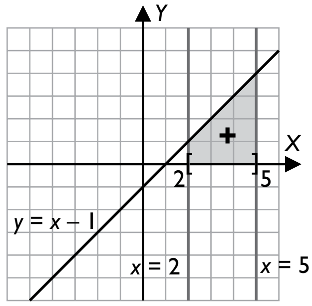
Unidad 14.
Integral definida

1. Integral definida

Piensa y calcula

Halla, contando, el área de la figura que tiene un signo + dentro. Cada cuadradito es una unidad cuadrada.

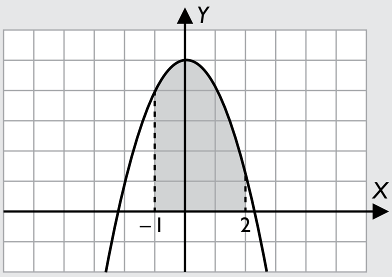


Solución:
Tiene exactamente 7,5 u^2

Aplica la teoría

1 Calcula $\int_{-1}^{2} (5 - x^2)\, dx$

Solución:



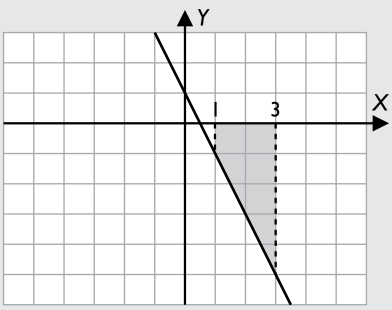
a) $F(x) = 5x - \dfrac{x^3}{3}$

b) $F(-1) = -\dfrac{14}{3}$, $F(2) = \dfrac{22}{3}$

c) $\int_{-1}^{2} (5 - x^2)\, dx = 12$ u^2

2 Calcula $\int_{1}^{3} (-2x + 1)\, dx$

Solución:



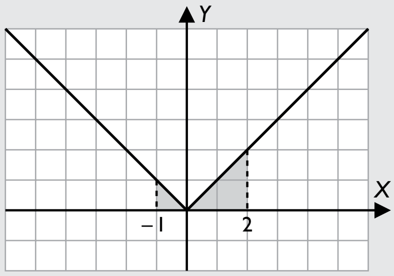
a) $F(x) = x - x^2$

b) $F(1) = 0$, $F(3) = -6$

c) $\int_{1}^{3} (5 - x^2)\, dx = -6$ u^2

3 Siendo $|x|$ el valor absoluto o módulo de x, calcula la integral definida $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

Solución:



a) $\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx$

Sea $F(x) = \int (-x)\, dx$

$F(x) = -\dfrac{x^2}{2}$

$F(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $F(0) = 0$

$\int_{-1}^{0} (-x)\, dx = \dfrac{1}{2}$ u^2

$G(x) = \int x\, dx$

$G(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$G(0) = 0$, $G(2) = 2$

$\displaystyle\int_0^2 x\,dx = 2\ \text{u}^2$

$\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 (-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{u}^2$

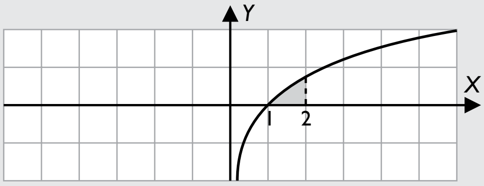
4 Calcula la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{3x}^{x^2} \cos t\,dt$

Solución:

$F'(x) = 2x \cos x^2 - 3 \cos 3x$

5 Calcula $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$

Solución:



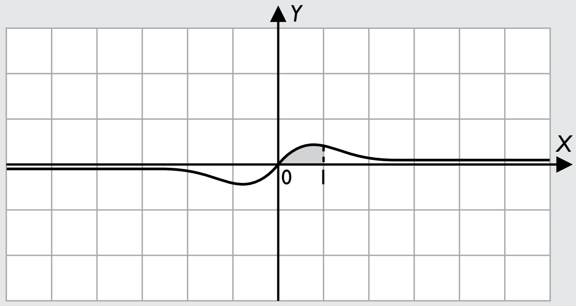
a) $F(x) = x(\ln|x| - 1)$

b) $F(1) = -1$, $F(2) = 2(\ln 2 - 1)$

c) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1 = 0{,}39$ u

6 Calcula el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^{x^2}}$

Solución:



a) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\, e^{-x^2}$

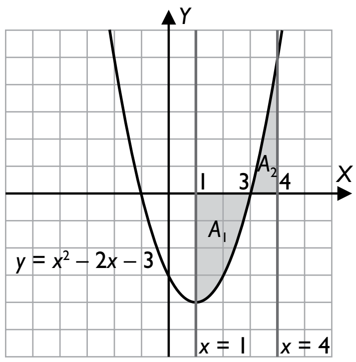
b) $F(0) = -\dfrac{1}{2}$, $F(1) = -\dfrac{1}{2}\, e^{-1}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^{x^2}} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) = 0{,}32\ \text{u}^2$

2. Cálculo de áreas

Piensa y calcula

Halla por aproximación el área de las dos regiones, la amarilla y la verde, del dibujo. Cada cuadradito es una unidad cuadrada.



Solución:

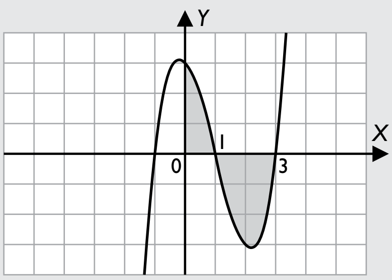
La amarilla, 5 u^2 aproximadamente, y la verde 2 u^2 aproximadamente.

En total, unas 7 unidades cuadradas.

Aplica la teoría

7 Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$

$\displaystyle\int (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$

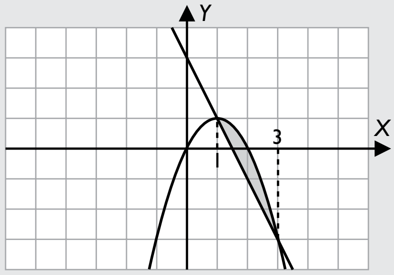
$\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx = \frac{7}{4}\ \text{u}^2$

$\displaystyle\int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx = -4\ \text{u}^2$

Área $= \dfrac{23}{4} = 5{,}75\ \text{u}^2$

8 Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3 - 2x$ y la parábola $y = 2x - x^2$

Solución:



Raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

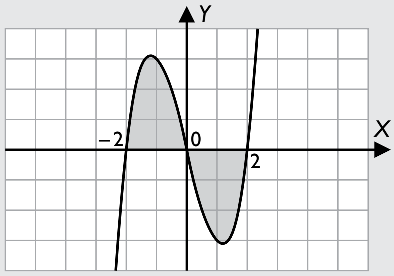
$$\int (-x^2 + 4x - 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \frac{4}{3}\ u^2$$

Área $= \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2$

9 Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de $y = x^3 - 4x$ y el eje X

Solución:



Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

$$\int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

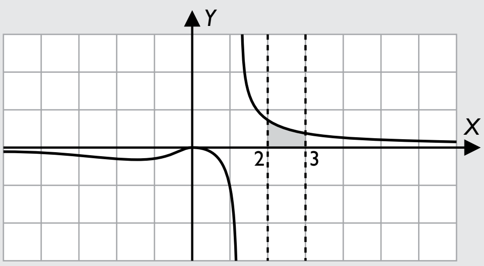
$$\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)\, dx = 4\ u^2$$

$$\int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx = -4\ u^2$$

Área $= 8\ u^2$

10 Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$

Solución:



Raíces: $x = 0$

$$\int \frac{x^2}{x^3 - 2}\, dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 2|$$

$$\int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 2}\, dx = \frac{1}{3}(\ln 25 - \ln 6)\ u^2$$

Área $= \frac{1}{3}(\ln 25 - \ln 6) = 0{,}48\ u^2$

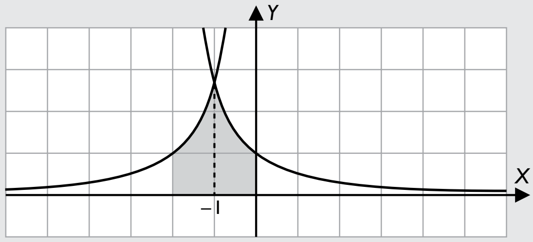
11 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dibuja el recinto limitado por las curvas:

$$y = e^{x+2},\ y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -2,\ x = 0$$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:



Raíces: $x = -1$

$$\int_{-2}^{-1} e^{x+2}\, dx = e - 1\ u^2$$

$$\int_{-1}^{0} e^{-x}\, dx = e - 1\ u^2$$

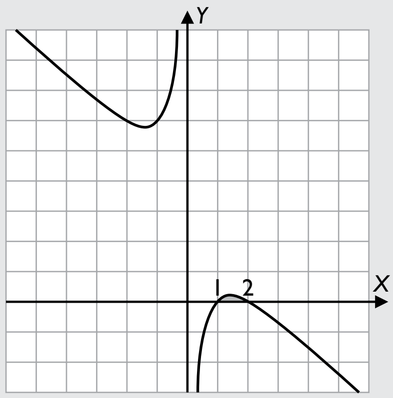
Área $= 2e - 2 = 3{,}44\ u^2$

12 Dada la función, definida en los números reales salvo en $x = 0$

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

calcula el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x)$ y el semieje positivo X

Solución:



Raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$$\int \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = 3x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln |x|$$

$$\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2\ u^2$$

Área $= \frac{3}{2} - 2 \ln 2 = 0{,}11\ u^2$

3. Aplicaciones de la integral definida

Piensa y calcula

Escribe las fórmulas del espacio y de la velocidad de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.)

Solución:

$e(t) = \dfrac{1}{2} at^2 + v_0 t + e_o$

$v(t) = at + v_0$

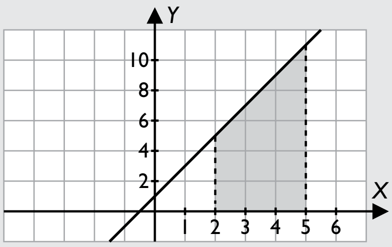
Aplica la teoría

13 Un móvil lleva una velocidad en m/s, en función del tiempo, según la función:

$$v(t) = 2t + 1$$

donde t se mide en segundos. Calcula el espacio que recorre el móvil entre los segundos 2 y 5 del movimiento.

Solución:



$$e(5) - e(2) = \int_2^5 (2t + 1)\, dt = 24 \text{ m}$$

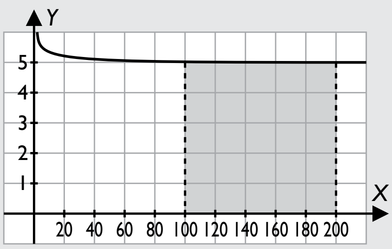
14 Una fábrica produce objetos de decoración. La función de ingreso marginal viene dada por:

$$i(x) = 5 + \frac{3}{x + 2}$$

donde x es el número de objetos vendidos e $i(x)$ viene dado en euros.

¿Cuál es el incremento de los ingresos obtenidos cuando se pasa de vender 100 a vender 200 objetos?

Solución:



$$\int_{100}^{200} \left(5 + \frac{3}{x + 2}\right) dx = 500 + 3(\ln 101 - \ln 51) = 502{,}05 \text{ €}$$

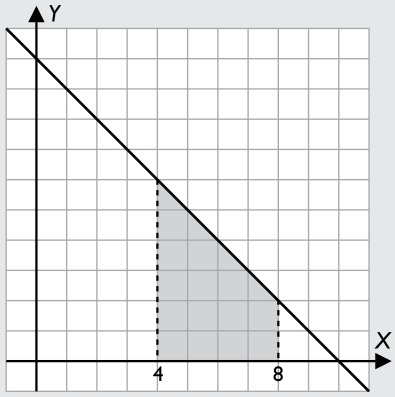
15 La función que mide el caudal que sale de un depósito es:

$$f(x) = 10 - x$$

donde $f(x)$ está dado en litros por segundo, y x, en segundos.

¿Qué cantidad de agua sale del depósito entre el segundo 4 y el segundo 8?

