro no se admiten alumnos nuevos para Bachillerato y todos los que aprueban el curso pasan al curso siguiente.

- Escribe la matriz de dimensión 3×3 que muestra la evolución entre cursos.
- En un cierto curso había 150 alumnos en 4.º de ESO, 110 alumnos en 1.º de Bachillerato y 100 alumnos en 2.º de bachillerato. ¿Cuál será la distribución de alumnos en el curso siguiente?

Solución:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,65 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ 107 \\ 65 \end{pmatrix}$$

49 Un industrial produce dos tipos de tornillos: planos (P) y de estrella (E). De cada tipo hace tres modelos: A, B y C. La siguiente matriz da la producción semanal de tornillos:

$$\begin{matrix} & A & B & C \\ P & \begin{pmatrix} 2000 & 2500 & 3000 \end{pmatrix} \\ E & \begin{pmatrix} 2500 & 3500 & 4000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El porcentaje de tornillos defectuosos del tipo A es de un 5%, del tipo B es de un 4% y del tipo C es de un 2%. Calcula el número de tornillos planos y de estrella que no sean defectuosos.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2000 & 2500 & 3000 \\ 2500 & 3500 & 4000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,96 \\ 0,98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7240 \\ 9655 \end{pmatrix}$$

Tornillos planos no defectuosos: 7240

Tornillos de estrella no defectuosos: 9655

Para ampliar

50 Sean los vectores del plano \mathbb{R}^2 , $\vec{u}(3, 2)$ y $\vec{v}(-2, 5)$. Halla la matriz correspondiente. ¿De qué dimensión es?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es de dimensión 2×2

51 Sean los vectores del espacio \mathbb{R}^3 , $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(5, -2, 0)$ y $\vec{w}(-7, 9, 4)$. Halla la matriz correspondiente. ¿De qué dimensión es?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ -7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Es de dimensión 3×3

52 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y respecto de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1.^a coincide con el número de filas de la 2.^a

$$A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = (-30)$$

b) $B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1.^a coincide con el número de filas de la 2.^a

$$B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -20 \\ -2 & -3 & 5 \\ 14 & 21 & -35 \end{pmatrix}$$

53 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -23 & 1 \\ -3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

54 Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n . Expresa M^3 como combinación lineal de M e I

Solución:

$$M^2 - 2M = 3I$$

$$M^2 = 3I + 2M$$

$$M^3 = (3I + 2M)M$$

$$M^3 = 3M + 2M^2$$

$$M^3 = 3M + 2(3I + 2M)$$

$$M^3 = 3M + 6I + 4M$$

$$M^3 = 6I + 7M$$

55 Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas (esto es, de dimensión 3×4) y C una matriz 2×3 . ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz $A \cdot B \cdot C$?, ¿qué dimensión tiene $A \cdot B \cdot C$?

Solución:

$$A_{3 \times 4} \cdot B_{n \times p} \cdot C_{2 \times 3}$$

B ha de tener tantas filas como columnas tenga A , y el mismo número de columnas que filas tenga C ; por tanto, $n = 4$ filas y $p = 2$ columnas.

El resultado $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} \cdot C_{2 \times 3}$ tiene tantas filas como A y tantas columnas como C ; luego es de dimensión 3×3

56 Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1×1 y el producto de la traspuesta de D por D es 3×3 . ¿Cuántas filas y columnas tiene D ?

Solución:

$$D_{n \times p} \cdot D_{p \times n}^t = M_{n \times n} \text{ Como el resultado es de dimensión } 1 \times 1, n = 1$$

$$D_{p \times n}^t \cdot D_{n \times p} = N_{p \times p} \text{ Como el resultado es de dimensión } 3 \times 3, p = 3$$

D tiene una fila y tres columnas.

57 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

58 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene: $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

59 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k/7 & 1 & 0 \\ k/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

60 Una empresa produce tres tipos de artículos, A, B y C. Los precios de coste por unidad son 30 €, 46 € y 75 €, respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 50 €, 80 € y 150 €, respectivamente. El número de unidades vendidas anualmente es de 2000, 1500 y 800, respectivamente.

