

Unidad 15.

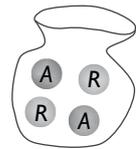
Probabilidad. Distribución binomial y normal

1. Reglas de integración

Piensa y calcula

Calcula mentalmente:

- La probabilidad de que al sacar una bola, sea roja.
- La probabilidad de que al sacar dos bolas sin devolución, la primera sea roja y la segunda azul.



Solución:

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$

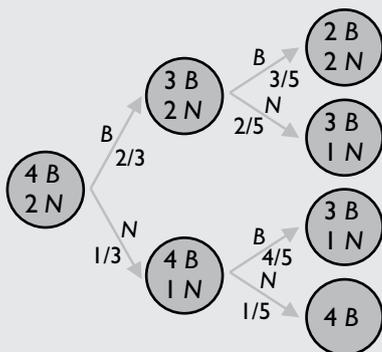
Aplica la teoría

1 De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin devolución, dos bolas.

- Haz el diagrama de árbol que representa el experimento.
- Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea negra, condicionada a que la primera ha sido blanca.

Solución:

a)



B = «Sacar bola blanca»

N = «Sacar bola negra»

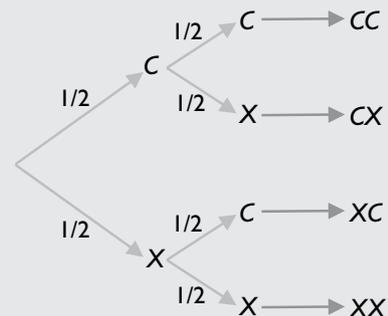
b) $P(N/B) = \frac{2}{5}$

2 Lanzamos dos monedas de un euro al aire:

- Haz el diagrama de árbol.
- Calcula la probabilidad de sacar dos caras.

Solución:

a)



C = «Sacar cara»

X = «Sacar cruz»

b) $P(C \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 De una baraja española de 40 cartas se extraen dos de ellas con devolución. Determina:

- La probabilidad de que las dos sean copas.
- La probabilidad de que la segunda sea de oros, condicionado a que la primera haya sido de copas.
- La probabilidad de que las dos sean figuras.
- La probabilidad de que la segunda sea figura, condicionado a que la primera haya sido un as.

Solución:

C = «Sacar copas»

O = «Sacar oros»

F = «Sacar figura»

A = «Sacar as»

$$a) P(C \cap C) = \frac{10}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$b) P(O/C) = P(O) = \frac{1}{4}$$

Los sucesos son independientes al ser con devolución.

$$c) P(F \cap F) = \frac{12}{40} = \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$$

$$d) P(F/A) = P(F) = \frac{3}{10}$$

2. Teoremas de probabilidad

Piensa y calcula

En una familia con dos hijos la probabilidad de que sean los dos varones es $1/4$ y de que sean las dos mujeres es $1/4$. Calcula la probabilidad de que en una familia con dos hijos ambos tengan el mismo sexo.

Solución:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

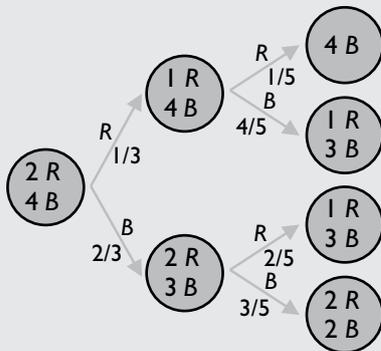
Aplica la teoría

- 4** Considérese una urna que contiene 2 bolas rojas y 4 blancas. Si de la urna se sacan dos bolas sin devolución, calcula la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color y que al menos una de las bolas sea blanca.

Solución:

R = «Sacar bola roja»

B = «Sacar bola blanca»



- Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(R \cap R) + P(B \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15}$$

- Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

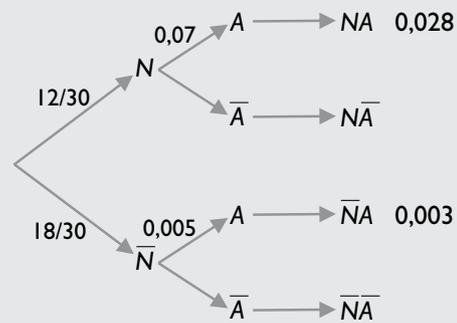
$$P(R \cap B) + P(B \cap R) + P(B \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{14}{15}$$

- 5** Un barco cubre diariamente el servicio entre dos puertos. Se sabe que la probabilidad de accidente en día sin niebla es 0,005, y en día de niebla, 0,07. Un cierto día de un mes en el que hubo 18 días sin niebla y 12 con niebla se produjo un accidente. Calcula la probabilidad de que el accidente haya sido en un día sin niebla.

Solución:

N = «Día con niebla»

A = «Producirse un accidente»



Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(\bar{N}/A) \frac{P(\bar{N} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,003}{0,028 + 0,003} = 0,097$$

- 6** Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Si la carta extraída es un rey, nos dirigimos a la urna I; en caso contrario, a la urna II. A continuación, extraemos una bola. El contenido de la urna I es de 7 bolas blancas y 5 negras y el de la urna II es de 6 bolas blancas y 4 negras.

Halla:

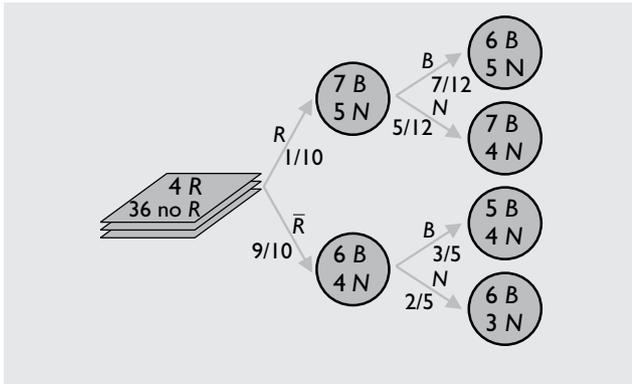
- La probabilidad de que la bola extraída sea blanca y de la urna II.
- La probabilidad de que la bola extraída sea negra.

Solución:

R = «Sacar rey»

B = «Sacar bola blanca»

N = «Sacar bola negra»



a) Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta:

$$P(B \cap \bar{R}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{50}$$

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(N) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{12} + \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{241}{600}$$

3. Distribuciones de frecuencia y probabilidad discretas

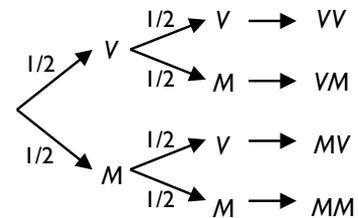
Piensa y calcula

Calcula mentalmente la probabilidad de que una familia con dos hijos tenga:

- a) Dos varones. b) Un varón y una mujer. c) Dos mujeres.

Solución:

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$



Aplica la teoría

7 La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta x viene dada por:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,35	0,03	k	0,25

Calcula el valor de k , la media y la desviación típica.

Solución:

- a) $k + 0,7 = 1 \Rightarrow k = 0,3$
 b) $\mu = 3,31$
 $\sigma = 1,35$

8 La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta x viene dada por:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Calcula:

- a) $P(x > 5)$ b) $P(x < 3)$
 c) La media. d) La desviación típica.

Solución:

- a) $P(x > 5) = 0,25 + 0,3 = 0,55$
 b) $P(x < 3) = 0$
 c) $\mu = 5,45$
 d) $\sigma = 1,36$

9 Se considera el experimento de lanzar dos monedas al aire y observar el número de caras.

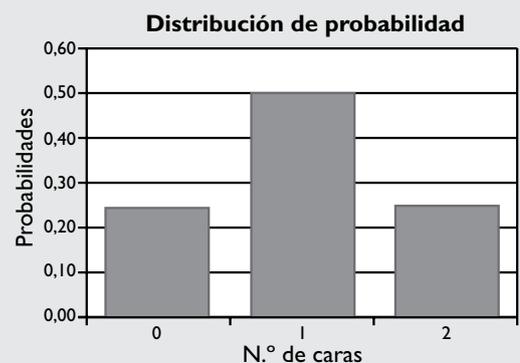
Calcula:

- a) La distribución de probabilidad, y represéntala gráficamente.
 b) Los parámetros.

Solución:

a)

N.º de caras	p_i
0	0,25
1	0,50
2	0,25



- b) $\mu = 1$
 $\sigma = 0,71$

- 10** Un estudiante que prepara oposiciones domina 80 temas de los 100 de que consta el temario. Para el examen se eligen dos temas al azar, y el opositor puede dominar los dos, uno o ninguno. Haz la distribución de probabilidad.

Solución:

N.º de temas	p_i
0	0,04
1	0,32
2	0,64

4. Distribución binomial

Piensa y calcula

Un jugador encesta con probabilidad $1/3$. Calcula la probabilidad de que al tirar dos veces enceste:

- a) dos veces; b) una vez; c) ninguna vez;

Solución:

- a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{4}{9}$

Aplica la teoría

- 11** Calcula mentalmente:

- a) $1!$ b) $5!$
 c) $\binom{4}{0}$ d) $\binom{7}{1}$

Solución:

- a) 1 b) 120
 c) 1 d) 7

- 12** Halla, utilizando la calculadora:

- a) $8!$ b) $13!$
 c) $\binom{10}{4}$ d) $\binom{10}{5}$

Solución:

- a) $40\,320$ b) $6\,227\,020\,800$
 c) 210 d) 252

- 13** La probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste una canasta de 3 puntos es $0,6$. Si tira a la cesta 4 veces, calcula la probabilidad de que enceste 3

Solución:

- a) $x \equiv$ Número de encestes. b) $B(4; 0,6)$
 c) $P(x = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,3456$

- 14** Un 5% de las piezas producidas en un proceso de fabricación resultan defectuosas. Halla la probabilidad de que en una muestra de 20 piezas elegidas al azar haya exactamente dos piezas defectuosas.