Solución:



$$\text{Volumen} = \int_4^8 (10 - x)\, dx = 16 \text{ litros.}$$

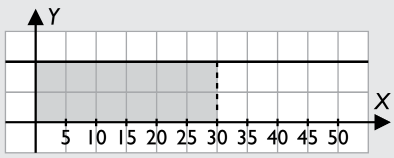
16 Una moto cuando arranca lleva un movimiento uniformemente acelerado, en el que la aceleración es de 2 m/s^2

a) Calcula la velocidad al cabo de 30 segundos.

b) Calcula el espacio que habrá recorrido en esos 30 segundos.

Solución:

a) Velocidad:



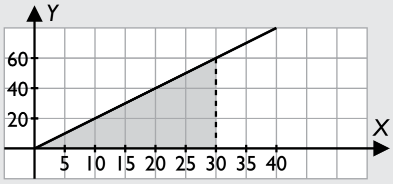
$$v(t) = \int 2\, dt = 2t$$

$$v(30) = 60 \text{ m/s}$$

b) Espacio:

$e(t) = \int 2t\, dt = t^2$

$e(30) = 900$ m



4. Cálculo de volúmenes

Piensa y calcula

Escribe las fórmulas del volumen de un prisma, de una pirámide, de un cilindro, de un cono y de una esfera.

Solución:

Volumen del prisma: $V_{\text{Prisma}} = BH$

Volumen de la pirámide: $V_{\text{Pirámide}} = \dfrac{1}{3}BH$

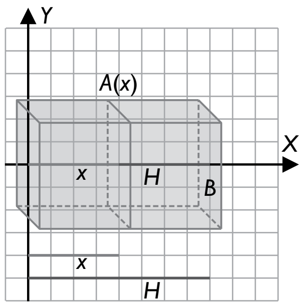
Volumen del cilindro: $V_{\text{Cilindro}} = \pi R^2 H$

Volumen del cono: $V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$

Volumen de la esfera: $V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Aplica la teoría

17 Deduce la fórmula del volumen del prisma.



Solución:

La sección $A(x)$ es paralela a la base B, y se tiene que $A(x) = B$

$$\text{Volumen} = \int_0^H B\, dx$$

$$F(x) = \int B\, dx = Bx$$

$F(0) = 0$, $F(H) = BH$

Volumen $= |F(H) - F(0)| = BH$

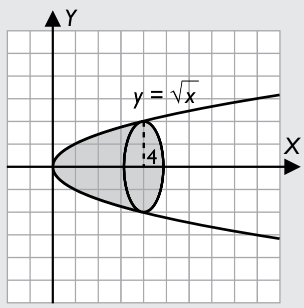
Por tanto, el volumen de un prisma es el área de la base por la altura.

18 Calcula el volumen generado por la función:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

cuando gira alrededor del eje X en el intervalo $[0, 4]$

Solución:



$$\text{Volumen} = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\, dx$$

$$F(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

$F(0) = 0$, $F(4) = 8$

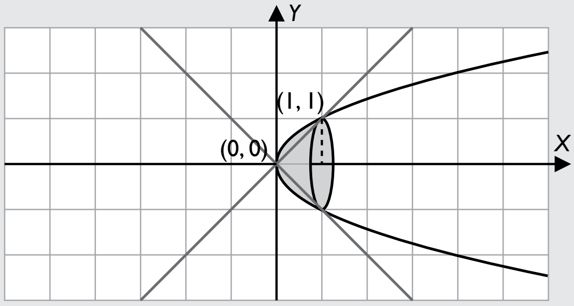
$|F(4) - F(0)| = |8| = 8$

Volumen $= 8\pi$ u^3

19 Calcula el volumen generado por la superficie comprendida entre las siguientes funciones cuando giran alrededor del eje X:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x$$

Solución:



$$\text{Volumen} = \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - x^2\right] dx$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - x^2 = x - x^2$$

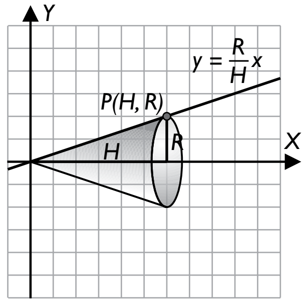
$$F(x) = \int (x - x^2)\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$F(0) = 0,\ F(1) = \frac{1}{6}$$

$$|F(1) - F(0)| = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

$$\text{Volumen} = \frac{\pi}{6}\ \text{u}^3$$

20 Deduce la fórmula del volumen de un cono.



Solución:

$$\text{Volumen} = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x^2\, dx$$

$$F(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$F(0) = 0$$

$$F(H) = \frac{H^3}{3}$$

$$|F(H) - F(0)| = \left|\frac{H^3}{3}\right| = \frac{H^3}{3}$$

$$\text{Volumen} = \pi\frac{R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H\ \text{u}^3$$

Preguntas tipo test

1 Dada la función:

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

calcula: $\int_0^2 f(x)\, dx$

- ❑ 7/2 u^2
- ❑ 3/2 u^2
- ❑ 5 u^2
- ☒ 6 u^2

2 Dada la función:

$$f(t) = 2at + b$$

calcula: $\int_1^{x+1} f(t)\, dt$

- ❑ $2ax^2 + bx$
- ☒ $ax^2 + (2a + b)x$
- ❑ $(2a + b)x - x^2$
- ❑ $ax^3 + 2ax^2 + bx$

3 Calcula el área del recinto limitado por la función $y = \ln x$, el eje X y las rectas $x = 1$, $x = 2$

- ❑ 2,33 u^2
- ❑ 5,26 u^2
- ❑ 0,05 u^2
- ☒ 0,39 u^2

4 Sean las funciones:

$$f(x) = x^3,\ g(x) = |x|$$

Obtén el área del recinto limitado por f y g entre $x = 0$, $x = 1$

- ☒ 1/4 u^2
- ❑ 2,5 u^2
- ❑ 0,15 u^2
- ❑ 1/2 u^2

5 Calcula el área encerrada por las funciones:

$$f(x) = 1 + \ln x,\ g(x) = 1/x$$

y las rectas $x = 1$, $x = 2$

- ❑ 0,50 u^2
- ❑ 1/e u^2
- ☒ 0,69 u^2
- ❑ e u^2

6 Calcula el área encerrada por las funciones:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1,\ g(x) = 2x + 1$$

- ❑ 5 u^2
- ❑ 3 u^2
- ☒ 37/12 u^2
- ❑ 35/12 u^2

7 Calcula el área encerrada por las funciones:

$$f(x) = x^3 + 3x^2,\ g(x) = x + 3$$

- ☒ 8 u^2
- ❑ 4 u^2
- ❑ 15 u^2
- ❑ 25/3 u^2

8 Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$$

calcula el área de la región acotada por su gráfica y el eje X

- ❑ 10 u^2
- ☒ 9,83 u^2
- ❑ e^3 u^2
- ❑ $16\pi/3$ u^2

9 Calcula el área encerrada por la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

y los ejes X e Y

- ❑ e^2 u^2
- ❑ 23 u^2
- ❑ e/5 u^2
- ☒ 0,63 u^2

10 Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva

$$y = \frac{1}{4 + x^2}$$

Calcula el área de la región R. Halla el valor de c para que la recta $x = c$ divida la región R en dos partes, A (izquierda) y B (derecha), tales que el área de A sea el doble que la de B

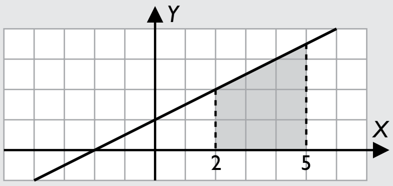
- ☒ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- ❑ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- ❑ $2\sqrt{3}$
- ❑ $3\sqrt{2}$

Ejercicios y problemas propuestos

1. Integral definida

21 Calcula $\int_2^5 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$

Solución:



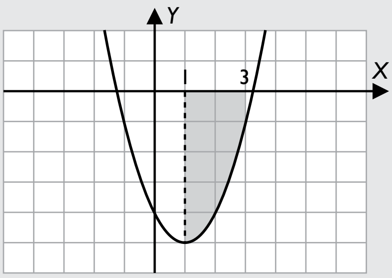
a) $F(x) = \frac{x^2}{4} + x$

b) $F(2) = 3,\ F(5) = \frac{45}{4}$

c) $\int_2^5 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \frac{33}{4} = 8{,}25\ \text{u}^2$

22 Calcula $\int_1^3 (x^2 - 2x - 4)\, dx$

Solución:



a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 4x$

b) $F(1) = -\frac{14}{3},\ F(3) = -12$

c) $\int_1^3 (x^2 - 2x - 4)\, dx = -\frac{22}{3} = -7{,}33\ \text{u}^2$

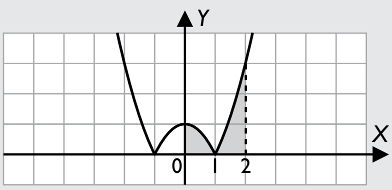
El área es negativa porque el recinto está debajo del eje X

23 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$

a) Esboza la gráfica de f

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\, dx$

Solución:



$$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx$$

Sea $F(x) = \int (-x^2 + 1)\, dx$

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + x$

$F(0) = 0,\ F(1) = \frac{2}{3}$

$\int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx = \frac{2}{3}\ \text{u}^2$

$G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx$

$G(x) = \frac{x^3}{3} - x$

$G(1) = -\frac{2}{3},\ G(2) = \frac{2}{3}$

$\int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \frac{4}{3}\text{u}^2$

$$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = 2\ \text{u}^2$$

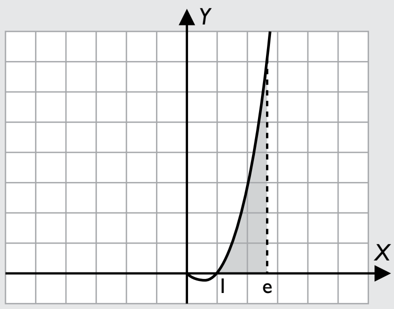
24 Calcula la derivada de $F(x) = \int_2^{x^2+1} \ln t\, dt$

Solución:

$F'(x) = 2x \ln |x^2 + 1|$

25 Calcula $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$

Solución:



a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln |x| - \frac{1}{3}\right)$

b) $F(1) = -\frac{1}{9},\ F(2) = \frac{2e^3}{9}$

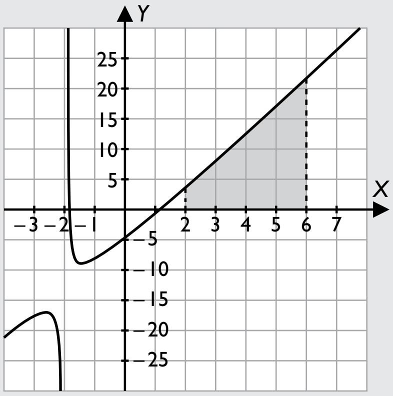
c) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{2e^3 + 1}{9} = 4{,}57\ \text{u}^2$

26 Considera la función $f(x)$ definida para $x \neq -2$ por la relación:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}$$

Calcula $\int_2^6 f(x)\, dx$

Solución:



a) $F(x) = 2x^2 - 5x + \ln|x + 2|$

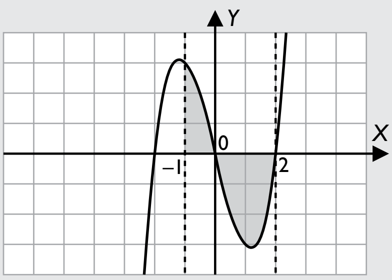
b) $F(2) = -2 + \ln 4$, $F(6) = 42 + \ln 8$

c) $\int_2^6 \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}\, dx = 44 + \ln 2 = 44{,}69$ u^2

2. Cálculo de áreas

27 Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 2$

Solución:



Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

$$\int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \frac{7}{4} \text{ u}^2$$

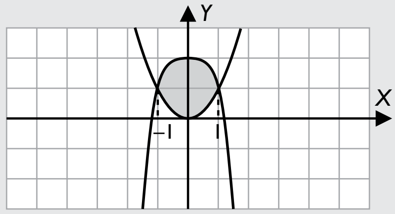
$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = -4 \text{ u}^2$$

Área $= \frac{23}{4} = 5{,}75$ u^2

28 Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones

$$y = 2 - x^4 \qquad y = x^2$$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

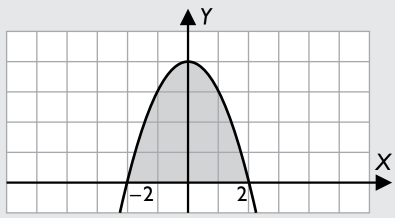
$$\int (-x^4 - x^2 + 2)\, dx = -\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x$$

$$\int_{-1}^{1} (-x^4 - x^2 + 2)\, dx = \frac{44}{15} \text{ u}^2$$

Área $= \frac{44}{15} = 2{,}93$ u^2

29 Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, calcula el área encerrada entre la gráfica $f(x)$ y el eje de abscisas.