Halla:

- La matriz fila de costes por unidad.
- La matriz fila de ventas por unidad.
- La matriz fila de beneficios por unidad.
- La matriz columna de unidades vendidas.
- El beneficio obtenido.

Solución:

a) $C = (30 \quad 46 \quad 75)$

b) $V = (50 \quad 80 \quad 150)$

c) $B = V - C = (20 \quad 34 \quad 75)$

d) $U = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 800 \end{pmatrix}$

e) $(20 \quad 34 \quad 75) \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 800 \end{pmatrix} = (151\,000)$

El beneficio obtenido es de 151 000 €

61 Una fábrica produce tres tipos de productos, A, B y C, que distribuye a cuatro clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3 unidades de A, 8 de B y ninguna de C; el tercer cliente no compró nada y el cuarto cliente compró 6 de A, 7 de B y 1 de C.

En el mes de febrero, el primer cliente y el segundo duplicaron el número de unidades que habían comprado en enero; el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, y el cuarto cliente no hizo pedido alguno.

- Construye la matriz correspondiente a las ventas de enero.
- Construye la matriz correspondiente a las ventas de febrero.
- Halla la matriz correspondiente a las ventas de enero y febrero.
- Si los precios de los artículos son 100 €, 80 € y 90 €, respectivamente, calcula lo que factura la fábrica por sus pedidos en los meses de enero y febrero.

Solución:

$$a) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4440 \\ 2820 \\ 1080 \\ 1250 \end{pmatrix}$$

Problemas

62 Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz $(A - 2I)^2$

Solución:

$$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

63 Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula $A^t A$ y AA^t , donde A^t denota la matriz traspuesta de A

Solución:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

64 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (t indica traspuesta)

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

65 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

66 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$$

67 Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

68 Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y sea I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3, comprueba que:

$$A^2 - A - 2I = O$$

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A - 2I = O$$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

69 Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{86}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A es cíclica de orden 3: $\begin{matrix} 86 & \underline{3} \\ 26 & 28 \\ 2 & \end{matrix}$

$$A^{86} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

70 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

halla A^{200}

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, $I_{2 \times 2}$

$$\text{Por tanto: } A^{200} = A^2 = I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

71 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula $3AA^t - 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t = 3 \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2I = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t - 2I = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

72 En un centro se imparten los cursos 1.º, 2.º y 3.º de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado semanalmente un número de horas de clase, tutorías y guardias que deben cubrir de acuerdo con la siguiente matriz:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{clase} & \text{guardias} & \text{tutorías} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1.^\circ \\ 2.^\circ \\ 3.^\circ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El centro paga cada hora de clase a 12 €, cada hora de guardia a 3 € y cada hora de tutoría a 6 €, según el vector:

$$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El centro dispone de 5 profesores para primer curso, 4 para segundo y 6 para tercero, representados por el vector:

$$P = (5 \quad 4 \quad 6)$$

Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados.

- a) PM b) MC c) PMC

Solución:

$$a) PM = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 304 & 55 & 47 \end{pmatrix}$$

Son el número de horas totales de clase, guardias y tutorías.

$$b) MC = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 279 \end{pmatrix}$$

Es lo que le cuesta al colegio la enseñanza de cada uno de los cursos.

$$c) PMC = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4095$$

Es lo que le cuesta en total la enseñanza al colegio.

73 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula: $A^2 - 4A + 4I_3$

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

74 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se multiplica la 1.ª ecuación por 2 y se le resta la 2.ª; se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el valor obtenido de A en la 1.ª ecuación y se despeja B; se obtiene:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

75 Una fábrica produce dos modelos de acumuladores de calor, G y P, en tres terminaciones: normal, lujo y especial. Del modelo G, produce 500 unidades normales, 300 unidades de lujo y 200 especiales. Del modelo P, produce 400 unidades normales, 200 unidades de lujo y 100 especiales. La terminación normal necesita 20 horas de fabricación de piezas y 1,5 horas de montaje. La terminación de lujo necesita 25 horas de fabricación y 2 horas de montaje, y la terminación especial necesita 30 horas de fabricación y 2,5 horas de montaje.

a) Representa en dos matrices la información dada.

b) Escribe una matriz que exprese las horas de fabricación y de montaje empleadas para cada uno de los modelos.