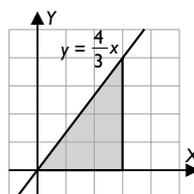
Solución:

- a) $x \equiv$ Número de piezas defectuosas. b) $B(20; 0,05)$
 c) $P(x = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{18} = 0,1887$

5. Distribuciones de frecuencia y probabilidad continuas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente el área comprendida entre el eje X y la recta $y = \frac{4}{3}x$ en el intervalo $[0, 3]$



Solución:

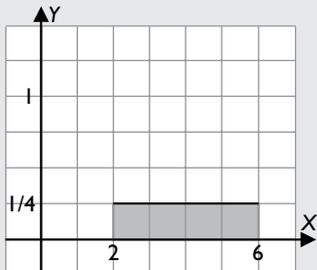
Área = 6 u^2

Aplica la teoría

15 Demuestra que la siguiente función es de densidad y calcula $P(3 \leq x \leq 4)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [2, 6] \\ 0 & \text{si } x \notin [2, 6] \end{cases}$$

Solución:



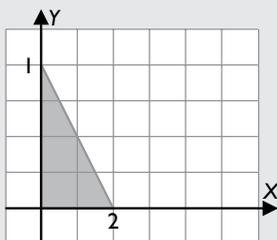
- a) $f(x) \geq 0$ para todo valor del dominio.
 b) El área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el dominio es el área de un rectángulo: $4 \cdot 1/4 = 1$
 Como se verifican las características a) y b), es una función de densidad.

$$P(3 \leq x \leq 4) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

16 Demuestra que la siguiente función es de densidad y calcula $P(1 \leq x \leq 2)$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Solución:



- a) $f(x) \geq 0$ para todo valor del dominio.

b) El área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el dominio es el área de un triángulo:

$$\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Como se verifican las características a) y b), es una función de densidad.

$$P(1 \leq x \leq 2) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{4}$$

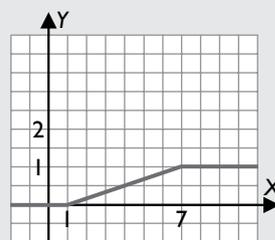
17 Calcula la función de distribución de una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x \in [1, 7] \\ 0 & \text{si } x \notin [1, 7] \end{cases}$$

Solución:

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(x \leq x_i)$	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{6} & \text{si } 1 < x < 7 \\ 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$



18 Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula $P(x \leq 10)$ y $P(8 \leq x \leq 10)$

Solución:

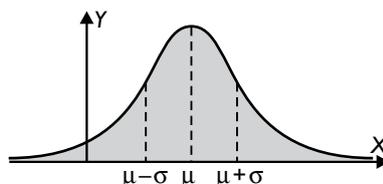
$$P(x \leq 10) = F(10) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$P(8 \leq x \leq 10) = F(10) - F(8) = \frac{10}{12} - \frac{8}{10} = \frac{1}{30}$$

6. Distribución normal

Piensa y calcula

En el siguiente dibujo, el área comprendida entre el eje X y la curva es I . Calcula mentalmente cuánto vale el área que queda a la izquierda de la recta $x = \mu$



Solución:

$$\frac{1}{2}$$

Aplica la teoría

19 Calcula en una $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

- $P(z \leq 0,5)$
- $P(z \leq 1,72)$
- $P(z \geq 2,4)$
- $P(z \leq -3,56)$

Solución:

- 0,6915
- 0,9573
- $1 - P(z \leq 2,4) = 0,0082$
- $P(z \geq 3,56) = 1 - P(z \leq 3,56) = 0,0002$

20 Calcula en una $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

- $P(1,5 \leq z \leq 2)$
- $P(-2,3 \leq z \leq 3,7)$
- $P(-3,4 \leq z \leq -1,8)$
- $P(-1,6 \leq z \leq 1,6)$

Solución:

- $P(z \leq 2) - P(z \leq 1,5) = 0,0440$
- $P(z \leq 3,7) - P(z \leq -2,3) =$
 $= P(z \leq 3,7) - 1 + P(z \leq 2,3) = 0,9892$
- $P(z \leq -1,8) - P(z \leq -3,4) =$
 $= X - P(z \leq 1,8) - X + P(z \leq 3,4) = 0,0356$
- $P(z \leq 1,6) - P(z \leq -1,6) =$
 $= P(z \leq 1,6) - 1 + P(z \leq 1,6) = 2P(z \leq 1,6) - 1 = 0,8904$

21 Calcula el valor de k en los siguientes casos:

- $P(z \leq k) = 0,9582$
- $P(z \geq k) = 0,7612$

Solución:

- $k = 1,73$
- $k = -0,71$

22 Calcula en una $N(20, 4)$ las siguientes probabilidades:

- $P(x \leq 25)$
- $P(x \geq 17)$
- $P(23 \leq x \leq 27)$
- $P(15 \leq x \leq 18)$

Solución:

- $P\left(z \leq \frac{25 - 20}{4}\right) = P(z \leq 1,25) = 0,8944$
- $P\left(z \geq \frac{17 - 20}{4}\right) = P(z \geq -0,75) = P(z \leq 0,75) = 0,7734$
- $P\left(\frac{23 - 20}{4} \leq z \leq \frac{17 - 20}{4}\right) = P(0,75 \leq z \leq 1,75) =$
 $= P(z \leq 1,75) - P(z \leq 0,75) = 0,1865$
- $P\left(\frac{15 - 20}{4} \leq z \leq \frac{18 - 20}{4}\right) = P(-1,25 \leq z \leq -0,5) =$
 $= P(z \leq -0,5) - P(z \leq -1,25) =$
 $= X - P(z \leq 0,5) - X + P(z \leq 1,25) = 0,2029$

23 El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media 3,5 kg y una desviación típica de 0,6 kg. Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2,7 kg y 4 kg

Solución:

- $x \equiv$ Peso de los recién nacidos.
- $N(3,5; 0,6)$
- $P(2,7 \leq x \leq 4)$
 $P(2,7 \leq z \leq 4) = P\left(\frac{2,7 - 3,5}{0,6} \leq z \leq \frac{4 - 3,5}{0,6}\right) =$
 $= P(-1,33 \leq z \leq 0,83) = P(z \leq 0,83) - P(z \leq -1,33) =$
 $= P(z \leq 0,83) - 1 + P(z \leq 1,33) = 0,7049$

7. La binomial se aproxima a la normal

Piensa y calcula

En una función de distribución se estudia la probabilidad de la variable aleatoria número de hijas de las familias con dos descendientes. Calcula mentalmente $P(x = 1)$ y $P(0,5 < x < 1,5)$

Solución:

$$\frac{1}{4} \text{ y } \frac{1}{4}$$

Aplica la teoría

24 El 5% de los libros prestados en una biblioteca de un centro escolar son técnicos. Si se toman los últimos 500 préstamos, calcula la probabilidad de que se hayan prestado entre 25 y 30 libros técnicos.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de libros prestados.

b) $B(500; 0,05)$

c) $P(25 \leq x \leq 30)$

• Se decide si se puede normalizar:

$$np = 500 \cdot 0,05 = 25 > 5$$

$$nq = 500 \cdot 0,95 = 475 > 5$$

Se puede aproximar a una normal.

• Se normaliza:

$$\mu = np = 500 \cdot 0,05 = 25$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 4,87$$

$$B(500; 0,05) \Rightarrow N(25; 4,87)$$

• Se corrige la continuidad y se tipifica:

$$P(25 \leq x \leq 30) \Rightarrow P(24,5 \leq x \leq 30,5) =$$

$$= P\left(\frac{24,5 - 25}{4,87} \leq z \leq \frac{30,5 - 25}{4,87}\right) =$$

$$= P(-0,10 \leq z \leq 1,13) =$$

$$= P(z \leq 1,13) - P(z \leq -0,10) =$$

$$= P(z \leq 1,13) - [1 - P(z \leq 0,10)] = 0,4106$$

25 Se lanza una moneda 500 veces. Calcula la probabilidad de que salgan a lo sumo 260 caras.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de caras.

b) $B(500; 0,5)$

c) $P(x \leq 260)$

• Se decide si se puede normalizar:

$$np = 500 \cdot 0,5 = 250 > 5$$

$$nq = 500 \cdot 0,5 = 250 > 5$$

Se puede aproximar a una normal.

• Se normaliza:

$$\mu = np = 500 \cdot 0,5 = 250$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 11,18$$

$$B(500; 0,5) \Rightarrow N(250; 11,18)$$

• Se corrige la continuidad y se tipifica:

$$P(x \leq 260) \Rightarrow P(x \leq 260,5) =$$

$$= P\left(z \leq \frac{260,5 - 250}{11,18}\right) = P(z \leq 0,94) = 0,8264$$

26 Se sabe que entre los enfermos diabéticos la probabilidad de superar un infarto es del 20%. Si se tienen 200 pacientes, calcula la probabilidad de que al menos 50 superen el infarto.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de pacientes.

b) $B(200; 0,2)$

c) $P(x \geq 50)$

• Se decide si se puede normalizar:

$$np = 200 \cdot 0,2 = 40 > 5$$

$$nq = 200 \cdot 0,8 = 160 > 5$$

Se puede ajustar a una normal.

• Se normaliza:

$$\mu = np = 200 \cdot 0,2 = 40$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 5,66$$

$$B(200; 0,2) \Rightarrow N(40; 5,66)$$

• Se corrige la continuidad y se tipifica:

$$P(x \geq 50) \Rightarrow P(x \geq 49,5) =$$

$$= P\left(z \geq \frac{49,5 - 40}{5,66}\right) = P(z \geq -1,68) =$$

$$= 1 - P(z \leq 1,68) = 0,0465$$

27 Se lanza un dado 130 veces. Calcula la probabilidad de que salga al menos 18 veces el número 4

Solución:

a) $x \equiv$ Número de cuatros.

b) $B(130; 0,17)$

c) $P(x \geq 18)$

• Se decide si se puede normalizar:

$$np = 130 \cdot 0,17 = 22,1 > 5$$

$$nq = 130 \cdot 0,83 = 107,9 > 5$$

Se puede ajustar a una normal.

• Se normaliza:

$$\mu = np = 130 \cdot 0,17 = 22,1$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{130 \cdot 0,17 \cdot 0,83} = 4,28$$

$$B(130; 0,17) \Rightarrow N(22,1; 4,28)$$

• Se corrige la continuidad y se tipifica:

$$P(x \geq 18) \Rightarrow P(x \geq 17,5) = P\left(z \geq \frac{17,5 - 22,1}{4,28}\right) =$$

$$= P(z \geq -1,07) = P(z \leq 1,07) = 0,8577$$

Preguntas tipo test

- 1** El 2% de unas bombillas de bajo consumo de una determinada marca son defectuosas. Si se venden en lotes de 25 bombillas, calcula la probabilidad de que haya como máximo dos defectuosas.
- 0,02
 0,9868
 0,0132
 0,98
- 2** Un jugador de baloncesto encesta un 95% de las veces. Si realiza 7 lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de que falle alguno?
- 0,6983
 0,6893
 0,3107
 0,3017
- 3** Se sabe que un medicamento produce mejoría en dos de cada tres enfermos. Si se administra en 7 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que mejoren 4 pacientes?
- 0,2561
 0,7439
 0,4294
 0,2615
- 4** En una tienda se estima que el tiempo que tarda en venderse un determinado tipo de vasos sigue una distribución normal de 50 días de media y una desviación típica de 8 días. Calcula la probabilidad de que un juego de vasos se venda antes de 35 días.
- 0,9696
 0,304
 0,0304
 0,696
- 5** En un test se mide cierta habilidad específica. Las puntuaciones se distribuyen siguiendo una normal con media 100 puntos y desviación típica de 25 puntos. Calcula la puntuación que delimita el grupo que tiene el 20% de las puntuaciones más altas. Redondea el resultado a una puntuación entera.
- 120
 121
 122
 123
- 6** El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. Un estudio asegura que no se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo. Se elige al azar un préstamo. Calcula la probabilidad de que se pague.
- 0,751
 0,285
 0,715
 0,249
- 7** Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B ni el 10% de los atendidos por el sastre C. El 55% de los arreglos se encargan al sastre A, el 30% al sastre B y el 15% restante al C. Calcula la probabilidad de que si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.
- 0,59
 0,41
 0,027
 0,066
- 8** Un restaurante dispone de 20 mesas. La dirección del restaurante ha observado que el 8% de las reservas de mesas para cenar se anulan a última hora. Por esta razón se admiten 22 reservas para una misma noche. Calcula la probabilidad de que el restaurante no pueda satisfacer todas las solicitudes.
- 0,7442
 0,4652
 0,5348
 0,2789
- 9** Un grupo de alumnos de 2.º de Bachillerato va de excursión al campo el próximo domingo. Desafortunadamente, en las noticias del tiempo han predicho que lloverá ese día. Se sabe, de predicciones anteriores, que cuando llueve, las noticias del tiempo predicen lluvia el 90% de las veces. Mientras que cuando no llueve, predicen lluvia un 10% de las veces. Si sabemos que en la zona a la que van los alumnos llueve el 5% de los días, ¿cuál es la probabilidad de que llueva ese domingo?
- 0,14
 0,045
 0,6786
 0,3214

Ejercicios y problemas propuestos

1. Probabilidad condicionada

28 Haz un diagrama cartesiano para el experimento de lanzar al aire dos monedas y calcula la probabilidad de obtener:

- a) Dos caras.
- b) Dos cruces.
- c) Una cara y la otra cruz.