Solución:



Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

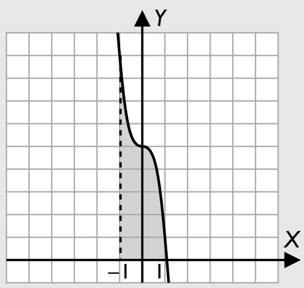
$$\int (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

Área $= \frac{32}{3} = 10{,}67$ u^2

30 Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = -4x^3 + 5$, el eje de abscisas, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$

Solución:



Raíces: $x = \dfrac{\sqrt[3]{10}}{2} = 1{,}08$

$$\int (-4x^3 + 5)\, dx = -x^4 + 5x$$

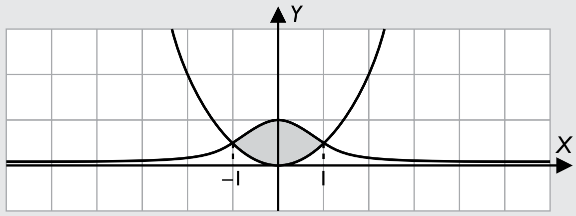
$$\int_{-1}^{1} (-4x^3 + 5)\, dx = 10 \text{ u}^2$$

Área = 10 u^2

31 Calcula el área de la región limitada por las curvas

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

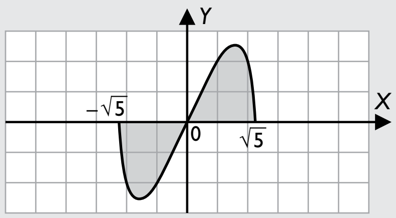
$$\int \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \text{arc tg } x - \frac{x^3}{6}$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{3\pi - 2}{6} \text{ u}^2$$

Área = $\dfrac{3\pi - 2}{6} = 1{,}24 \text{ u}^2$

32 Dada la función $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$, calcula el área encerrada entre la gráfica $f(x)$ y el eje de abscisas.

Solución:



Raíces: $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{5}$

$$\int x\sqrt{5 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(5 - x^2)\sqrt{5 - x^2}$$

$$\int_{-\sqrt{5}}^{0} x\sqrt{5 - x^2}\, dx = -\frac{5\sqrt{5}}{3} \text{ u}^2$$

$$\int_{0}^{\sqrt{5}} x\sqrt{5 - x^2}\, dx = \frac{5\sqrt{5}}{3} \text{ u}^2$$

Área = $\dfrac{10\sqrt{5}}{3} = 7{,}45 \text{ u}^2$

3. Aplicaciones de la integral definida

33 La recta de ecuación $y = -4x + 2$ representa la trayectoria de un móvil *A*. Otro móvil *B* se desplaza según la trayectoria dada por la curva de ecuación $y = g(x)$, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por:

$$g(x) = -x^2 + 2x + c$$

a) Halla el valor de c sabiendo que ambas trayectorias coinciden en el punto en el que la función $g(x)$ tiene un máximo local.

b) ¿Coinciden ambas trayectorias en algún otro punto? En tal caso, dibuja la región limitada por ambas trayectorias y calcula su área.

Solución:

a) El máximo de la parábola se alcanza en $x = 1$

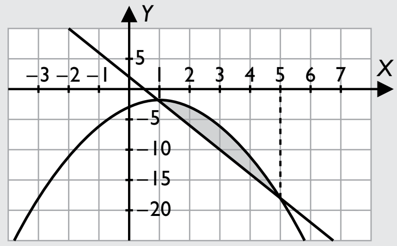
La función $f(x)$ para $x = 1$ vale -2

Poniendo la condición de que $g(1) = -2$, se obtiene $c = -3$

$g(x) = -x^2 + 2x - 3$

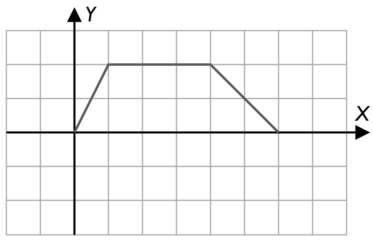
b) Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, se obtiene:

Raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$



Área = $\displaystyle\int_{1}^{5} (-x^2 + 6x - 5)\, dx = \frac{32}{3} = 10{,}67 \text{ u}^2$

34 La velocidad de un móvil que parte del origen viene dada, en m/s, por la gráfica siguiente:



a) Calcula la función espacio recorrido.

b) Dibuja la gráfica de la función espacio recorrido.

c) Prueba que el área bajo la curva que da la velocidad coincide con el espacio total recorrido.

Solución:

$$v(t) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 4 \\ -x + 6 & \text{si } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

a) Observando la gráfica del enunciado, se observa:

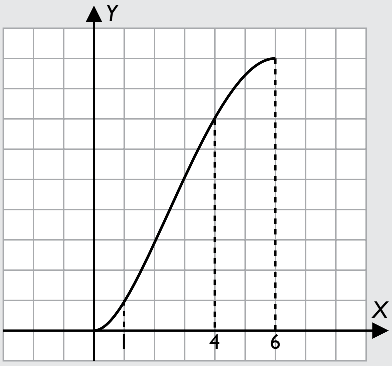
$e(1) = 1$

$e(4) = 7$

Por tanto:

$$e(t) = \int v(t)\, dt = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \le 4 \\ -x^2/2 + 6x - 9 & \text{si } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

b) Gráfica del espacio recorrido.

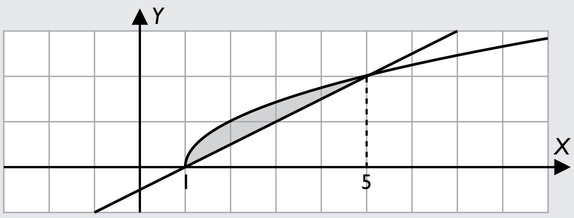


c) $e(6) = 9$, que es el área que queda debajo de la curva del enunciado.

35 Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse. La parcela es la región plana limitada por la curva $y = \sqrt{x - 1}$ y la recta $y = \dfrac{1}{2}(x - 1)$

Calcula el área de la parcela.

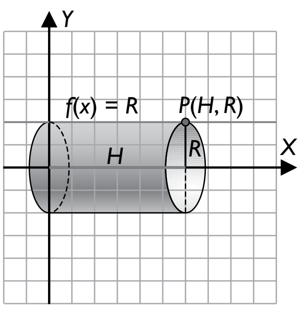
Solución:



$$\text{Área} = \int_1^5 \left(\sqrt{x - 1} - \frac{x - 1}{2} \right) dx = \frac{4}{3} = 1{,}33 \text{ u}^2$$

4. Cálculo de volúmenes

36 Deduce la fórmula del volumen de un cilindro.



Solución:

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^H R^2\, dx = \pi R^2 \int_0^H dx$$

$$F(x) = \int dx = x$$

$F(0) = 0$, $F(H) = H$

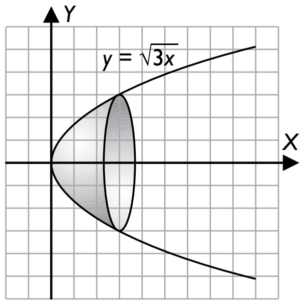
$|F(H) - F(0)| = |H| = H$

$\text{Volumen} = \pi R^2 H \text{ u}^3$

37 Calcula el volumen generado por la función:

$$f(x) = \sqrt{3x}$$

cuando gira alrededor del eje X en el intervalo $[0, 3]$



Solución:

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^3 \left(\sqrt{3x} \right)^2 dx = 3\pi \int_0^3 x\, dx$$

$$F(x) = \int dx = \frac{x^2}{2}$$

$$F(0) = 0,\ F(3) = \frac{9}{2}$$

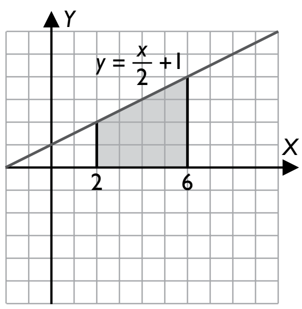
$$|F(3) - F(0)| = \left| \frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

$$\text{Volumen} = \frac{27\pi}{2} \text{ u}^3$$

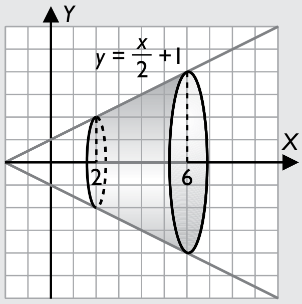
38 Calcula el volumen generado por la función:

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

cuando gira alrededor del eje X en el intervalo $[2, 6]$



Solución:



$$\text{Volumen} = \pi\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 dx$$

$$\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = \frac{x^2}{4} + x + 1$$

$$F(x) = \int\left(\frac{x^2}{4} + x + 1\right) dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$F(2) = \frac{14}{3},\ F(6) = 42$$

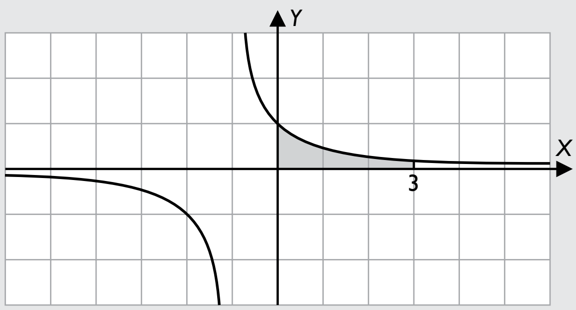
$$|F(6) - F(2)| = \left|42 - \frac{14}{3}\right| = \frac{112}{3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{112\pi}{3}\ \text{u}^3$$

Para ampliar

40 Calcula $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\, dx$

Solución:



a) $F(x) = \ln|x + 1|$

b) $F(0) = 0,\ F(3) = \ln 4$

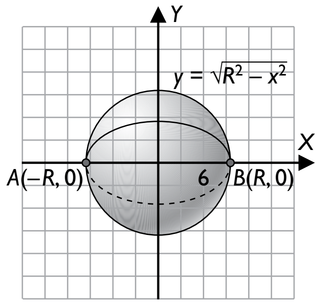
c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\, dx = \ln 4 = 1{,}39\ \text{u}^2$

41 Sea la función $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$

a) Halla los valores de a y b, de forma que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 2$

b) Halla el área de la región limitada por la gráfica $f(x)$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$

39 Deduce la fórmula del volumen de una esfera.



Solución:

$$\text{Volumen} = 2\pi\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)\, dx$$

$$F(x) = \int(R^2 - x^2)\, dx = R^2x - \frac{x^3}{3}$$

$$F(0) = 0,\ F(R) = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}$$

$$|F(R) - F(0)| = \left|\frac{2R^3}{3}\right| = \frac{2R^3}{3}\ \text{u}^3$$

$$\text{Volumen} = 2\pi\frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3\ \text{u}^3$$

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2bx + a$

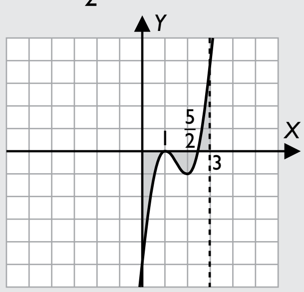
En los puntos en los que tiene el máximo y el mínimo, la primera derivada se anula.