c) Si cada hora de fabricación se paga a 15 € y cada hora de montaje a 18 €, escribe una matriz que exprese el coste total de los acumuladores G y P

Solución:

$$a) \begin{matrix} & \text{Normal} & \text{Lujo} & \text{Especial} \\ G & \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 400 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \text{Fabricación} & \text{Montaje} \\ \text{Normal} & \begin{pmatrix} 20 & 1,5 \end{pmatrix} \\ \text{Lujo} & \begin{pmatrix} 25 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{Especial} & \begin{pmatrix} 30 & 2,5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 1,5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 385\,800 \\ 262\,500 \end{pmatrix}$$

76 Una fábrica de muebles hace mesas (M), sillas (S), y armarios (A), y cada uno de ellos en tres modelos: económico (E), normal (N) y lujo (L). Cada mes produce de mesas, 50 €, 40 N y 30 L; de sillas, 200 €, 150 N y 100 L; de armarios, 40 €, 30 N y 20 L.

a) Representa esta información en una matriz.

b) Calcula la matriz que da la producción de un año.

Solución:

$$a) \begin{matrix} & E & N & L \\ \text{Mesas} & \begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \end{pmatrix} \\ \text{Sillas} & \begin{pmatrix} 200 & 150 & 100 \end{pmatrix} \\ \text{Armarios} & \begin{pmatrix} 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$b) 12 \begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 480 & 360 \\ 2\,400 & 1\,800 & 1\,200 \\ 480 & 360 & 240 \end{pmatrix}$$

Para profundizar

77 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz B tal que $A + B = AA^T$

Solución:

$$A + B = AA^T$$

$$B = AA^T - A$$

$$B = A(A^T - I)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

78 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$\text{Si } k \text{ es par: } A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } k \text{ es impar: } A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

79 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^3 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$\text{Si } k \text{ es par: } A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } k \text{ es impar: } A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^k \\ 0 & 2^k & 0 \\ 2^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

80 Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3 , prueba que $A^3 + I = O$

b) Calcula A^{10}

Solución:

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

b) Si $A^3 + I_{3 \times 3} = O \Rightarrow A^3 = -I_{3 \times 3} \Rightarrow A^6 = I_{3 \times 3}$

A es cíclica de periodo 6

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$$

$$A^{10} = A^4 = A^3 \cdot A = -I_{3 \times 3} \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

81 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

halla el valor de a para que se cumpla la igualdad:

$$A^2 + 2A + I = O$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

82 Resuelve el sistema matricial:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se multiplica la 1.ª ecuación por 2, la 2.ª por -3 y se suman.
Se obtiene:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el valor obtenido de X en la 1.ª ecuación y se despeja Y

Se obtiene:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Practica

86 Calcula $A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Ejercicio 86

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 6 & 9 \\ 35 & 12 & 19 \\ 57 & 18 & 29 \\ 79 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

87 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

calcula $A \cdot B$, $B \cdot A$ y comprueba que el producto de matrices no es conmutativo.

Solución:

Ejercicio 87

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$; por tanto, el producto de matrices no es conmutativo.

88 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A \cdot B = A \cdot C$ y, sin embargo, $B \neq C$

Solución:

Ejercicio 88

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = A \cdot C$ y, sin embargo, $B \neq C$

89 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A \cdot B = O_{2 \times 2}$ y, sin embargo, $A \neq O_{2 \times 2}$ y $B \neq O_{2 \times 2}$

Solución:

Ejercicio 89

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \neq O_{2 \times 2}$ y $B \neq O_{2 \times 2}$

90 Calcula A^k , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Ejercicio 90

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

91 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

- a) $A + B$ b) $A - B$
 c) $2A - 3B$ d) $A^t \cdot B$

Solución:

Ejercicio 91

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A + B \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B \rightarrow \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -23 & 8 \\ 1 & -24 \end{pmatrix}$$

92 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula: A^2 , A^3 , A^4 y A^{183}

Solución:

Ejercicio 92

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{183} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

93 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula:

$$A^2 - 4A + 4I$$

Solución:

Ejercicio 93

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

94 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A

Solución:

Ejercicio 94

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$