Solución:

	C	C
C	CC	CX
X	XC	XX

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{1}{2}$

29 La probabilidad de un suceso A es 0,2 y la probabilidad de un suceso B es 0,35. Calcula la probabilidad de la intersección de A y B sabiendo que son sucesos independientes.

Solución:

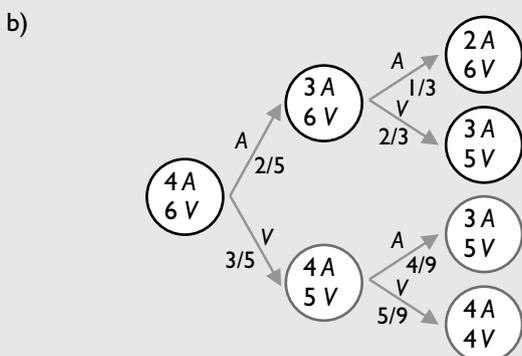
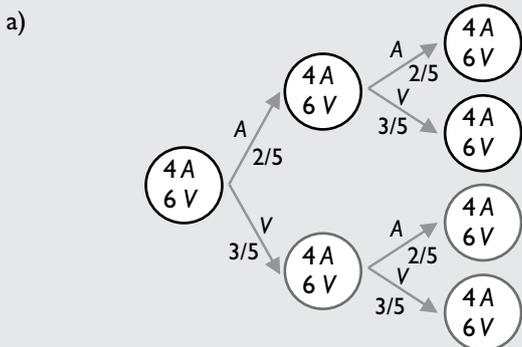
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,35 = 0,07$$

30 En una urna hay 4 bolas amarillas y 6 verdes. Si se extraen dos bolas, haz el diagrama de árbol del experimento cuando se hace:

- a) Con devolución.
- b) Sin devolución.

Solución:

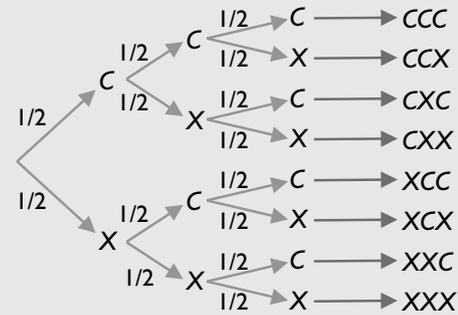
A = «Sacar bola amarilla» V = «Sacar bola verde»



31 Haz un diagrama en árbol para el experimento de lanzar una moneda tres veces y calcula la probabilidad de obtener:

- a) Tres caras.
- b) Las dos primeras caras y una cruz.
- c) La primera cara y luego dos cruces.
- d) Tres cruces.

Solución:



- a) $\frac{1}{8}$
- b) $\frac{1}{8}$
- c) $\frac{1}{8}$
- d) $\frac{1}{8}$

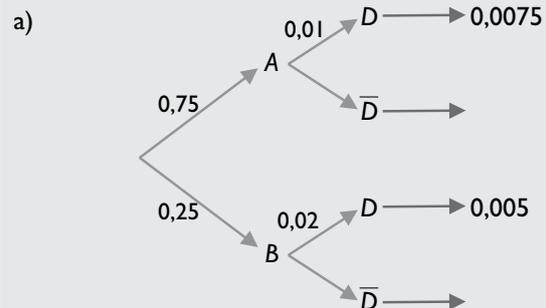
2. Teoremas de la probabilidad

32 Dos máquinas se usan para producir marcapasos. La máquina A produce el 75% de todos los marcapasos, mientras que la máquina B produce el 25%. El 1% de todos los marcapasos producidos por la máquina A son defectuosos, mientras que el 2% de los marcapasos producidos por la máquina B son defectuosos.

- a) Dibuja un diagrama de árbol que represente esta situación.
- b) Se selecciona un marcapasos al azar de entre todos los producidos y se encuentra que es defectuoso. Encuentra la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

Solución:

A = «Producido por la máquina A»
 B = «Producido por la máquina B»
 D = «Sacar marcapasos defectuoso»



b) Se utiliza el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{0,0075}{0,0125} = 0,6$$

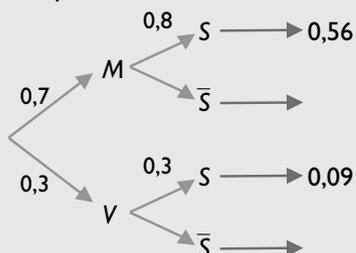
Ejercicios y problemas propuestos

33 En un supermercado, el 70% de las compras las realizan las mujeres; de las compras realizadas por estas, el 80% supera los 12 €, mientras que de las compras realizadas por hombres solo el 30% supera esa cantidad.

- Elegido un tique de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 12 €?
- Si se sabe que el tique de compra supera los 12 €, ¿cuál es la probabilidad de que la compra haya sido hecha por una mujer?

Solución:

M = «Compra realizada por una mujer»
S = «Compra superior a 12 €»



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(S) = 0,56 + 0,09 = 0,65$$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(S/M) = \frac{0,56}{0,65} = 0,86$$

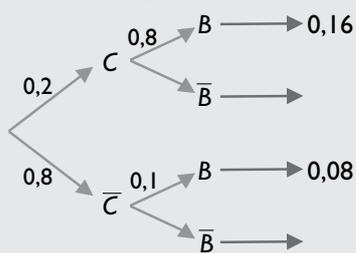
34 Se estima que solo un 20% de los que compran acciones en Bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos, el 80% obtienen beneficios. De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles, solo un 10% obtienen beneficios.

Se desea saber:

- El tanto por ciento de los que compran acciones en Bolsa que obtienen beneficios.
- Si se elige al azar una persona que ha comprado acciones en Bolsa y resulta que ha obtenido beneficios, ¿cuál es la probabilidad de que tenga conocimientos bursátiles?

Solución:

C = «Tienen conocimientos bursátiles»
B = «Obtienen beneficios»



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(B) = 0,16 + 0,08 = 0,24 \Rightarrow 24\%$$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

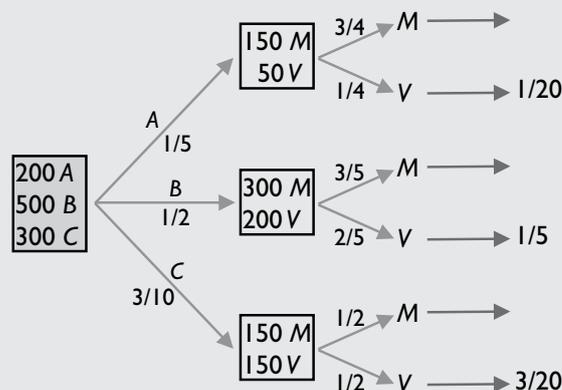
$$P(C/B) = \frac{0,16}{0,24} = 0,67$$

35 En una universidad existen tres facultades: A, B y C. En A hay matriculadas 150 chicas y 50 chicos; en B, 300 chicas y 200 chicos; y en C, 150 chicas y 150 chicos.

- Calcula la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, sea chico.
- Si un estudiante elegido al azar resultara ser chico, ¿cuál es su facultad más probable?

Solución:

A = «Ser de la universidad A»
B = «Ser de la universidad B»
C = «Ser de la universidad C»
V = «Ser chico»
M = «Ser chica»



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(V) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(A/V) = \frac{1/20}{2/5} = \frac{1}{8}$$

$$P(B/V) = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(C/V) = \frac{3/20}{2/5} = \frac{3}{8}$$

La universidad más probable es la B

3. Distribuciones de frecuencia y probabilidad discretas

36 Una variable x tiene una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	6
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Calcula:

- $P(x = 7)$
- $P(x > 3)$
- La media.
- La desviación típica.

Solución:

a) $P(x = 7) = 0$

b) $P(x > 3) = \frac{1}{3}$

c) $\mu = 3$

d) $\sigma = 1,49$

37 Se considera el experimento de lanzar dos dados de seis caras numerados y sumar los números que se obtienen.

- Halla la función de probabilidad.
- Halla sus parámetros.

Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

x_i	p_i
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

- $\mu = 7$
- $\sigma = 2,42$

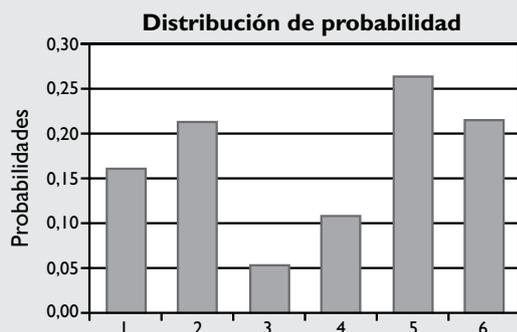
38 Una variable x tiene una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{3}{19}$	$\frac{4}{19}$	k	$\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{4}{19}$

- Calcula el valor de k
- Representa la función de probabilidad.
- Calcula la media.
- Calcula la desviación típica.

Solución:

- $\frac{1}{19}$
-



- $\mu = 3,74$
- $\sigma = 1,83$

4. Distribución binomial

39 Un examen tipo test tiene diez preguntas con cuatro respuestas cada una. Si un alumno responde aleatoriamente, ¿qué probabilidad tiene de contestar bien a más de tres preguntas?

Solución:

- $x \equiv$ Número de respuestas acertadas.
- $B(10, 1/4)$
- $P(x > 3)$
 $P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - 0,7759 = 0,2241$

40 Considera una caja que contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. Se selecciona una bola al azar, se anota su color y se devuelve a la caja. Esta actividad se repite diez veces. Encuentra la probabilidad de observar una bola roja seis veces.

Solución:

- $x \equiv$ Número de bolas rojas.
- $B(10, 2/3)$
- $P(x = 6)$
 $P(x = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0,2276$

41 En un centro aprobaron Lengua el 80% de los alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que, de un grupo de 8 alumnos elegidos al azar, solo dos hayan suspendido Lengua?

Solución:

- $x \equiv$ Número de alumnos suspensos.
- $B(8; 0,2)$
- $P(x = 2)$
 $P(x = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^6 = 0,2936$

42 Si el 20% de las piezas producidas por una máquina son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que entre cuatro piezas elegidas al azar, a lo sumo 2 sean defectuosas?