Se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b + 6 = 0 \\ a + 4b + 24 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 12,\ b = -9$$

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

b) Raíces: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{5}{2}$



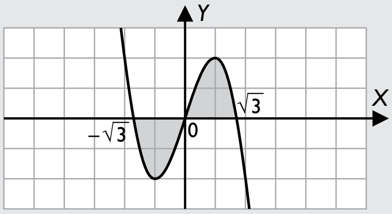
- $F(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2 - 5x$
- $F(0) = 0,\ F(1) = -\frac{3}{2},\ F(5/2) = -\frac{75}{32},\ F(3) = -\frac{3}{2}$
- Área $= \frac{51}{16} = 3{,}19\ \text{u}^2$

42 Sea la función $f(x) = 3x - x^3$

Halla el área de la región limitada por el eje X y dicha función.

Solución:

Raíces: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$



a) $F(x) = -\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3x^2}{2}$

b) $F\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{9}{4}$, $F(0) = 0$, $F\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{9}{4}$

c) Área $= \dfrac{9}{2} = 4{,}5\ \text{u}^2$

43 Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

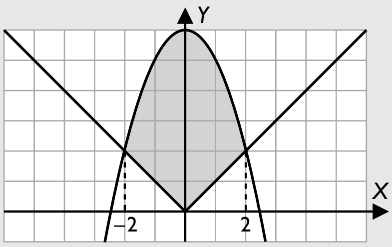
$$f(x) = 6 - x^2, \quad g(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas f y g

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución:

a) Dibujo:



b) Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

$$\int_{-2}^{0} (6 - x^2 + x)\, dx = \frac{22}{3}$$

$$\int_{0}^{2} (6 - x^2 - x)\, dx = \frac{22}{3}$$

Área $= \dfrac{44}{3} = 14{,}67\ \text{u}^2$

44 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

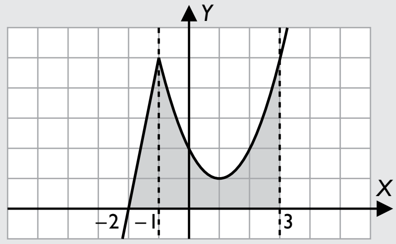
$$f(x) = \begin{cases} 5x + 10 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

a) Esboza la gráfica de $f(x)$

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = 3$

Solución:

a) Gráfica:



b) Se descompone el intervalo de integración en $[-2, -1]$ y $[-1, 3]$

$$\int_{-2}^{-1} (5x + 10)\, dx = \frac{5}{2}$$

$$\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x + 2)\, dx = \frac{28}{3}$$

Área $= \dfrac{71}{6} = 11{,}83\ \text{u}^2$

45 Considera la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definida por:

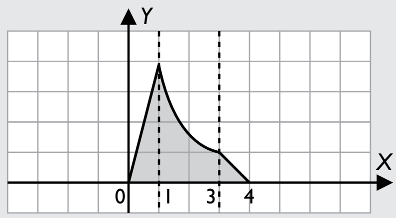
$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4 - x & \text{si } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) Esboza la gráfica $f(x)$

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) Gráfica:



b) Se descompone el intervalo de integración en $[0, 1]$, $[1, 3]$ y $[3, 4]$

$$\int_{0}^{1} 4x\, dx = 2$$

$$\int_{1}^{3} \frac{16}{(x+1)^2}\, dx = 4$$

$$\int_{3}^{4} (4 - x)\, dx = \frac{1}{2}$$

Área $= \dfrac{13}{2} = 6{,}5\ \text{u}^2$

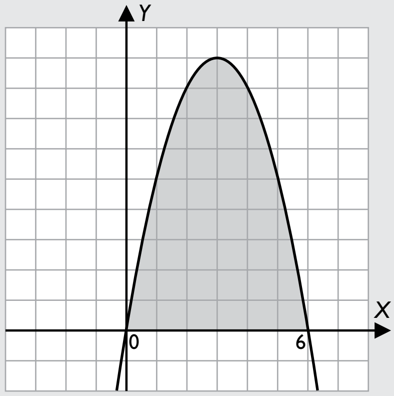
46 Calcula el valor de *a*, positivo, para que el área encerrada entre la curva $y = ax - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva que se obtienen para dicho valor de *a*

Solución:

$ax - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = a$

$\int_0^a (ax - x^2)\, dx = 36 \Rightarrow a = 6$

$y = 6x - x^2$



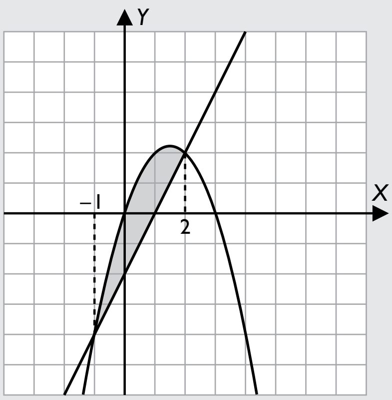
47 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dibuja la región limitada por la curva de ecuación $y = x(3 - x)$ y la recta de ecuación $y = 2x - 2$

b) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) Gráfica:



b) Raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx = \frac{9}{4} = 4{,}5 \text{ u}^2$$

48 Resuelve las siguientes cuestiones:

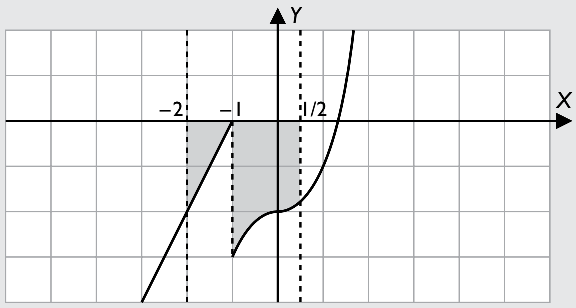
a) Esboza la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^3 - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica $f(x)$, el eje X y las rectas de ecuaciones $x + 2 = 0$ y $2x - 1 = 0$

Solución:

a) Gráfica:



b) El intervalo de integración se descompone en $[-2, -1]$ y $[-1, 1/2]$

$$\int_{-2}^{-1} (2x + 2)x\, dx = -1$$

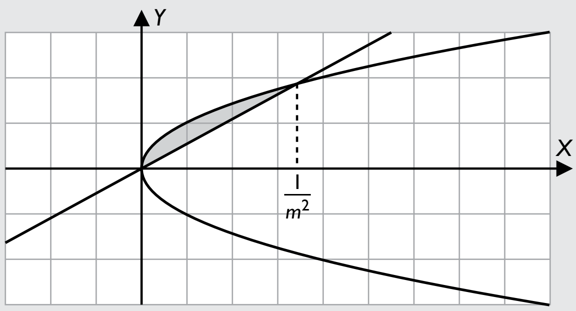
$$\int_{-1}^{1/2} (x^3 - 2)\, dx = -\frac{207}{64}$$

$$\text{Área} = \frac{271}{64} = 4{,}23 \text{ u}^2$$

49 Halla los valores de *m* para que el área de la región limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = mx$ sea 1

Solución:

Raíces: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{m^2}$



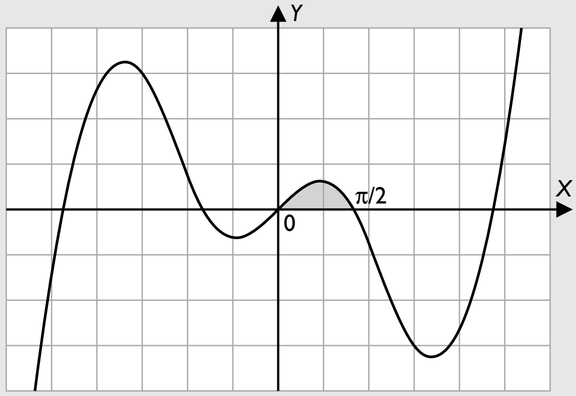
$$\int_0^{1/m^2} \left(\sqrt{x} - mx\right) = 1$$

$$m = \frac{\sqrt[3]{6^2}}{6}$$

50 Sea la función $f(x) = x \cos x$. Calcula la integral de f entre $x = 0$ y el primer cero positivo que tiene la función.

Nota: se llaman ceros de una función a los valores para los que esta se anula.

Solución:



El primer cero positivo de la función es: $x = \dfrac{\pi}{2}$

a) $F(x) = x \text{ sen } x + \cos x$

b) $F(0) = 1,\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

c) Área $= \dfrac{\pi}{2} - 1 = 0{,}57 \text{ u}^2$

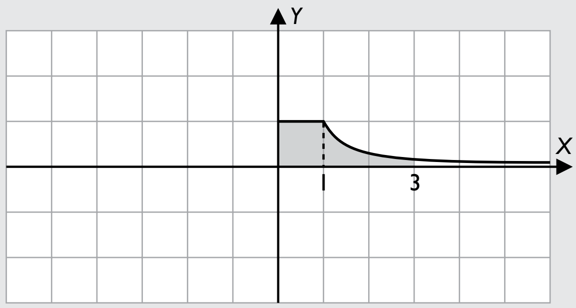
51 Se tiene la función $f(x)$ definida para todo número real no negativo y dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Halla $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx$

Interpreta geométricamente el resultado.

Solución:



El intervalo de integración se descompone en [0, 1] y [1, 3]

$\displaystyle\int_0^1 dx = 1$, es un cuadrado de área una unidad cuadrada.

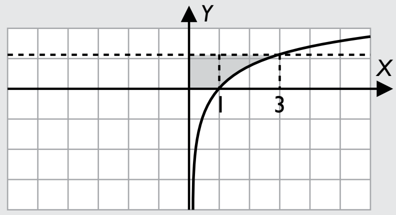
$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{3}$$

Área $= \dfrac{5}{3} = 1{,}67 \text{ u}^2$

El resultado es el área del recinto marcado en el dibujo.

52 Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $y = 0$, $y = \ln 3$, $x = 0$

Solución:



$$\int_0^1 \ln 3\, dx + \int_1^3 (\ln 3 - \ln x)\, dx = 2$$

Área $= 2 \text{ u}^2$

53 Halla el valor del parámetro a sabiendo que el área limitada por la gráfica de la parábola $y = x^2 - ax$ y el eje X es $\dfrac{32}{3}$

Solución:

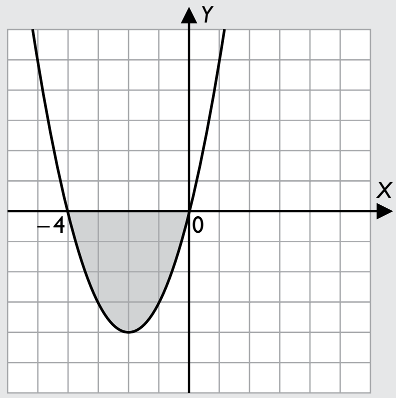
$x^2 - ax = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = a$

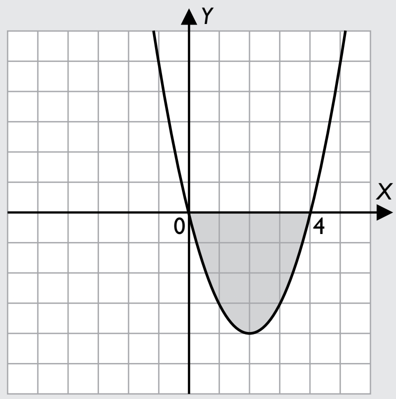
$$\left|\int_a^0 (x^2 - ax)\, dx\right| = \frac{32}{3}$$

$|a^3| = 64$

$a = 4$

$a = -4$



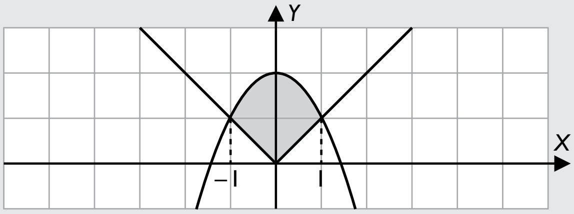


54 Dibuja la figura limitada por las curvas cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = |x| \end{cases}$$

y halla el área de la misma.

Solución:



Raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

$$\int_{-1}^{0} (2 - x^2 + x)\,dx = \frac{7}{6}$$

$$\int_{0}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \frac{7}{6}$$

$$\text{Área} = \frac{7}{3} = 2{,}33 \text{ u}^2$$

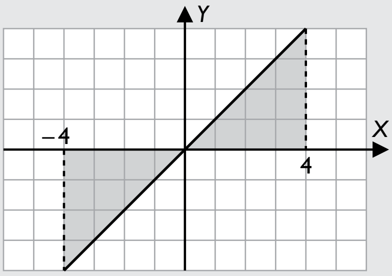
55 Si f es una función continua en $[a, b]$, ¿puede ser la integral $\int_a^b f(x)\,dx = 0$? Razona la respuesta con un ejemplo.

Solución:

Sí puede ser, siempre que el área positiva coincida con el área negativa, o bien cuando $a = b$

Ejemplo:

$$\int_{-4}^{4} x\,dx = 0$$



56 Sea la función $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, y sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Demuestra que $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

Solución:

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$$

$f(a \cdot b) = \ln (a \cdot b)$

$f(a) + f(b) = \ln a + \ln b$

Como $\ln (a \cdot b) = \ln a + \ln b$ por una propiedad de los logaritmos, se tiene que:

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

57 Mediante argumentos geométricos, demuestra que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones positivas en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) \le g(x)$ para todo x de dicho intervalo, entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Solución:

Porque el área representada por la 1.ª integral está contenida en el área representada por la 2.ª integral.

58 Si $f(x)$ es una función continua positiva en el intervalo $[a, b]$, justifica, mediante argumentos geométricos, si la siguiente afirmación es cierta.

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

Si es falsa pon un contraejemplo.

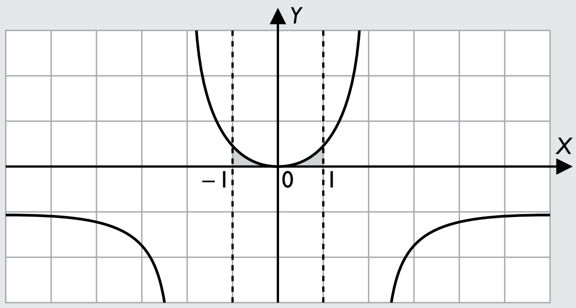
Solución:

Es cierta, porque si la función es positiva en un intervalo, el área limitada por el eje X y la curva es positiva en dicho intervalo.

59 Encuentra el área de la región determinada por la curva $y = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = -1$

Solución:

Raíces: $x = 0$



a) $F(x) = -x + \ln |x + 2| - \ln |x - 2|$

b) $F(-1) = 1 - \ln 3$, $F(0) = 0$, $F(1) = -1 + \ln 3$

c) $\text{Área} = 2 \ln 3 - 2 = 0{,}20 \text{ u}^2$

Problemas

60 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

a) Halla la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica $f(x)$

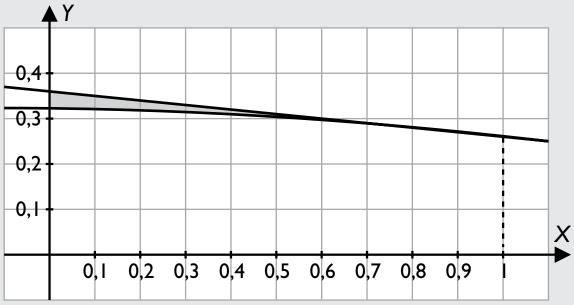
b) Calcula el área del recinto plano acotado por la gráfica $f(x)$, la recta anterior y el eje $x = 0$

Solución:

a) El punto de inflexión es el punto $P(1, 1/4)$

$$y = \frac{3 - x}{8}$$

b) Área:



$$\text{Área} = \int_0^1 \left(\frac{3 - x}{8} - \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} = 0{,}01 \text{ u}^2$$

61 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Calcula el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad:

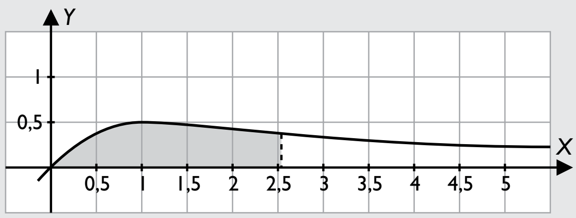
$$\int_0^a f(x)\, dx = 1$$

Solución:

$$\int_0^a \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln (a^2 + 1)$$

Se resuelve la ecuación y se toma $a > 0$:

$$\frac{1}{2} \ln (a^2 + 1) = 1 \Rightarrow a = \sqrt{e^2 - 1}$$



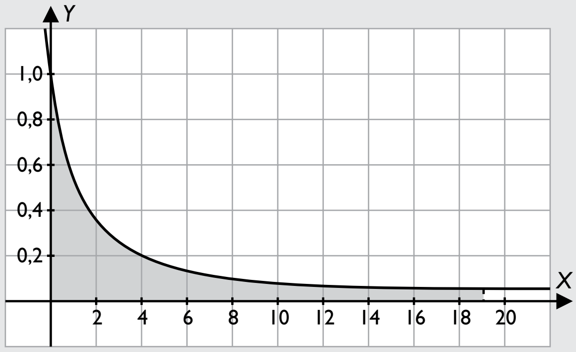
62 Calcula el valor de $a > 0$ para que:

$$\int_0^a \frac{1}{x + 1} dx = 3$$

Solución:

$$\int_0^a \frac{dx}{x + 1} = \ln (a + 1)$$

$$\ln (a + 1) = 3 \Rightarrow a = e^3 - 1$$

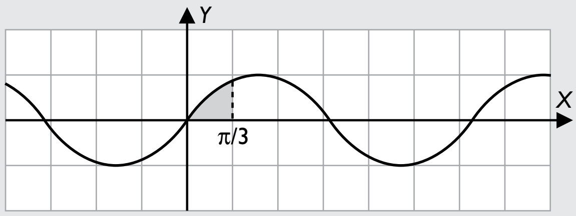


63 Sea la función $f(x) = \text{sen } x$. Calcula $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica $f(x)$, el eje $y = 0$ y la recta $x = a$ sea $\frac{1}{2}$

Solución:

$$\int_0^a \text{sen } x\, dx = 1 - \cos a$$

$$1 - \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

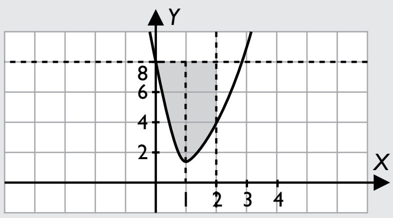


64 Sea la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (2 - x)^3 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina el área encerrada por la gráfica $f(x)$ y por las rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$

Solución:



$$\int_0^1 (8-(2-x)^3)\,dx = \frac{17}{4}\text{ u}^2$$

$$\int_1^2 (8-x^2)\,dx = \frac{17}{3}\text{ u}^2$$

$$\text{Área} = \frac{119}{12} = 9{,}92\text{ u}^2$$

65 Se consideran las funciones:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$g(x) = ax^2 + b$$

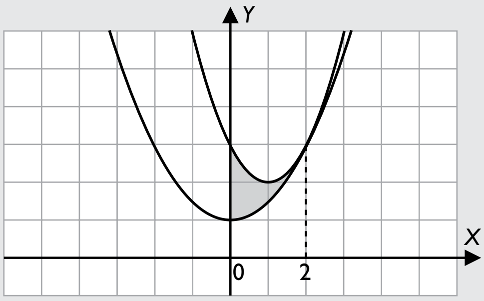
a) Calcula a y b para que las gráficas $f(x)$ y $g(x)$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$

b) Para los mismos valores de a y b, halla el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical Y

Solución:

a) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$

b) Área:



$$\int_0^2 \frac{x^2-4x+4}{2}\,dx = \frac{4}{3} = 1{,}33\text{ u}^2$$

66 Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 + ax + b$$
$$g(x) = -x^2 + c$$

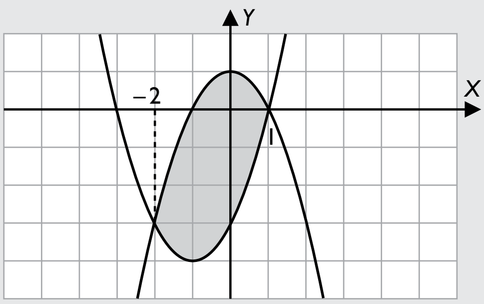
a) Determínense a, b y c sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos $(-2, -3)$ y $(1, 0)$

b) Calcula el área de la región limitada por las gráficas $f(x)$ y $g(x)$

Solución:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = -x^2 + 1$

b) Área:



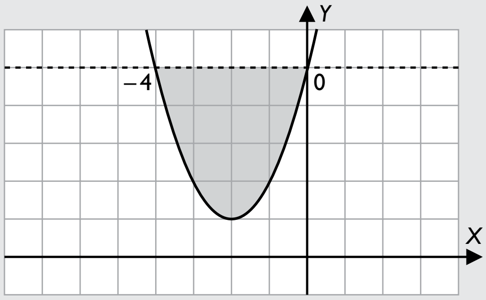
$$\text{Área} = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4)\,dx = 9\text{ u}^2$$

67 Halla el área del recinto delimitado por la curva

$$y = x^2 + 4x + 5$$

y la recta $y = 5$

Solución:

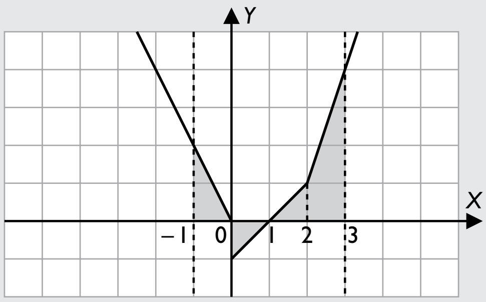


$$\text{Área} = \int_{-4}^0 (-x^2 - 4x)\,dx = \frac{32}{3} = 10{,}67\text{ u}^2$$

68 Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 0 \\ x-1 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ 3x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 3$

Solución:



$$\int_{-1}^0 (-2x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 (x-1)\,dx = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 (x-1)\,dx = \frac{1}{2}$$

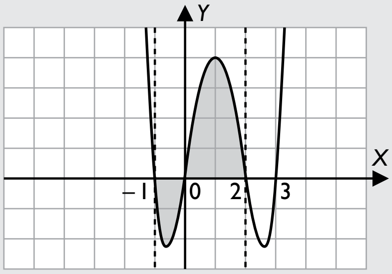
$$\int_2^3 (3x-5)\,dx = \frac{5}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{9}{2} = 4{,}5\text{ u}^2$$

69 Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

Calcula el área determinada por la gráfica $f(x)$, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$

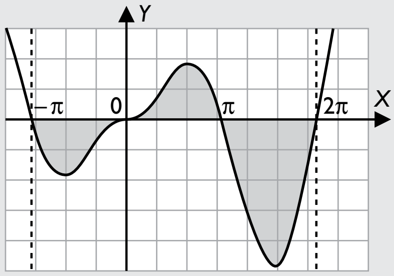
a) $F(x) = \dfrac{x^5}{5} - x^4 + \dfrac{x^3}{3} + 3x^2$

b) $F(-1) = \dfrac{22}{15}$, $F(0) = 0$, $F(2) = \dfrac{76}{15}$

c) Área $= \dfrac{98}{15} = 6{,}53$ u^2

70 Calcula el valor de la integral $\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \text{ sen } x \, dx$

Solución:



Raíces: $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 2\pi$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{0} (-x \text{ sen } x)\, dx = -\pi$

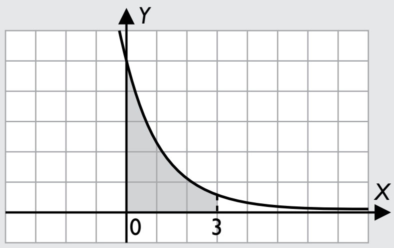
$\displaystyle\int_{0}^{\pi} (x \text{ sen } x)\, dx = \pi$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (x \text{ sen } x)\, dx = -3\pi$

Área $= 5\pi = 15{,}71$ u^2

71 Calcula el valor de la integral $\displaystyle\int_{0}^{3} (x^2 + 5)\, e^{-x}\, dx$

Solución:



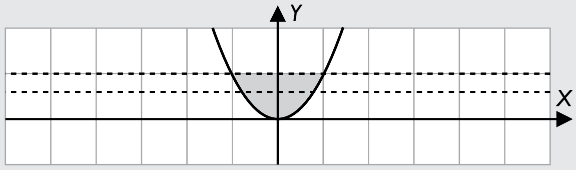
a) $F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 7)$

b) $F(0) = -7$, $F(3) = -22\, e^{-3}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{3} (x^2 + 5) e^{-x}\, dx = 7 - 22e^{-3} = 5{,}90$ u^2

72 Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Halla el valor de a

Solución:



Aplicando el cálculo integral, se tiene:

$\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}$ u^2

Si $y = a$, $y = x^2$

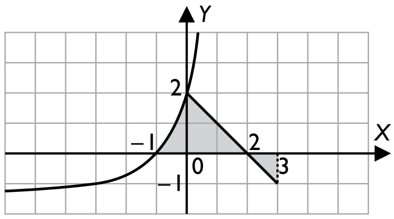
$x^2 = a \Rightarrow x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$

La mitad de $\dfrac{4}{3}$ es $\dfrac{2}{3}$

$\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \frac{1}{3}$

$\dfrac{2a\sqrt{a}}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

73 Halla el área del recinto coloreado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \dfrac{2x + 2}{1 - x}$



Solución:

$A_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x + 2}{1 - x}\, dx = -2 + \ln 16$

Los otros dos trozos se pueden calcular contando.