Solución:

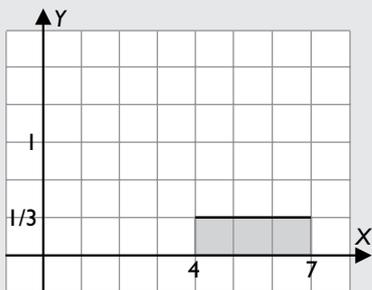
- $x \equiv$ Número de piezas defectuosas.
- $B(4; 0,2)$
- $P(x \leq 2)$
 $P(x \leq 2) =$
 $= \binom{4}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^4 + \binom{4}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^3 + \binom{4}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^2 =$
 $= 0,9728$

5. Distribuciones de frecuencia y probabilidad continuas

43 Demuestra que la siguiente función es de densidad y calcula $P(5 \leq x \leq 6)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [4, 7] \\ 0 & \text{si } x \notin [4, 7] \end{cases}$$

Solución:



- a) $f(x) \geq 0$ para todo valor del dominio.
 b) El área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el dominio es el área de un rectángulo: $3 \cdot 1/3 = 1$
 Como se verifican las características a) y b), es una función de densidad.

$$P(5 \leq x \leq 6) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

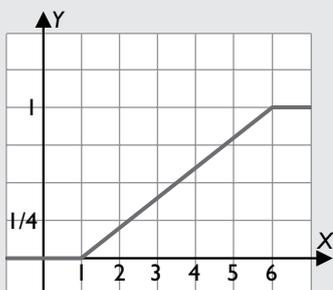
44 Calcula la función de distribución de una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x \in [1, 6] \\ 0 & \text{si } x \notin [1, 6] \end{cases}$$

Solución:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x \leq x_i)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{5} & \text{si } 1 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



45 Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{x}{5} - 1 & \text{si } 5 < x < 10 \\ 1 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

Calcula la $P(6 \leq x \leq 8)$

Solución:

$$P(6 \leq x \leq 8) = F(8) - F(6) = \frac{8}{5} - 1 - \frac{6}{5} + 1 = \frac{2}{5}$$

6. Distribución normal

46 Calcula en una $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

- a) $P(z \leq 3,51)$
 b) $P(z \geq -2,43)$
 c) $P(z \geq 1,62)$
 d) $P(z \leq -2,38)$

Solución:

- a) 0,9998
 b) $P(z \leq 2,43) = 0,9925$
 c) $1 - P(z \leq 1,62) = 0,0526$
 d) $1 - P(z \leq 2,38) = 0,0087$

47 Calcula en una $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

- a) $P(2,5 \leq z \leq 3)$
 b) $P(-1,34 \leq z \leq 1,72)$
 c) $P(-2,14 \leq z \leq -1,18)$
 d) $P(-3,5 \leq z \leq 3,5)$

Solución:

- a) $P(z \leq 3) - P(z \leq 2,5) = 0,0049$
 b) $P(z \leq 1,72) - P(z \leq -1,34) =$
 $= P(z \leq 1,72) - 1 + P(z \leq 1,34) = 0,8672$
 c) $P(z \leq -1,18) - P(z \leq -2,14) =$
 $= 1 - P(z \leq 1,18) - 1 + P(z \leq 2,14) = 0,1028$
 d) $P(z \leq 3,5) - P(z \leq -3,5) = P(z \leq 3,5) - 1 + P(z \leq 3,5) =$
 $= 2P(z \leq 3,5) - 1 = 0,9996$

48 Calcula el valor de k en los siguientes casos:

- a) $P(z \leq k) = 0,7881$
 b) $P(z \geq k) = 0,9959$

Solución:

- a) $k = 0,8$
 b) $k = -2,64$

49 Calcula en una $N(16, 2)$ las siguientes probabilidades:

- $P(x \leq 18)$
- $P(x \geq 14)$
- $P(15 \leq x \leq 17)$
- $P(17 \leq x \leq 18)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } P\left(z \leq \frac{18-16}{2}\right) &= P(z \leq 1) = 0,8413 \\ \text{b) } P\left(z \geq \frac{14-16}{2}\right) &= P(z \geq -1) = P(z \leq 1) = 0,8413 \\ \text{c) } P\left(\frac{15-16}{2} \leq z \leq \frac{17-16}{2}\right) &= P(-0,5 \leq z \leq 0,5) = \\ &= P(z \leq 0,5) - P(z \leq -0,5) = P(z \leq 0,5) - 1 + P(z \leq 0,5) = \\ &= 2 \cdot P(z \leq 0,5) - 1 = 0,383 \\ \text{d) } P\left(\frac{17-16}{2} \leq z \leq \frac{18-16}{2}\right) &= P(0,5 \leq z \leq 1) = \\ &= P(z \leq 1) - P(z \leq 0,5) = 0,1498 \end{aligned}$$

7. La binomial se aproxima a la normal

50 Halla la probabilidad de que al lanzar una moneda 12 veces salgan al menos 5 caras.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &\equiv \text{Número de caras.} \\ \text{b) } B(12; 0,5) \\ \text{c) } P(x \geq 5) \\ &\bullet \text{ Se decide si se puede normalizar:} \\ &\quad np = 12 \cdot 0,5 = 6 > 5 \\ &\quad nq = 12 \cdot 0,5 = 6 > 5 \\ &\quad \text{Se puede aproximar a una normal.} \\ &\bullet \text{ Se normaliza:} \\ &\quad \mu = np = 12 \cdot 0,5 = 6 \\ &\quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 1,73 \\ &\quad B(12; 0,5) \Rightarrow N(6; 1,73) \\ &\bullet \text{ Se corrige la continuidad y se tipifica:} \\ &\quad P(x \geq 5) \Rightarrow P(x \geq 4,5) = P\left(z \geq \frac{4,5-6}{1,73}\right) = \\ &\quad P(z \geq -0,87) = P(z \leq 0,87) = 0,8078 \end{aligned}$$

51 En un test de 120 preguntas de verdadero o falso, halla la probabilidad de acertar al menos 40 respuestas.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &\equiv \text{Número de respuestas.} \\ \text{b) } B(120; 0,5) \end{aligned}$$

c) $P(x \geq 40)$

- Se decide si se puede normalizar:
 $np = 120 \cdot 0,5 = 60 > 5$
 $nq = 120 \cdot 0,5 = 60 > 5$
 Se puede aproximar a una normal.
- Se normaliza:
 $\mu = np = 120 \cdot 0,5 = 60$
 $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5,48$
 $B(120; 0,5) \Rightarrow N(60; 5,48)$
- Se corrige la continuidad y se tipifica:
 $P(x \geq 40) \Rightarrow P(x \geq 39,5) = P\left(z \geq \frac{39,5-60}{5,48}\right) =$
 $P(z \geq -3,74) = P(z \leq 3,74) = 0,9999$

52 Se sabe que una máquina produce un 5% de piezas defectuosas. Calcula la probabilidad de que sean defectuosas en una muestra de 500 piezas:

- A lo sumo 30
- Entre 30 y 50

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &\equiv \text{Número de piezas defectuosas.} \\ \text{b) } B(500; 0,05) \\ \text{c) } P(x \leq 30) \text{ y } P(30 \leq x \leq 50) \\ &\bullet \text{ Se decide si se puede normalizar:} \\ &\quad np = 500 \cdot 0,05 = 25 > 5 \\ &\quad nq = 500 \cdot 0,95 = 475 > 5 \\ &\quad \text{Se puede aproximar a una normal.} \\ &\bullet \text{ Se normaliza:} \\ &\quad \mu = np = 500 \cdot 0,05 = 25 \\ &\quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 4,87 \\ &\quad B(500; 0,05) \Rightarrow N(25; 4,87) \\ &\bullet \text{ Se corrige la continuidad y se tipifica:} \\ &\quad - \text{ Apartado a)} \\ &\quad P(x \leq 30) \Rightarrow P(x \leq 30,5) = P\left(z \leq \frac{30,5-25}{4,87}\right) = \\ &\quad = P(z \leq 1,13) = 0,8708 \\ &\quad - \text{ Apartado b)} \\ &\quad P(30 \leq x \leq 50) \Rightarrow P(29,5 \leq x \leq 50,5) = \\ &\quad = P\left(\frac{29,5-25}{4,87} \leq z \leq \frac{50,5-25}{4,87}\right) = \\ &\quad = P(0,92 \leq z \leq 5,24) = P(z \leq 5,24) - P(z \leq 0,92) = \\ &\quad = 1 - 0,8212 = 0,1788 \end{aligned}$$

Para ampliar

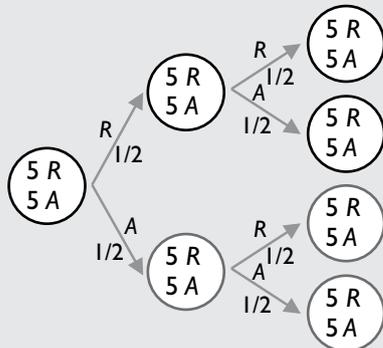
53 Halla la probabilidad de obtener dos bolas azules al extraer dos bolas de una urna que contiene 5 bolas rojas y 5 azules cuando el experimento se hace:

- a) Con devolución. b) Sin devolución.

Solución:

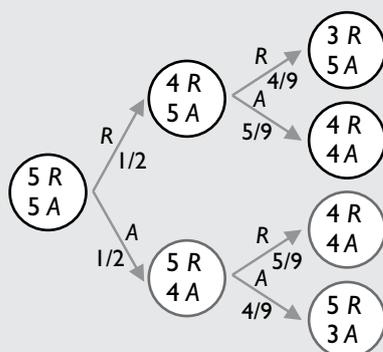
A = «Sacar bola azul» R = «Sacar bola roja»

a)



$$P(A \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

b)



$$P(A \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

54 Calcula la probabilidad de obtener dos reyes al extraer dos cartas con devolución de una baraja española de 40 cartas.

Solución:

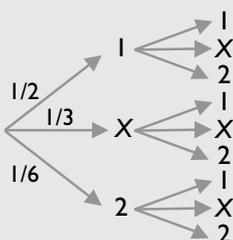
R = «Extraer rey»

$$P(R \cap R) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

55 Se lanza un dado de quinielas dos veces. Calcula la probabilidad de sacar:

- a) Dos unos.
b) Una X, condicionado a que ha salido un dos.

Solución:



$$a) P(I \cap I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$b) P(X/2) = \frac{1}{3}$$

56 Calcula la probabilidad de obtener dos números que sumen 5 al lanzar al aire dos dados.

Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

S = «Sacar dos números que sumen 5»

$$P(S) = \frac{5}{36}$$

57 Halla la probabilidad de obtener dos cartas de bastos al extraer con devolución dos cartas de una baraja española de 40 cartas.

Solución:

B = «Sacar bastos»

$$P(B \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

58 Considera dos cajas con bolas de colores:

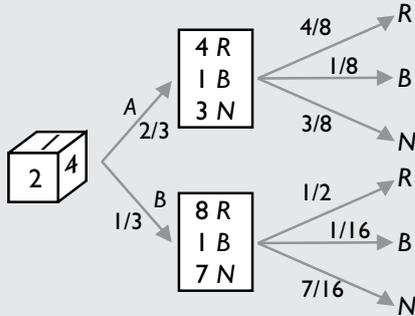
- La caja A contiene 4 bolas rojas, 1 bola blanca y 3 bolas negras. La caja B contiene 8 bolas rojas, 1 bola blanca y 7 bolas negras.
- Considera un experimento en dos etapas: primero se lanza un dado y luego se selecciona una bola de una de las cajas A o B. La caja se selecciona dependiendo del resultado observado al lanzar el dado. Si el resultado al lanzar el dado está en el conjunto {1, 2, 3, 4}, entonces se selecciona al azar una bola de la caja A. De otra manera, se selecciona al azar una bola de la caja B

Calcula la probabilidad:

- a) De sacar bola blanca.
b) De que se haya sacado la bola de la caja B sabiendo que es negra.