$A_2 = 2$, o bien: $\displaystyle\int_{0}^{2} (2 - x)\, dx = 2$

$A_3 = -\frac{1}{2}$, o bien: $\int_2^3 (2 - x)\, dx = -\frac{1}{2}$

Área $= \frac{1}{2} + \ln 16$

74 Sabiendo que $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x, considera la función $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si } -1 < x \le 1 \\ x \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

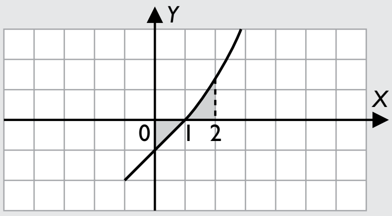
a) Determina el valor de a sabiendo que $f(x)$ es derivable.

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\, dx$

Solución:

a) $a = 1$

b) Dibujo:



$$\int_0^1 (x-1)\, dx = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 (x \ln x)\, dx = -\frac{3}{4} + \ln 4$$

Área $= -\frac{1}{4} + \ln 4 = 1{,}14$ u^2

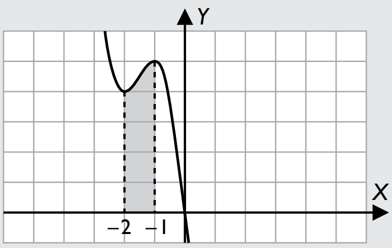
75 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

Determina los extremos relativos α y β de $f(x)$ con $\alpha < \beta$ y calcula $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

Solución:

Los extremos relativos están en $x = -2$ y en $x = -1$



a) $F(x) = -\frac{x^4}{2} - 3x^3 - 6x^2$

b) $F(-2) = -8$, $F(-1) = -\frac{7}{2}$

c) $\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx = \frac{9}{2} = 4{,}5$ u^2

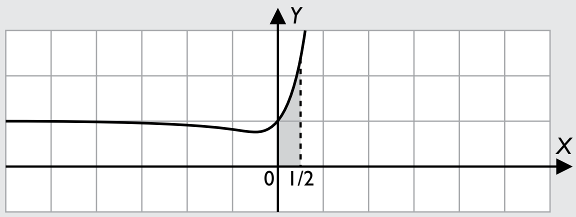
76 Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = xe^{2x}$$

Determina el valor de la integral:

$$\int_0^{1/2} (1 + f(x))\, dx$$

Solución:



a) $F(x) = x + e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

b) $F(0) = -\frac{1}{4}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) Área $= \frac{3}{4} = 0{,}75$ u^2

77 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - mx - x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

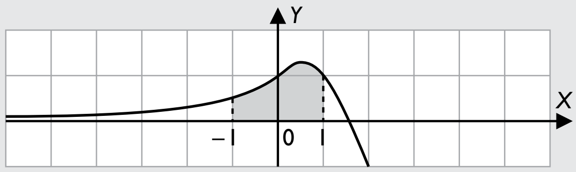
a) Determina m sabiendo que $f(x)$ es derivable.

b) Calcula $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$

Solución:

a) $m = -1$

b) Dibujo:



$$\int_{-1}^0 \frac{1}{1-x}\, dx = \ln 2$$

$$\int_0^1 (-x^2 + x + 1)\, dx = \frac{7}{6}$$

Área $= \frac{7}{6} + \ln 2 = 1{,}86$ u^2

78 Resuelve las siguientes cuestiones:

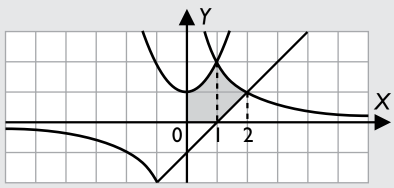
a) Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas:

$$y = x^2 + 1,\ y = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad y = x - 1$$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

a) Recinto:



b) Área del recinto.

$$\int_0^1 (x^2 + 1)\, dx = \frac{4}{3}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - x + 1\right) dx = -\frac{1}{2} + \ln 4$$

$$\text{Área} = \frac{5}{6} + \ln 4 = 2{,}22 \text{ u}^2$$

79 Resuelve las siguientes cuestiones:

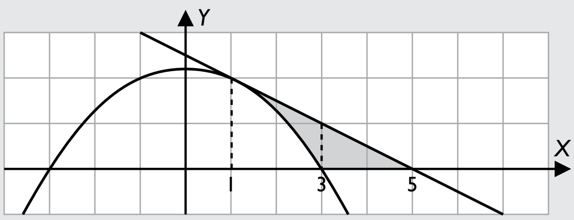
a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \dfrac{9 - x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = 1$ y el eje de abscisas.

b) Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

a) Recta tangente:

$$y = \frac{5 - x}{2}$$



b) Área del recinto.

$$\int_1^3 \left(\frac{5 - x}{2} - \frac{9 - x^2}{4}\right) dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_3^5 \frac{5 - x}{2}\, dx = 1$$

$$\text{Área} = \frac{5}{3} = 1{,}67 \text{ u}^2$$

80 De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0, 0)$ y que: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$

Calcula a, b, c y d

Solución:

Si tiene un máximo relativo en $x = 1$, la primera derivada se anula para $x = 1$

$$3a + 2b + c = 0$$

Si tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, pasa por ese punto; por tanto, $d = 0$ y la segunda derivada se anula en $x = 0$

$$b = 0$$

De donde se obtiene:

$$c = -3a$$

La función es:

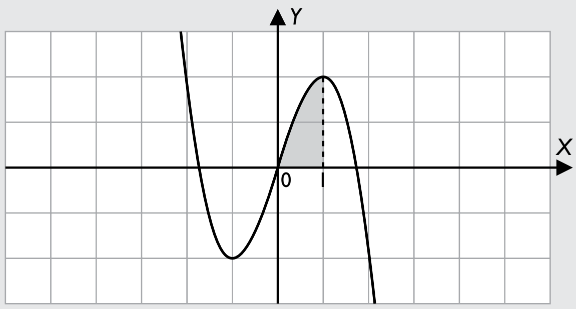
$f(x) = ax^3 - 3ax$

$$\int_0^1 (ax^3 - 3ax)\, dx = \frac{5}{4}$$

$$-\frac{5a}{4} = \frac{5}{4}$$

$a = -1$

$f(x) = -x^3 + 3x$



81 La recta de ecuación $3x - y + 2 = 0$ es tangente a la parábola de ecuación $y = ax^2 + c$ en el punto $P(1, 5)$

a) Calcula las constantes a y c de la ecuación de la parábola describiendo el procedimiento que sigas.

b) Dibuja la región plana limitada por el eje Y, la parábola y la recta tangente.

c) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) La pendiente de la recta es $m = 3$

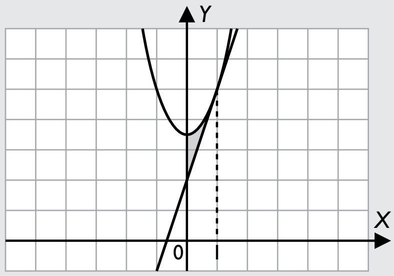
La derivada de la parábola es $y' = 2ax$

Por tanto, para $x = 1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$

Si la parábola pasa por el punto $P(1, 5)$ se deduce que

$c = \dfrac{7}{2}$

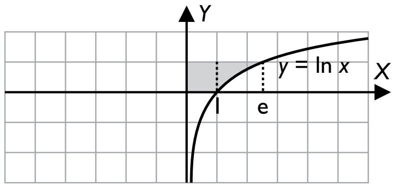
b) Dibujo:



c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{7}{2} - 3x - 2 \right) dx = \frac{1}{2}$

Área $= \dfrac{1}{2} = 0{,}5\ u^2$

82 Calcula el área de la región coloreada en la figura y justifica el procedimiento empleado (ln x es el logaritmo neperiano de x).



Solución:

La región se descompone en dos trozos, la que está encima del intervalo [0, 1], que tiene de área 1 u^2, y la que está entre la curva $y = \ln x$ y la recta $y = 1$ en el intervalo [1, e]

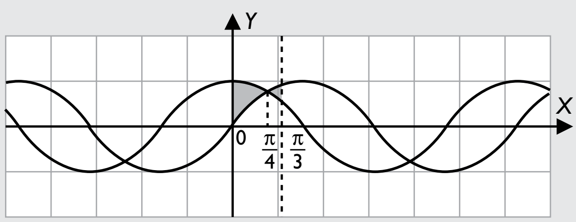
$$\int_1^e (1 - \ln x)\, dx = e - 2$$

Área total: $e - 1 = 1{,}72\ u^2$

83 Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/3$

Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución:

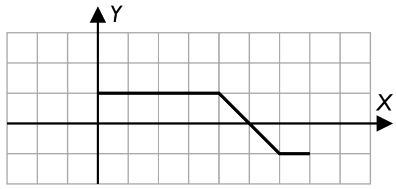


$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = \sqrt{2} - 1$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx = \sqrt{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Área $= 2\sqrt{2} - \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} = 0{,}46\ u^2$

84 La figura siguiente representa la gráfica de una función $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$



Sea $F : [0, 7] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

a) Calcula $F(4)$ y $F(7)$

b) Dibuja la gráfica $F(x)$ explicando cómo lo haces.

Solución:

a) $F(4)$ es el área comprendida entre el eje X y la función en el intervalo [0, 4], $F(4) = 4\ u^2$

$F(7)$ se obtiene como $F(4)$, pero hay media unidad más positiva y una y media negativa, $F(7) = 3\ u^2$

La fórmula de $F(x)$ es:

- En el intervalo [0, 4] es:

$$f(t) = 1 \Rightarrow F(x) = x$$

- En el intervalo [4, 6] es:

$$f(t) = -x + 5 \Rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x + k_1$$

con la condición de que debe pasar por el punto $P(4, 4)$. De donde se obtiene que $k_1 = -8$

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x - 8$$

- En el intervalo [6, 7] es:

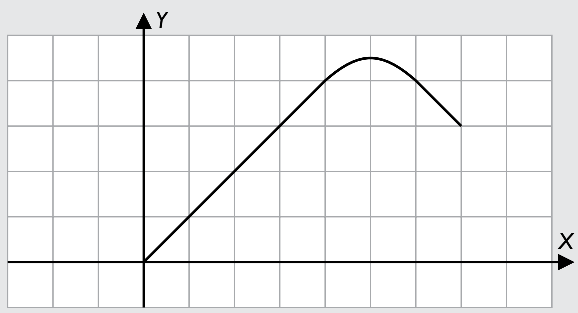
$$f(t) = -1 \Rightarrow F(x) = -x + k_2$$

con la condición de que debe pasar por el punto $P(6, 4)$. De donde se obtiene que $k_2 = 10$

$$F(x) = -x + 10$$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 5x - 8 & \text{si } 4 < x < 6 \\ -x + 10 & \text{si } 6 \le x \le 7 \end{cases}$$

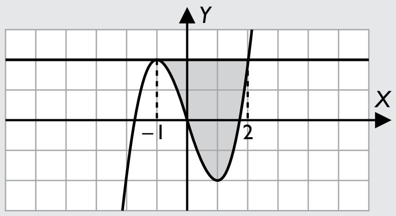
b)



85 Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$

Dibuja el recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada y calcula su área.

Solución:



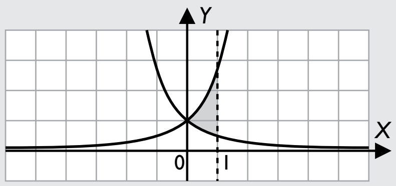
La recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es $y = 2$

$$\int_{-1}^{2} (2 - x^3 + 3x)\, dx = \frac{27}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{27}{4} = 6{,}75\ \text{u}^2$$

86 Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$

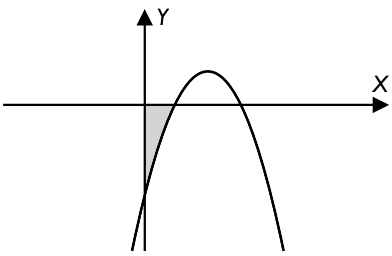
Solución:



$$\int_{0}^{1} (e^x - e^{-x})\, dx = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$\text{Área} = e + \frac{1}{e} - 2 = 1{,}09\ \text{u}^2$$

87 En la figura aparece una curva que representa una función polinómica de grado 2. Los puntos de intersección de la curva con el eje X son el $A(1, 0)$ y el $B(3, 0)$. Además, el área limitada por la curva y los dos ejes coordenados vale 4/3. Halla la expresión de dicha función.



Solución:

$f(x) = a(x - 1)(x - 3)$

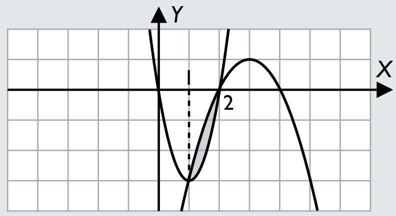
$f(x) = a(x^2 - 4x + 3)$

$$a\int_{0}^{1} (x^2 - 4x + 3)\, dx = -\frac{4}{3} \Rightarrow a = -1$$

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

88 Dibujar con la mayor exactitud posible las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^2 - 6x$ y $g(x) = -x^2 + 6x - 8$. Representa el recinto limitado por ambas funciones y obtén su área.

Solución:



Raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$$\int_{1}^{2} (-4x^2 + 12x - 8)\, dx = \frac{2}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{2}{3} = 0{,}67\ \text{u}^2$$

89 Calcula una primitiva de la función:

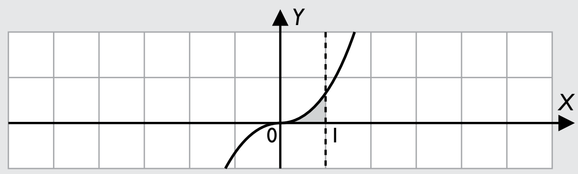
$$f(x) = x \ln (1 + x^2)$$

Determina el área encerrada por la gráfica de la función anterior, el eje X y la recta $x = 1$

Solución:

Una primitiva de $f(x)$ es:

a) $F(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 1) \ln |x^2 + 1|$



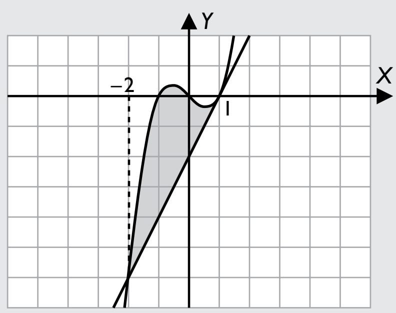
b) $F(0) = 0$, $F(1) = -\dfrac{1}{2} + \ln 2$

c) $\text{Área} = -\dfrac{1}{2} + \ln 2 = 0{,}19\ \text{u}^2$

90 Representa gráficamente el recinto plano limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula su área.

Solución:

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(1, 0)$ es: $y = 2x - 2$

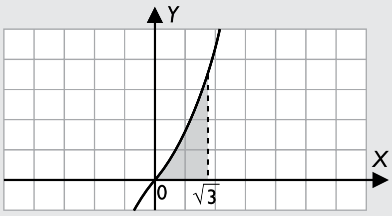


$$\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\, dx = \frac{27}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{27}{4} = 6{,}75 \text{ u}^2$$

91 Calcula $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1 + x^2}\, dx$

Solución:



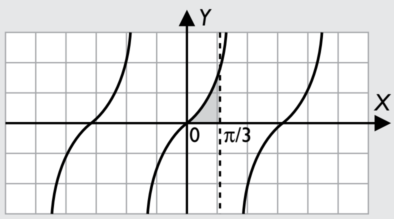
a) $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

b) $F(0) = \dfrac{1}{3}$, $F\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{8}{3}$

c) $\text{Área} = \dfrac{7}{3} = 2{,}33 \text{ u}^2$

92 Calcula el área determinada por la curva $y = \text{tg } x$, el eje X y la recta $x = \dfrac{\pi}{3}$

Solución:



$$\int_0^{\pi/3} \text{tg } x\, dx = \ln 2$$

$$\text{Área} = \ln 2 = 0{,}69 \text{ u}^2$$

93 Sin hacer ningún cálculo, di cuál de las siguientes integrales es mayor:

$$\int_0^1 x^2 \text{ sen}^2 x\, dx \qquad \int_0^1 x \text{ sen}^2 x\, dx$$

Solución:

Cuando $x \in (0, 1) \Rightarrow x^2 < x$

Por tanto en el intervalo (0, 1):

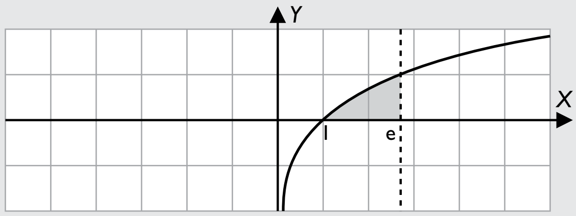
$$x^2 \text{ sen}^2 x < x \text{ sen}^2 x$$

De donde se deduce que:

$$\int_0^1 x^2 \text{ sen}^2 x\, dx < \int_0^1 x \text{ sen}^2 x\, dx$$

94 Calcula el área determinada por la curva $y = \ln x$, el eje X y la recta $x = \text{e}$

Solución:

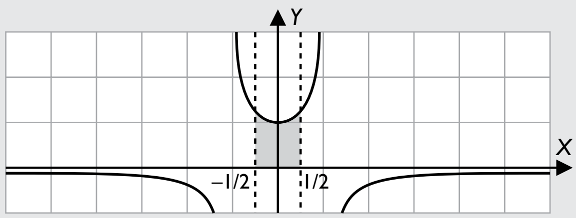


$$\int_1^{\text{e}} \ln x\, dx = 1$$

$$\text{Área} = 1 \text{ u}^2$$

95 Calcula el área determinada por la curva $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$, el eje X y las rectas $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$

Solución:



a) $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln |x + 1| - \ln |x - 1|)$

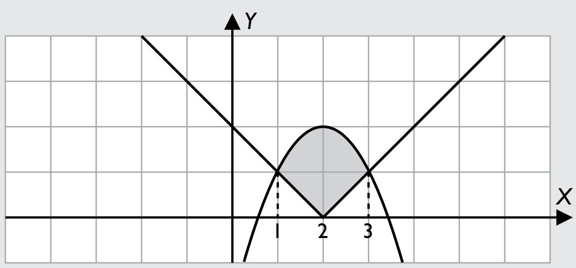
b) $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\ln 3}{2}$, $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\ln 3}{2}$

c) $\text{Área} = \ln 3 = 1{,}10 \text{ u}^2$

96 Encuentra el área del recinto determinado por las curvas:

$$y = |x - 2|$$
$$y = -x^2 + 4x - 2$$

Solución:



$$\int_1^2 (-x^2 + 5x - 4)\, dx = \frac{7}{6}$$

$$\int_2^3 (-x^2 + 3x)\, dx = \frac{7}{6}$$

$$\text{Área} = \frac{7}{3} = 2{,}33 \text{ u}^2$$

97 Demuestra que $0 \le \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\, dx \le 1$

Solución:

Si $x \in (0, \pi/2) \Rightarrow 0 < \operatorname{sen} x < 1$

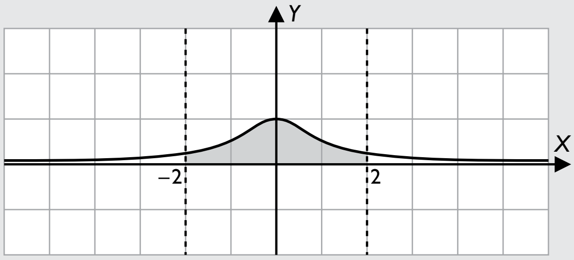
Además, se tiene que: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1$

y como: $\dfrac{1}{1 + x^2} \le 1 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2} \le \operatorname{sen} x$

$$0 \le \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\, dx \le \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1$$

98 Calcula el área del recinto determinado por la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, las rectas $x = 2$, $x = -2$ y el eje de abscisas.

Solución:



Por simetría, el área es:

$$2\int_0^2 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

a) $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

b) $F(2) = 1{,}11$; $F(0) = 0$

c) Área = 2,22 u^2

99 Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas positivas en el intervalo $[a, b]$, justifica, mediante argumentos geométricos si la siguiente afirmación es cierta.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

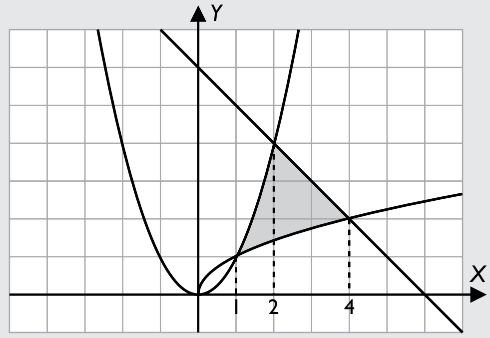
Si es falsa, pon un contraejemplo.

Solución:

La afirmación es cierta, porque el área comprendida entre el eje X y la suma de las funciones $f(x) + g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, más el área comprendida entre el eje X y la función $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$

100 Determina el área comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ y la recta que pasa por los puntos $A(2, 4)$ y $B(4, 2)$

Solución:



Raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$

$$\int_1^2 \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx = 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_2^4 \left(6 - x - \sqrt{x}\right) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$$

Área = $\dfrac{11}{3} = 3{,}67$ u^2

101 Demuestra que si m es un número cualquiera mayor que uno, y k un número natural cualquiera mayor que uno, se cumple que:

$$\int_1^m \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1}\, dx < m$$

Solución:

En las condiciones del problema, se tiene:

$$x^k < x^{k+1} \Rightarrow x^k + 1 < x^{k+1} + 1 \Rightarrow \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} < 1$$

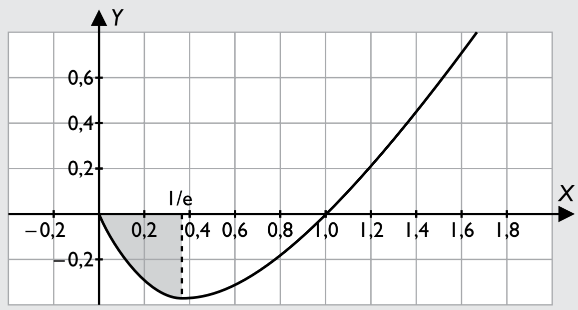
Por tanto:

$$\int_1^m \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1}\, dx < \int_1^m dx = m - 1 < m$$

102 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje X, desde $x = 0$ hasta $x = b$, siendo b la abscisa del mínimo de la función.