Solución:

- A = «Elegir la urna A»
- B = «Elegir la urna B»
- R = «Sacar bola roja»
- B = «Sacar bola blanca»
- N = «Sacar bola negra»



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

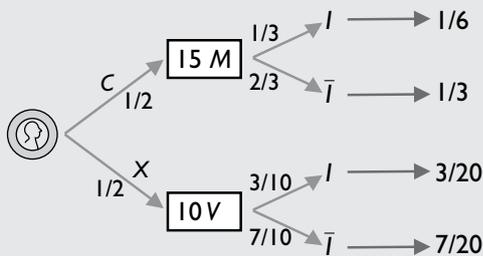
$$P(B/N) = \frac{\frac{7}{48}}{\frac{1}{4} + \frac{7}{48}} = \frac{7}{19}$$

59 El equipo directivo de cierta empresa del sector de hostelería está constituido por 25 personas, de las que un 60% son mujeres. El gerente tiene que seleccionar a una persona de dicho equipo para que represente a la empresa en un certamen internacional. Decide lanzar una moneda: si sale cara, selecciona a una mujer, y si sale cruz, a un hombre.

Sabiendo que 5 mujeres y 3 hombres del equipo directivo hablan inglés, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que la persona seleccionada hable inglés.

Solución:

- M = «Seleccionar mujer»
- V = «Seleccionar hombre»
- I = «Saber inglés»



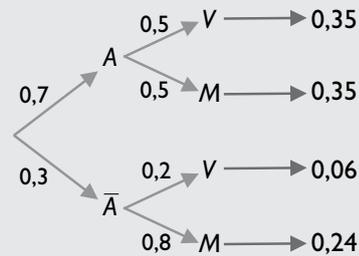
Se aplica la regla de la suma:

$$P(I) = \frac{1}{6} + \frac{3}{20} = \frac{19}{60}$$

- 60** En una oficina el 70% de los empleados son asturianos. De entre los asturianos, el 50% son hombres, mientras que de los no asturianos, solo son hombres el 20%.
- a) ¿Qué porcentaje de empleados no asturianos son mujeres?
 - b) Calcula la probabilidad de que un empleado de la oficina sea mujer.
 - c) Fernando trabaja en dicha oficina. ¿Cuál es la probabilidad de que sea asturiano?

Solución:

- A = «Ser asturiano»
- V = «Ser hombre»
- M = «Ser mujer»



- a) $P(M/A) = 0,8 \Rightarrow 80\%$
- b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:
 $P(M) = 0,35 + 0,24 = 0,59$
- c) Se utiliza el teorema de Bayes:

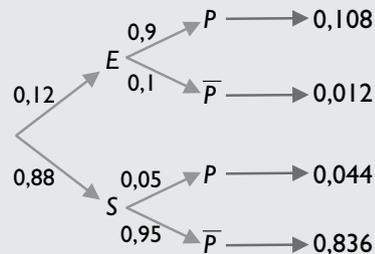
$$P(A/V) = \frac{0,035}{0,35 + 0,06} = 0,85$$

61 El 12% de los habitantes de un país padece cierta enfermedad. Para el diagnóstico de esta se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 90% de los casos de personas realmente enfermas, pero también da positivo en el 5% de personas sanas.

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que el procedimiento le ha dado positivo?

Solución:

- E = «Estar enfermo»
- S = «Estar sano»
- P = «Dar positivo»



Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{0,044}{0,108 + 0,044} = 0,29$$

Ejercicios y problemas propuestos

- 62** Un distribuidor de bolsas de plástico las vende en lotes de 100. El número de bolsas defectuosas en un lote tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,9	0,01	0,02	0,03	0,04

Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,90	0,00	0,00
1	0,01	0,01	0,01
2	0,02	0,04	0,08
3	0,03	0,09	0,27
4	0,04	0,16	0,64
Total	1,00	0,30	1,00

Media: 0,3 bolsas defectuosas.

Varianza: 0,91

Desviación típica: 0,95

- 63** Considera el experimento de lanzar dos dados de cuatro caras al aire. Sea x la variable aleatoria que representa el valor absoluto de la diferencia de los valores observados. Encuentra la función de probabilidad de x

Solución:

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2500	0,3750	0,2500	0,1250

- 64** Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,15	a	b	c	0,1

y se sabe que:

$$P(x < 4) = 0,65 \quad \text{y} \quad P(x > 2) = 0,6$$

Calcula:

- La media
- La desviación típica.

Solución:

Para calcular los parámetros se calcula previamente el valor de a , b y c :

$$\left. \begin{aligned} 0,15 + a + b &= 0,65 \\ b + c + 0,1 &= 0,6 \\ 0,15 + a + b + c + 0,1 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a = b = c = \frac{1}{4}$$

- Media = 2,9
- Desviación típica = 1,22

- 65** Se lanza 12 veces una moneda. Calcula:

- La probabilidad de obtener 5 caras.
- La esperanza matemática de que salga cara.
- La desviación típica.

Solución:

• $x \equiv$ Número de caras.

• $B(12; 0,5)$

$$\text{a) } P(x = 5) = \binom{12}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^7 = 0,1934$$

$$\text{b) } \mu = np = 12 \cdot 0,5 = 6$$

$$\text{c) } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 1,73$$

- 66** Se lanza un dado 5 veces. Calcula:

- La probabilidad de obtener tres cuatros.
- El número medio de cuatros obtenidos.
- La desviación típica.

Solución:

• $x \equiv$ Número de cuatros.

• $B(5; 1/6)$

$$\text{a) } P(x = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,0322$$

$$\text{b) } \mu = np = 5 \cdot \frac{1}{6} = 0,83$$

$$\text{c) } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 1/6 \cdot 5/6} = 0,83$$

- 67** Un determinado antibiótico produce efectos secundarios en el 25% de las personas que lo toman. Lo ingieren ocho personas. Calcula la probabilidad de que sufran efectos secundarios:

- A lo sumo dos personas.
- Más de dos personas.

Solución:

• $x \equiv$ Número de personas con efectos secundarios.

• $B(8; 0,25)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x \leq 2) &= \\ &= \binom{8}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^8 + \binom{8}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^7 + \binom{8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^6 = \\ &= 0,6785 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 0,3215$$

68 Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es $\frac{3}{7}$. Se lanza la moneda 10 veces. Calcula:

- La probabilidad de obtener cinco caras.
- La probabilidad de obtener a lo sumo dos caras.

Solución:

- $x \equiv$ Número de caras.
- $B(10; \frac{3}{7})$

a) $P(x = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^5 = 0,2220$

b) $P(x \leq 3) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^8 = 0,1255$

69 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea de densidad de una variable aleatoria, y calcula $P(3 \leq x \leq 4)$

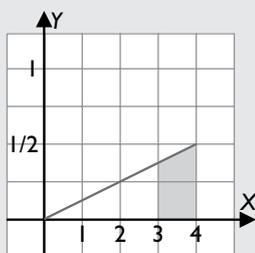
$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 4] \end{cases}$$

Solución:

- La función debe cumplir:
 - $f(x) \geq 0$ para todo valor del dominio.
 - El área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el dominio debe ser 1

$$\frac{4 \cdot 4k}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$

b) Se calcula el área del trapecio de la figura:



$$P(3 \leq x \leq 4) = \frac{1/2 + 3/8}{2} \cdot 1 = \frac{7}{16}$$

70 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea de densidad de una variable aleatoria, y calcula $P(2 \leq x \leq 3)$

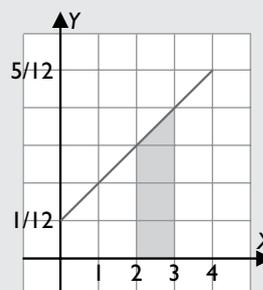
$$f(x) = \begin{cases} k(x + 1) & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 4] \end{cases}$$

Solución:

- La función debe cumplir:
 - $f(x) \geq 0$ para todo valor del dominio.
 - El área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el dominio debe ser 1

$$\frac{5k + k}{2} \cdot 4 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

b) Se calcula el área del trapecio de la figura:



$$P(2 \leq x \leq 3) = \frac{1/3 + 1/4}{2} \cdot 1 = \frac{7}{24}$$

71 En una distribución $N(0,1)$, calcula:

- $P(z \geq -1,75)$
- $P(z \leq -2,38)$
- $P(0,25 \leq z \leq 1,65)$
- $P(-2 \leq z \leq 2)$

Solución:

- $P(z \leq 1,75) = 0,9599$
- $1 - P(z \leq 2,38) = 0,0087$
- $P(z \leq 1,65) - P(z \leq 0,25) = 0,3518$
- $P(z \leq 2) - P(z \leq -2) = P(z \leq 2) - 1 + P(z \leq 2) = 2P(z \leq 2) - 1 = 0,9544$

72 En una distribución $N(18; 2,5)$, calcula:

- $P(x \geq 17)$
- $P(15 \leq x \leq 21)$

Solución:

- $P(x \geq 17) = P\left(z \geq \frac{17 - 18}{2,5}\right) = P(z \geq -0,4) = P(z \leq 0,4) = 0,6554$
- $P(15 \leq x \leq 21) = P\left(\frac{15 - 18}{2,5} \leq z \leq \frac{21 - 18}{2,5}\right) = P(-1,2 \leq z \leq 1,2) = P(z \leq 1,2) - P(z \leq -1,2) = P(z \leq 1,2) - 1 + P(z \leq 1,2) = 2P(z \leq 1,2) - 1 = 0,7698$

73 En una normal $N(0, 1)$, calcula el valor de k en los siguientes casos:

- $P(z \geq k) = 0,9066$
- $P(-k \leq z \leq k) = 0,8$

Solución:

- $k = -1,32$
- $P(-k \leq z \leq k) = P(z \leq k) - P(z \leq -k) = P(z \leq k) - 1 + P(z \leq k) = 2P(z \leq k) - 1$
 $2P(z \leq k) - 1 = 0,8 \Rightarrow P(z \leq k) = \frac{0,8 + 1}{2} = 0,9 \Rightarrow k = 1,28$

74 En una distribución $N(8; 1,5)$, calcula el valor de k en los siguientes casos:

- $P(x \geq k) = 0,05$
- $P(-k \leq x \leq k) = 0,99$

Solución:

$$a) P\left(z \geq \frac{k-8}{1,5}\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(z \leq \frac{k-8}{1,5}\right) = 0,95$$

$$\frac{k-8}{1,5} = 1,64 \Rightarrow k = 10,46$$

$$b) P(-k \leq x \leq k) \Rightarrow 2P(x \leq k) - 1 = 0,99 \Rightarrow \\ \Rightarrow P(x \leq k) = \frac{0,99 + 1}{2} = 0,995$$

$$\text{Tipificando: } \frac{k-8}{1,5} = 2,58 \Rightarrow k = 11,87$$

Problemas

75 Una caja contiene 7 tarjetas de la misma forma y tamaño: 4 de color amarillo y 3 de color rojo. Se extrae de ella al azar una tarjeta, se anota su color y, sin devolverla a la caja, extraemos de esta una segunda tarjeta. Se pide:

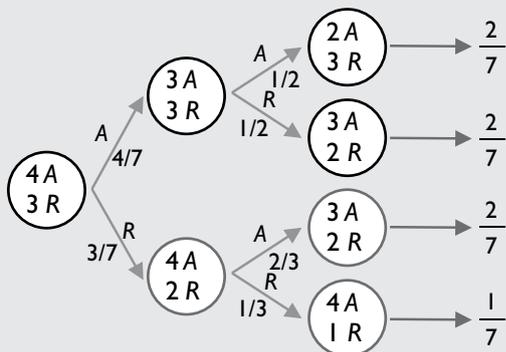
- El espacio muestral.
- La probabilidad de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral.

Solución:

A = «Sacar bola amarilla»

R = «Sacar bola roja»

$E = \{(A, A), (A, R), (R, A), (R, R)\}$



76 Se ha realizado un estudio entre 800 estudiantes, obteniéndose los datos siguientes: hay 440 mujeres de las cuales cursan estudios técnicos 300 y el resto estudian humanidades. De los 360 varones, 200 cursan estudios técnicos y 160 humanidades. Se selecciona al azar un alumno. Se pide:

- La probabilidad de que estudie humanidades si se sabe que es varón.
- La probabilidad de que la persona elegida sea mujer si se sabe que realiza estudios técnicos.
- ¿Son independientes los sucesos ser varón y estudiar humanidades?

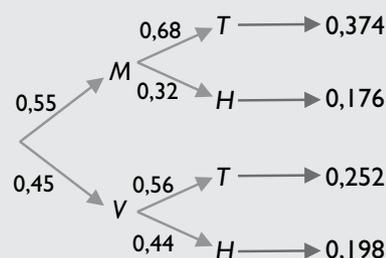
Solución:

M = «Ser mujer»

V = «Ser varón»

T = «Realizar estudios técnicos»

H = «Realizar estudios de humanidades»



$$a) P(H|V) = 0,44$$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(M|T) = \frac{0,374}{0,374 + 0,252} = 0,6$$

$$c) P(V) = 0,45$$

$$P(H) = 0,374$$

$$P(V) \cdot P(H) = 0,168$$

$$P(V \cap H) = 0,198 \Rightarrow P(V \cap H) \neq P(V) \cdot P(H)$$

Son dependientes.

77 En una asesoría fiscal se ha contratado a tres personas para hacer declaraciones de renta. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%, la segunda el 45% y la tercera el 25% restante. Se ha comprobado que de las declaraciones realizadas por la primera persona, el 1% son erróneas, la segunda comete errores en el 3% de los casos y la tercera en el 2% de los casos.

- Calcula la probabilidad de que al elegir al azar una declaración de la renta, esta sea errónea.
- Al elegir una declaración que resultó correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?

Solución:

A = «Estar realizada por la primera persona»

B = «Estar realizada por la segunda persona»

C = «Estar realizada por la tercera persona»

E = «Declaración errónea»



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(E) = 0,003 + 0,0135 + 0,005 = 0,0215$$

b) Se utiliza el teorema de Bayes:

$$P(B|\bar{E}) = \frac{0,4365}{0,297 + 0,4365 + 0,245} = 0,45$$

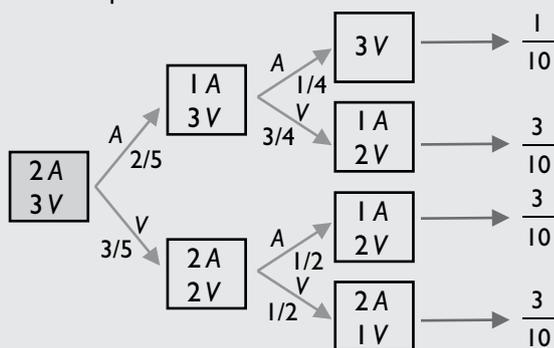
78 Un estuche contiene 5 lápices de igual forma y tamaño: 2 de color azul y 3 de color verde. Se extrae un lápiz del estuche y, a continuación, sin devolución, se extrae otro lápiz.

- Escribe los sucesos elementales que definen los sucesos $M = \text{«Solo ha salido un lápiz de color verde»}$ y $N = \text{«El segundo lápiz extraído es de color azul»}$.
- Calcula las probabilidades de los sucesos M , N y de $M \cap N$.
- Estudia la independencia de los sucesos M y N . Razona la respuesta.

Solución:

$A = \text{«Sacar lápiz de color azul»}$

$V = \text{«Sacar lápiz de color verde»}$



a) $M = (A \cap V) \cup (V \cap A)$

$$N = (A \cap A) \cup (V \cap A)$$

b) $P(M) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$

$$P(N) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

$$M \cap N = (V \cap A)$$

$$P(M \cap N) = \frac{3}{10}$$

c) $P(M) \cdot P(N) = \frac{6}{25}$

$$P(M \cap N) \neq P(M) \cdot P(N) \Rightarrow \text{Son dependientes.}$$

79 En un quiosco ganan 150 € diarios si no llueve, y si llueve pierden 20 € al día. Si la probabilidad de lluvia es 0,3, ¿cuál es la ganancia esperada ese día?

Solución:

$$\mu = 150 \cdot 0,7 - 20 \cdot 0,3 = 99 \text{ €}$$

80 Una variable aleatoria x toma los valores 1, 2, 3, 4 y 5, y las probabilidades que toma cada valor son $P(x = x_i) = k \cdot x_i$, siendo k un número real. Calcula:

- El valor de k
- $P(x < 4)$

Solución:

a) $k + 2k + 3k + 4k + 5k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{15}$

b) $P(x < 4) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

81 En un juego con una baraja española con 40 cartas, una persona recibe 15 céntimos de euro cuando saca una sota o un caballo, y 5 céntimos de euro si saca un rey o un as. Si saca cualquier otra carta, tiene que pagar 4 céntimos de euro. ¿Cuál es la ganancia esperada para una persona que entra en el juego?

Solución:

$$\mu = 15 \cdot \frac{8}{40} + 5 \cdot \frac{8}{40} - 4 \cdot \frac{24}{40} = \frac{8}{5} = 1,6$$

82 Un tratamiento contra la hipertensión arterial produce una mejoría en el 75% de los casos. Se administra el tratamiento a cinco pacientes. Calcula:

- La probabilidad de que los 5 pacientes mejoren.
- La probabilidad de que 3 pacientes no obtengan mejoría.

Solución:

• $x \equiv$ Número de pacientes que mejoran.

• $B(5; 0,75)$

a) $P(x = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,75^5 = 0,2373$

b) $P(x = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 = 0,0879$

83 La probabilidad de que el proceso en el horno de secado de pinturas para coches sea defectuoso es del 2%. Se han secado 100 coches. Calcula:

- El número medio de secados defectuosos.
- La desviación típica.

Solución:

• $x \equiv$ Número de secados defectuosos.

• $B(100; 0,02)$

a) $\mu = np = 100 \cdot 0,02 = 2$

b) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = 1,4$

84 De una baraja española se extraen 12 cartas con devolución. Calcula:

- La probabilidad de obtener a lo sumo dos reyes.
- El número medio de reyes.

Solución:

• $x \equiv$ Número de reyes.

• $B(12; 0,1)$

a) $P(x \leq 2) =$

$$= \binom{12}{0} \cdot 0,9^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{10} =$$

$$= 0,8891$$

b) $\mu = np = 12 \cdot 0,1 = 1,2$

85 Un test de inteligencia está compuesto de 80 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas de las que solo una es correcta. Se contesta aleatoriamente. Halla la media, la varianza y la desviación típica del número de preguntas acertadas.

Solución:

• $x \equiv$ Número de respuestas acertadas.

• $B(80; 0,25)$

a) $\mu = np = 80 \cdot 0,25 = 20$

b) $V = npq = 80 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 15$

c) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{15} = 3,87$

86 La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a 12 m de distancia es 0,4. Realiza 5 lanzamientos. Calcula:

- La probabilidad de obtener 5 hoyos.
- La probabilidad de obtener a lo sumo 2 hoyos.
- El número medio de hoyos.
- La desviación típica.

Solución:

• $x \equiv$ Número de hoyos.

• $B(5; 0,4)$

a) $P(x = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,4^5 = 0,0102$

b) $P(x \leq 2) =$

$$= \binom{5}{5} \cdot 0,4^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 =$$

$$= 0,6826$$

c) $\mu = np = 5 \cdot 0,4 = 2$

d) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,1$

87 La duración de cierto tipo de batería sigue una distribución normal de media 3 años, con una desviación típica de 0,5 años.

- ¿Qué porcentaje de baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?
- Si una batería lleva funcionando 3 años, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 4,5 años?

Solución:

• $x \equiv$ Número de años.

• $N(3; 0,5)$

a) $P(2 \leq x \leq 4) =$

$$= P\left(\frac{2-3}{0,5} \leq z \leq \frac{4-3}{0,5}\right) =$$

$$= P(-2 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq -2) =$$

$$= P(z \leq 2) - 1 + P(z \leq 2) =$$

$$= 2P(z \leq 2) - 1 = 0,9544 = 95,44\%$$

b) $P(3 \leq x \leq 4,5) =$

$$= P\left(\frac{3-3}{0,5} \leq z \leq \frac{4,5-3}{0,5}\right) =$$

$$= P(0 \leq z \leq 3) = P(z \leq 3) - P(z \leq 0) = 0,4987$$

88 El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 10 km está normalmente distribuido con una media de 60 minutos y una desviación típica de 9 minutos.

- Calcula la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos.
- Calcula la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 55 minutos o más de 65 minutos.
- En una fiesta de animación al deporte participan 500 personas sanas. Calcula cuántas de ellas invertirán entre 50 y 60 minutos en hacer el recorrido.

Solución:

• $x \equiv$ Tiempo en minutos que se invierte.

• $N(60; 9)$

a) $P(x \leq 50) = P\left(z \leq \frac{50-60}{9}\right) = P(z \leq -1,11) =$

$$= 1 - P(z \leq 1,11) = 0,1335$$

b) $P(x \leq 55) + P(x \geq 65) =$

$$P\left(z \leq \frac{55-60}{9}\right) + P\left(z \leq \frac{65-60}{9}\right) =$$

$$= P(z \leq -0,56) + P(z \geq 0,56) =$$

$$= 1 - P(z \leq 0,56) + 1 - P(z \leq 0,56) =$$

$$= 2 - 2P(z \leq 0,56) = 0,5754$$

c) $500 \cdot P(50 \leq x \leq 60) =$

$$= 500 \cdot P\left(\frac{50-60}{9} \leq z \leq \frac{60-60}{9}\right) =$$

$$= 500 \cdot P(-1,11 \leq z \leq 0) =$$

$$= 500 \cdot [P(z \leq 0) - P(z \leq -1,11)] =$$

$$= 500 \cdot [P(z \leq 0) - 1 + P(z \leq 1,11)] =$$

$$= 500 \cdot 0,3665 = 183,25 \approx 183 \text{ personas.}$$

- 89** El número de libros prestados semanalmente en la biblioteca de un centro escolar sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 1,5. Calcula la probabilidad de que en una semana se presten entre 25 y 30 libros.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de libros prestados semanalmente.

b) $N(25; 1,5)$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(25 \leq x \leq 30) &= P\left(\frac{25-25}{1,5} \leq z \leq \frac{30-25}{1,5}\right) = \\ &= P(0 \leq z \leq 3,33) = P(z \leq 3,33) - P(z \leq 0) = \\ &= 0,9996 - 0,5 = 0,4996 \end{aligned}$$

- 90** En un estudio realizado por una empresa hotelera, la distribución del tiempo de estancia del viajero en el hotel fue normal, con una media de 3,7 días y una desviación típica de 1,1 días.

a) ¿Qué probabilidad habrá de que un viajero permanezca en el hotel entre 2 y 5 días?

b) De 500 viajeros, ¿cuántos habrán permanecido entre 4 y 7 días?

Solución:

• $x \equiv$ Días de estancia.

• $N(3,7; 1,1)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(2 \leq x \leq 5) &= P\left(\frac{2-3,7}{1,1} \leq z \leq \frac{5-3,7}{1,1}\right) = \\ &= P(-1,55 \leq z \leq 1,18) = \\ &= P(z \leq 1,18) - P(z \leq -1,55) = \\ &= P(z \leq 1,18) - 1 + P(z \leq 1,55) = 0,8204 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 500 \cdot P(4 \leq x \leq 7) &= \\ &= P\left(\frac{4-3,7}{1,1} \leq z \leq \frac{7-3,7}{1,1}\right) = \\ &= 500 \cdot P(0,27 \leq z \leq 3) = \\ &= 500 \cdot [P(z \leq 3) - P(z \leq 0,27)] = \\ &= 500 \cdot 0,3923 = 196,15 \approx 196 \text{ personas.} \end{aligned}$$

- 91** La edad de una población se ajusta a una normal de media 27 años y una desviación estándar de 1,8 años. Si se toman aleatoriamente 230 personas, ¿cuántas estarán comprendidas entre los 25 y los 30 años?

Solución:

a) $x \equiv$ Años de edad.

b) $N(27; 1,8)$

$$\begin{aligned} \text{c) } 230 \cdot P(25 \leq x \leq 30) &= \\ &= 230 \cdot P\left(\frac{25-27}{1,8} \leq z \leq \frac{30-27}{1,8}\right) = \\ &= 230 \cdot P(-1,11 \leq z \leq 1,67) = \\ &= 230 [P(z \leq 1,67) - P(z \leq -1,11)] = \\ &= 230 [P(z \leq 1,67) - 1 + P(z \leq 1,11)] = \\ &= 230 \cdot 0,819 = 188,37 \approx 188 \text{ personas.} \end{aligned}$$

Para profundizar

- 92** El estudio de un cuestionario sobre el grado de satisfacción de los usuarios de servicios públicos revela que la satisfacción sigue una distribución normal, con una nota media de 5,7 puntos y con una desviación típica de 0,5 puntos.

a) Calcula la probabilidad de que la calificación de un usuario esté entre 6 y 7 puntos.

b) De 1000 usuarios, ¿cuántos habrán otorgado una nota entre 4 y 6 puntos?

Solución:

• $x \equiv$ Nota de satisfacción.

• $N(5,7; 0,5)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(6 \leq x \leq 7) &= P\left(\frac{6-5,7}{0,5} \leq z \leq \frac{7-5,7}{0,5}\right) = \\ &= P(0,6 \leq z \leq 2,6) = P(z \leq 2,6) - P(z \leq 0,6) = 0,2696 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1000 \cdot P(4 \leq x \leq 6) &= \\ &= 1000 \cdot P\left(\frac{4-5,7}{0,5} \leq z \leq \frac{6-5,7}{0,5}\right) = \\ &= 1000 \cdot P(-3,4 \leq z \leq 0,6) = \\ &= 1000 [P(z \leq 0,6) - P(z \leq -3,4)] = \\ &= 1000 [P(z \leq 0,6) - 1 + P(z \leq 3,4)] = \\ &= 1000 \cdot 0,7254 = 725,4 \approx 725 \text{ personas.} \end{aligned}$$

- 93** El tiempo T requerido para completar una solicitud de asistencia económica tiene una distribución normal de media 45 minutos y desviación estándar de 5 minutos. Encuentra la probabilidad de que una persona rellene la instancia:

a) En menos de 40 minutos.

b) En 35 a 55 minutos.

Solución:

• $x \equiv$ Tiempo en minutos.

• $N(45; 5)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x \leq 40) &= P\left(z \leq \frac{40-45}{5}\right) = P(z \leq -1) = \\ &= 1 - P(z \leq 1) = 0,1587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(35 \leq x \leq 55) &= P\left(\frac{35-45}{5} \leq z \leq \frac{55-45}{5}\right) = \\ &= P(-2 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq -2) = \\ &= P(z \leq 2) - 1 + P(z \leq 2) = 2P(z \leq 2) - 1 = 0,9544 \end{aligned}$$

- 94** Un atleta de tiro con arco da en el centro de la diana el 60% de los lanzamientos. Se supone que todos los tiros son en las mismas condiciones. Calcula la probabilidad de que en 50 lanzamientos acierte al menos en 30 ocasiones.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de dianas.

b) $B(50; 0,6)$

c) $P(x \geq 30)$

- Se decide si se puede normalizar:

$$np = 50 \cdot 0,6 = 30 > 5$$

$$nq = 50 \cdot 0,4 = 20 > 5$$

Se puede ajustar a una normal.

- Se normaliza:

$$\mu = np = 50 \cdot 0,6 = 30$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 3,46$$

$$B(50; 0,6) \Rightarrow N(30; 3,46)$$

- Se corrige la continuidad y se tipifica:

$$P(x \geq 30) \Rightarrow P(x \geq 29,5) = P\left(z \geq \frac{29,5 - 30}{3,46}\right) =$$

$$= P(z \geq -0,14) = P(z \leq 0,14) = 0,5557$$

- 95** Los paquetes recibidos en un almacén se ajustan a una distribución normal de media 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de esos paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8 200 kg?

Solución:

a) $x \equiv$ Peso en kilos del paquete.

b) $N(300; 50)$

c) $8\,200 < 25 \cdot x \Rightarrow x > 328 \text{ kg}$

$$P(x \geq 328,5) = P\left(z \geq \frac{328,5 - 300}{50}\right)$$

$$= P(z \geq 0,57) = 1 - P(z \leq 0,57) = 0,2843$$

- 96** La frecuencia cardíaca de los varones fumadores es una variable aleatoria que se ajusta a una normal de media 70 lpm (latidos por minuto).

Calcula:

a) La desviación típica, sabiendo que la probabilidad de que un varón fumador tenga más de 80 lpm es de 0,0228

b) Si se mide el ritmo cardíaco a 400 varones, ¿cuántos tendrán entre 60 y 70 lpm?

Solución:

- $x \equiv$ Número de latidos por minuto.

- $B(70; \sigma)$

a) $P(x \geq 80) = 0,0228$

$$P(x \geq 80) = 1 - P(x \leq 80) = 0,0228 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x \leq 80) = 0,9772$$

Tipificando:

$$P\left(z \leq \frac{80 - 70}{\sigma}\right) = 0,9772$$

$$\frac{80 - 70}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = 5$$

b) $400 \cdot P(60 \leq x \leq 70) = 400 \cdot P(-2 \leq z \leq 0) =$

$$= 400[P(z \leq 0) - 1 + P(z \leq 2)] = 400 \cdot 0,4772 =$$

$$= 190,88 \approx 191 \text{ personas.}$$

Practica

100 Utilizando la hoja correspondiente, calcula las siguientes probabilidades y los parámetros correspondientes:

- a) En una $B(5; 0,4)$, $P(x = 3)$
- b) En una $B(7; 0,1)$, $P(x \leq 5)$
- c) En una $B(20; 0,3)$, $P(x = 10)$
- d) En una $B(15; 0,7)$, $P(x = 14)$
- e) En una $B(22; 0,6)$, $P(x \leq 9)$
- f) En una $B(50; 0,5)$, $P(x \leq 25)$

Solución:

- a) $P(x = 3) = 0,2304$
 $\mu = 2$
 $\sigma = 1,1$
- b) $P(x \leq 5) = 0,9999$
 $\mu = 0,7$
 $\sigma = 0,79$
- c) $P(x = 10) = 0,0308$
 $\mu = 6$
 $\sigma = 2,05$
- d) $P(x = 14) = 0,0305$
 $\mu = 10,5$
 $\sigma = 1,77$
- e) $P(x \leq 9) = 0,0551$
 $\mu = 13,2$
 $\sigma = 2,3$
- f) $P(x \leq 25) = 0,5561$
 $\mu = 25$
 $\sigma = 3,54$

101 Utilizando la hoja correspondiente, resuelve el siguiente problema:

Un test de inteligencia está compuesto de 80 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas de las que solo una es correcta. Si se contesta aleatoriamente, halla la media, la varianza y la desviación típica del número de preguntas acertadas.

Solución:

- a) $x \equiv$ Número de respuestas acertadas.
- b) $B(80; 0,25)$
- c) $\mu = 20$
 $V = 15$
 $\sigma = 3,87$

102 Utilizando la hoja correspondiente, calcula en una $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

- a) $P(z \leq 0,5)$
- b) $P(z \leq 1,72)$
- c) $P(z \geq 2,4)$
- d) $P(z \leq -3,56)$

Solución:

- a) 0,6915
- b) 0,9573
- c) 0,0082
- d) 0,0002

103 Utilizando la hoja correspondiente, calcula en una $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

- a) $P(1,5 \leq z \leq 2)$
- b) $P(-2,3 \leq z \leq 3,7)$
- c) $P(-3,4 \leq z \leq -1,8)$
- d) $P(-1,6 \leq z \leq 1,6)$

Solución:

- a) 0,0441
- b) 0,9892
- c) 0,0356
- d) 0,8904

104 Utilizando la hoja correspondiente, calcula en una $N(20, 4)$ las siguientes probabilidades:

- a) $P(x \leq 25)$
- b) $P(x \geq 17)$
- c) $P(23 \leq x \leq 27)$
- d) $P(15 \leq x \leq 18)$

Solución:

- a) 0,8944
- b) 0,7734
- c) 0,1866
- d) 0,2029

105 El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media 3,5 kg y una desviación típica de 0,6 kg. Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2,7 y 4 kg

Solución:

- a) $x \equiv$ Peso de un recién nacido.
- b) $N(3,5; 0,6)$
- c) $P(2,7 \leq x \leq 4) = 0,7065$

106 El número de libros prestados semanalmente en la biblioteca de un centro escolar sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 1,5. Calcula la probabilidad de que en una semana se presten entre 25 y 30 libros.

Solución:

- a) $x \equiv$ Número de libros prestados semanalmente.
- b) $N(25; 1,5)$
- c) $P(25 \leq x \leq 30) = 0,4996$

Ponte a prueba

1 En una distribución binomial $B(10, 3/4)$ calcula $P(x = 6)$

Solución:

$$P(x = 6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0,1460$$

2 En una distribución binomial $B(20, 2/5)$ calcula $P(x = 7)$

Solución:

$$P(x = 7) = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{13} = 0,1659$$

3 En una distribución binomial $B(75, 3/5)$ halla los parámetros.

Solución:

$$\text{Media: } \mu = n \cdot p \Rightarrow \mu = 75 \cdot \frac{3}{5} = 45$$

$$\text{Varianza: } V = n \cdot p \cdot q \Rightarrow V = 75 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = 18$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = \sqrt{18} = 4,24$$

4 Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso, ¿cuánto valen la media, la varianza y la desviación típica del número de preguntas acertadas?

Solución:

$$\text{Media: } \mu = n \cdot p \Rightarrow \mu = 8 \cdot 0,5 = 4$$

$$\text{Varianza: } V = n \cdot p \cdot q \Rightarrow V = 8 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 2$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = \sqrt{2} = 1,41$$

5 En una población en la que hay un 40% de hombres y un 60% de mujeres seleccionamos 4 individuos

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 hombres y 2 mujeres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más mujeres que hombres?

Solución:

X = Número de hombres

$$X = B(4; 0,4)$$

$$\text{a) } P(x = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 = 0,3456$$

$$\text{b) } P(x < 2) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0,4752$$

6 En una distribución $N(0, 1)$ calcula:

a) $P(z \leq 1,38)$

b) $P(z \geq 1,38)$

c) $P(z \leq -1,38)$

d) $P(z \geq -1,38)$

e) $P(-1,38 \leq z \leq 1,38)$

Solución:

a) $P(z \leq 1,38) = 0,9162$

b) $P(z \geq 1,38) = 1 - P(z \leq 1,38) = 1 - 0,9162 = 0,0838$

c) $P(z \leq -1,38) = P(z \geq 1,38) = 1 - P(z \leq 1,38) = 1 - 0,9162 = 0,0838$

d) $P(z \geq -1,38) = P(z \leq 1,38) = 0,9162$

e) $P(-1,38 \leq z \leq 1,38) = P(z \leq 1,38) - P(z \leq -1,38) = P(z \leq 1,38) - P(z \geq 1,38) = P(z \leq 1,38) - (1 - P(z \leq 1,38)) = P(z \leq 1,38) - 1 + P(z \leq 1,38) = 2P(z \leq 1,38) - 1 = 2 \cdot 0,9162 - 1 = 1,8324 - 1 = 0,8324$

7 Un pescador tiene tres tipos de carnada de las cuales solo una es la adecuada para pescar salmón. Si utiliza la carnada correcta, la probabilidad de que pesque un salmón es $1/3$, mientras que si usa una de las inadecuadas esa probabilidad se reduce a $1/5$.

a) Se elige aleatoriamente una carnada. ¿Cuál es la probabilidad de que pesque un salmón?

b) Si ha pescado un salmón, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho con la carnada adecuada?

Solución:

Sean:

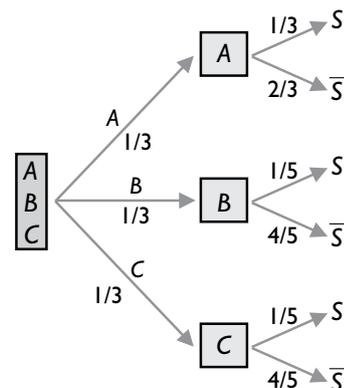
A = «Carnada 1 adecuada»

B = «Carnada 2»

C = «Carnada 3»

S = «Pescar salmón»

\bar{S} = «No pescar salmón»



a) $P(S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{45} = 0,24$

b) $P(A/S) = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C)} = \frac{1/3 \cdot 1/3}{11/45} = \frac{5}{11} = 0,45$

8 En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del centro A, 70 alumnos del centro B y 50 alumnos del centro C. La prueba ha sido superada por el 80% de los alumnos del centro A, el 90% de los del centro B y el 82% de los del centro C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

Ponte a prueba

- b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba.
¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca al centro B?

Solución:

Sean:

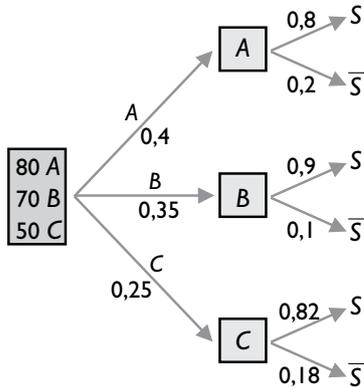
A = «Centro A»

B = «Centro B»

C = «Centro C»

S = «Supera la prueba»

\bar{S} = «No supera la prueba»



$$a) P(S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,35 \cdot 0,9 + 0,25 \cdot 0,82 = 0,84$$

$$b) P(B/\bar{S}) = \frac{P(B) \cdot P(\bar{S}/B)}{P(A) \cdot P(\bar{S}/A) + P(B) \cdot P(\bar{S}/B) + P(C) \cdot P(\bar{S}/C)} = \frac{0,035}{0,16} = 0,218 = 0,2$$

- 9 En una localidad el 35% de la población tiene menos de 15 años. Si se elige una muestra aleatoria de la población formada por 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo haya dos individuos con edad inferior a 15 años?

Solución:

x = número de personas menores de 15 años.

$x \equiv B(10; 0,35)$

$$P(x \leq 2) = \binom{10}{0} \cdot 0,35^0 \cdot 0,65^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,35 \cdot 0,65^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^8 = 0,2616$$

- 10 Un examen consta de 6 preguntas con 4 posibles respuestas cada una, de las que solo una de ellas es correcta. Un estudiante responde completamente al azar marcando una respuesta de forma aleatoria. Calcula la probabilidad de que acierte 4 o más preguntas.

Solución:

x = número de aciertos.

$x \equiv B(6; 0,25)$

$$P(x \geq 4) = \binom{6}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^2 + \binom{6}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75 + \binom{6}{6} \cdot 0,25^6 = 0,0376$$

- 11 La probabilidad de que un tirador de arco novato acierte en la diana es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que acierte al menos 3 veces.

Solución:

x = número de dianas.

$x \equiv B(5; 0,4)$

$$P(x \geq 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6 + \binom{5}{5} \cdot 0,4^5 = 0,3174$$

- 12 Las calificaciones en un examen siguen una distribución normal de media 5,6 puntos y desviación típica 0,8 puntos.

- a) ¿Qué proporción de alumnos tendrá puntuaciones inferiores o iguales a 4?
b) ¿Qué proporción de alumnos aprobará?
c) ¿Qué proporción de alumnos obtendrá Notable o Sobresaliente?

Solución:

X = calificación del examen.

$X \equiv N(5,6; 0,8)$

$$a) P(x \leq 4) = P\left(z \leq \frac{4 - 5,6}{0,8}\right) = P(z \leq -2) = 1 - P(z \leq 2) = 0,0228$$

$$b) P(x \geq 5) = P\left(z \geq \frac{5 - 5,6}{0,8}\right) = P(z \geq -0,75) = P(z \leq 0,75) = 0,7734$$

$$c) P(x \geq 7) = P\left(z \geq \frac{7 - 5,6}{0,8}\right) = P(z \geq 1,75) = 1 - P(z \leq 1,75) = 0,0401$$

- 13 Un examen de tipo test consta de 100 preguntas, cada una de las cuales se acompaña de cuatro respuestas, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 30 preguntas? ¿Y menos de 15?

Solución:

x = número de aciertos.

$B(100; 0,25)$

Se aproxima por una normal.

$$\mu = n \cdot p \Rightarrow \mu = 100 \cdot 0,25 = 25; \sigma = \sqrt{npq} \Rightarrow \sigma = \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 4,33 \Rightarrow N(25; 4,33)$$

$$P(x > 30) = P(x' \geq 29,5) = P\left(z \geq \frac{29,5 - 25}{4,33}\right) = P(z \geq 1,04) = 1 - P(z \leq 1,04) = 1 - 0,8508 = 0,1492$$

- 14 Una empresa conservera enlata alimentos y el peso medio de las latas de conserva sigue una distribución normal de media 400 g y desviación típica de 10 g. Calcula:

- a) La probabilidad de que una lata pese menos de 380 g
b) La probabilidad de que una lata pese entre 385 g y 410 g

Solución:

X = peso de una lata.

$$X \equiv N(400, 10)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x \leq 380) &= P\left(z \leq \frac{380 - 400}{10}\right) = P(z \leq -2) = \\ &= 1 - P(z \leq 2) = 0,0228 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(385 \leq x \leq 410) &= P\left(\frac{385 - 400}{10} \leq z \leq \frac{410 - 400}{10}\right) = \\ &= P(-1,5 \leq z \leq 1) = P(z \leq 1) - (1 - P(z \leq 1,5)) = \\ &= 0,8413 - (1 - 0,9332) = 0,7745 \end{aligned}$$

- 15** El coeficiente de inteligencia de un grupo de 500 alumnos es una variable aleatoria que se distribuye como una normal de media 100 y desviación típica 16. Determina el número esperado de alumnos que tienen un coeficiente entre 118 y 122

Solución:

X = coeficiente de inteligencia.

$$X \equiv N(100, 16)$$

$$\begin{aligned} P(118 \leq x \leq 122) &= P\left(\frac{118 - 100}{16} \leq z \leq \frac{122 - 100}{16}\right) = \\ &= P(1,125 \leq z \leq 1,375) = P(z \leq 1,375) - P(z \leq 1,125) = \\ &= 0,9154 - 0,8697 = 0,0457 \end{aligned}$$

El número esperado es $500 \cdot 0,0457 = 22,85 = 23$ alumnos

- 16** Supongamos una distribución normal de media 40 en la que la probabilidad de obtener un valor por encima de 45 es 0,2061. ¿Cuál es la desviación típica?

Solución:

$$x \equiv N(40, \sigma)$$

$$P(x \geq 45) = 0,2061$$

$$P(x \geq 45) = 1 - P(x \leq 45) = 1 - P\left(z \leq \frac{45 - 40}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - P\left(z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0,2061$$

$$P\left(z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - 0,2061 = 0,7939 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 0,82 \Rightarrow \sigma = 6,1$$

- 17** En una localidad la estatura de sus habitantes sigue una distribución normal de media 1,75 m. Los individuos que miden más de 1,90 representan el 6,68% del total. ¿Cuál es la desviación típica? ¿Cuál es la proporción de individuos con estatura superior a 1,60 m?

Solución:

$$x \equiv N(1,75; \sigma)$$

$$P(x \geq 1,90) = 0,0668$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x \geq 1,90) &= 1 - P(x \leq 1,90) = 1 - P\left(z \leq \frac{1,90 - 1,75}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - P\left(z \leq \frac{0,15}{\sigma}\right) = 0,0668 \end{aligned}$$

$$P\left(z \leq \frac{0,15}{\sigma}\right) = 1 - 0,0668 = 0,9332 \Rightarrow \frac{0,15}{\sigma} = 1,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = 0,1$$

$$\text{b) } P(x \geq 1,60) = P\left(z \geq \frac{1,60 - 1,75}{0,1}\right) =$$

$$= P(z \geq -1,5) = P(z \leq 1,5) = 0,9332$$

- 18** El 15% de los habitantes de una determinada comarca son hipertensos. Se toma una muestra de 600 de esos habitantes y se pide:

- Número esperado de habitantes que no son hipertensos.
- Probabilidad de que el número de hipertensos sea mayor que 80.
- Probabilidad de que el número de hipertensos esté entre 80 y 110.

Solución:

x = número de habitantes hipertensos.

$$B(600; 0,15)$$

Se aproxima por una normal.

$$\mu = n \cdot p \Rightarrow \mu = 600 \cdot 0,15 = 90; \sigma = \sqrt{npq} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{600 \cdot 0,15 \cdot 0,85} = 8,746 \Rightarrow N(90; 8,75)$$

- a) El número esperado de habitantes que no son hipertensos = $600 - 90 = 510$

$$\text{b) } P(x > 80) = P(x' \geq 79,5) = P\left(z \geq \frac{79,5 - 90}{8,75}\right) =$$

$$= P(z \geq -1,2) = P(z \leq 1,2) = 0,8849$$

$$\text{c) } P(80 \leq x \leq 110) = P(79,5 \leq x \leq 110,5) =$$

$$= P\left(\frac{79,5 - 90}{8,75} \leq z \leq \frac{110,5 - 90}{8,75}\right) =$$

$$= P(-1,2 \leq z \leq 2,34) = P(z \leq 2,34) - 1 + P(z \leq 1,2) =$$

$$= 0,9904 - 1 + 0,8849 = 0,8753$$