Solución:



La abscisa del mínimo de la función es $x = 1/e$

a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(-\dfrac{1}{2} + \ln |x|\right)$

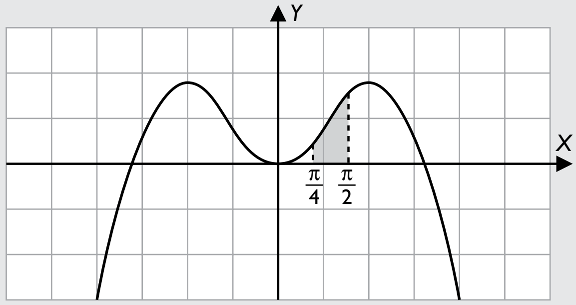
b) $F(0) = 0,\ F(1/e) = -\dfrac{3}{4e^2}$

c) Área $= \dfrac{3}{4e^2} = 0{,}10\ u^2$

103 Calcula la integral definida:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \text{ sen } x\, dx$$

Solución:



a) $F(x) = \text{sen } x - x \cos x$

b) $F(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8},\ F(\pi/2) = 1$

c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \text{ sen } x\, dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} = 0{,}85\ u^2$

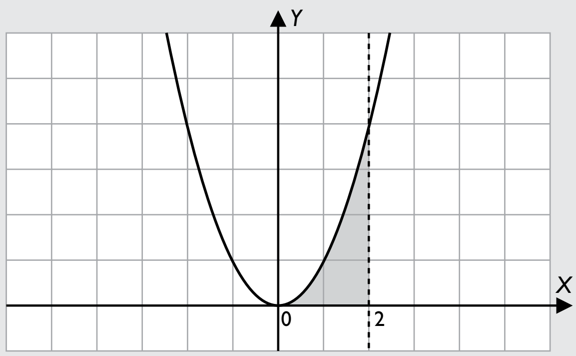
104 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Obtén el área de la superficie S, limitada por el eje X, la curva $y = x^2$, con $0 \le x \le 2$, y la recta $x = 2$

b) Calcula el volumen generado por la superficie S al dar una vuelta completa alrededor del eje X

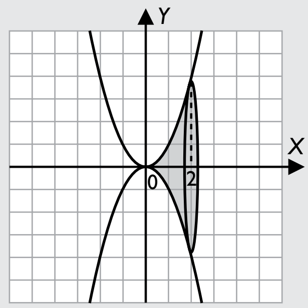
Solución:

a) Dibujo:



$\displaystyle\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}\ u^2$

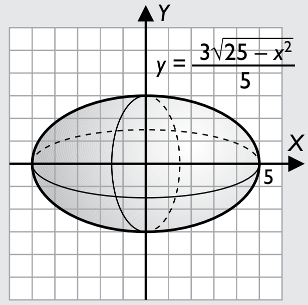
b) Dibujo:



$\displaystyle V = \pi\int_0^2 x^4\, dx = \frac{32\pi}{5}\ u^3$

105 Al girar la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ alrededor del eje X, esta genera una superficie parecida a un huevo, que se llama elipsoide. Halla el volumen de dicho elipsoide.

Solución:



$\displaystyle V = 2\pi\frac{9}{25}\int_0^5 (25 - x^2)\, dx = 60\pi\ u^3$

Para profundizar

106 Calcula el valor de $a > 0$ para que:

$$\int_0^3 \frac{1}{x + a}\, dx = 5$$

Solución:

$\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\, dx = \ln (3 + a) - \ln a = \ln \frac{3 + a}{a}$

$\ln \dfrac{3 + a}{a} = 5 \Rightarrow \dfrac{3 + a}{a} = e^5 \Rightarrow a = \dfrac{3}{e^5 - 1}$

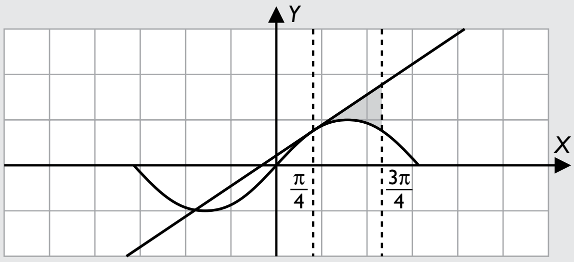
107 Sea la función $f(x) = \text{sen } x$

a) Calcula la ecuación de la tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{4}$

b) Calcula el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = \dfrac{\pi}{4},\ x = \dfrac{3\pi}{4}$

Solución:

a) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4} + 1\right)$



$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4} + 1\right) - \operatorname{sen} x\right] dx =$$

$$= \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} = 0{,}57 \text{ u}^2$$

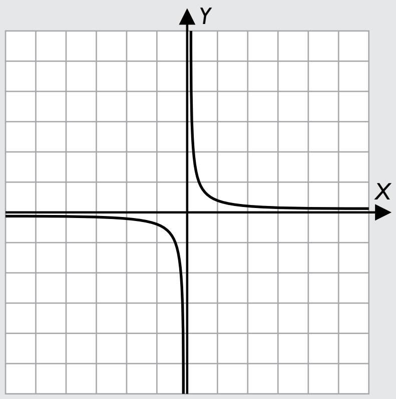
108 Sea la función $f(t) = \dfrac{1}{1 + e^t}$. Se define: $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$

Calcula $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{x}$

Solución:

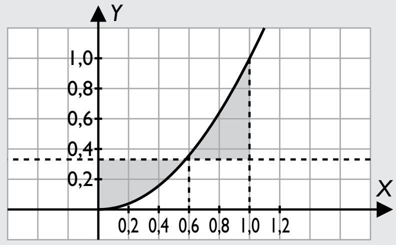
$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1 + e^t}\, dt$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x(1 + e^x)} = \frac{1}{0 \cdot 2} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$



109 Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde a es un número real comprendido entre 0 y 1$(0 < a < 1)$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$

Solución:



Al punto (x_0, y_0) se le puede llamar $\left(\sqrt{a}, a\right)$

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a)\, dx$$

$$\frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a} - a + \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

110 Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -1 \\ a - 2x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ b/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

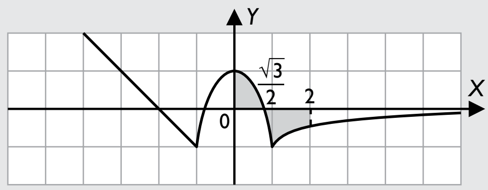
a) Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real.

b) Con los valores de a y b determinados en el apartado anterior, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas, en el intervalo [0, 2]

Solución:

a) Para que $f(x)$ sea continua, $a = 1$, $b = -1$

b) Dibujo:



$$\int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - 2x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\sqrt{2}/2}^1 (1 - 2x^2)\, dx = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$$

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\ln 2$$

$$\text{Área} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} + \ln 2 = 1{,}30 \text{ u}^2$$

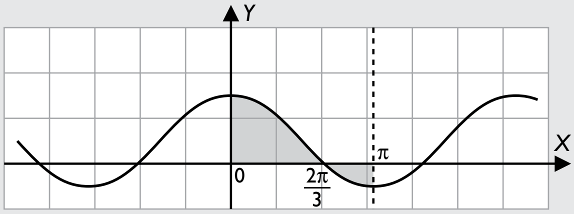
111 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dibuja el recinto limitado por $y = \dfrac{1}{2} + \cos x$, los ejes de coordenadas y la recta $x = \pi$

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución:

a) Dibujo:



$$\int_0^{2\pi/3}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_{2\pi/3}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

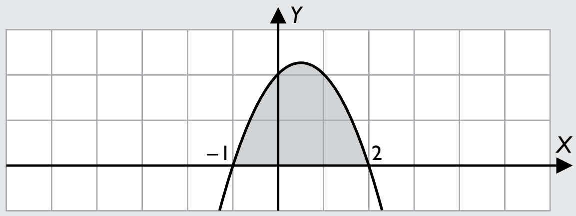
$$\text{Área}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}=2{,}26\ \text{u}^2$$

112 Considera la siguiente función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=2+x-x^2$$

Calcula a, $a<2$, de forma que $\int_a^2 f(x)\,dx=\frac{9}{2}$

Solución:



$$\int_a^2 (2+x+x^2)\,dx=\frac{9}{2}$$

$$\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}-2a+\frac{10}{3}=\frac{9}{2}\Rightarrow a=-1,\ a=\frac{7}{2}$$

El valor $a<2$ es $a=-1$

113 Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\frac{dx}{x^2+4x+3}$$

¿Qué representa geométricamente?

Representa el área comprendida entre el eje X y la curva en el intervalo [0, 2]

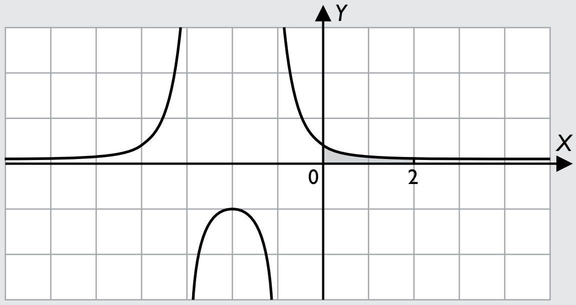
Solución:

a) $F(x)=\frac{1}{2}(\ln|x+1|-\ln|x+3|)$

b) $F(0)=\frac{1}{2}(-\ln 3)$, $F(2)=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 5)$

c) $\int_0^2\frac{dx}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}(2\ln 3-\ln 5)=0{,}29\ \text{u}^2$

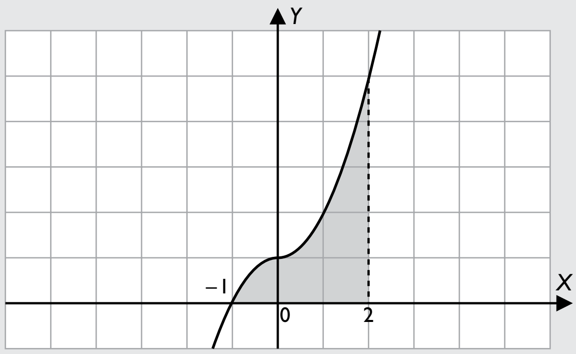
Gráficamente, representa el área comprendida entre el eje X y la curva en el intervalo [0, 2]



114 Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida en la forma $f(x)=1+x\,|x|$

Calcula $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$

Solución:



$$\int_{-1}^0 (1-x^2)\,dx=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx=\frac{14}{3}$$

$$\text{Área}=\frac{16}{3}=5{,}33\ \text{u}^2$$

115 De la gráfica de la función polinómica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

se conocen los siguientes datos: que pasa por el origen de coordenadas y que en los puntos de abscisas 1 y –3 tiene tangentes paralelas a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

a) Calcula a, b y c

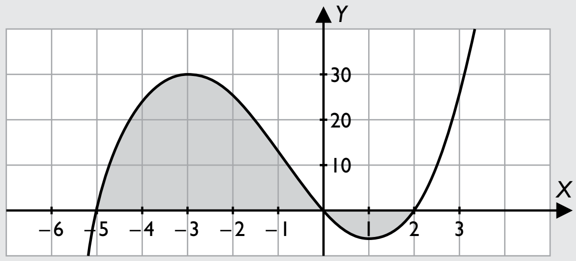
b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas, y calcula su área.

Solución:

a) $a=3$, $b=-10$, $c=0$

$f(x)=x^3+3x^2-10x$

b) Dibujo:



Raíces: $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2$$

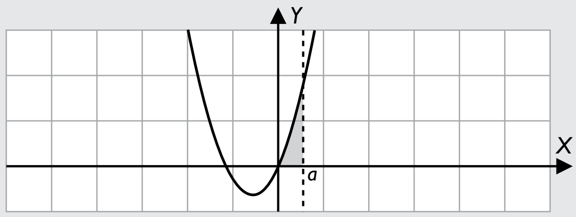
$$F(-5) = -\frac{375}{4},\ F(0) = 0,\ F(2) = -8$$

$$\text{Área} = \frac{407}{4} = 101{,}75\ \text{u}^2$$

116 Determina una constante positiva a sabiendo que la figura plana limitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$ tiene área $(a^2 - 1)^2$

Solución:

La parábola pasa por el origen de coordenadas.



$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)\ dx = a^4 + a^2$$

Por tanto:

$a^4 + a^2 = (a^2 - 1)^2$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3},\ a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solo se toma el resultado positivo, como indica el enunciado del problema.

117 Justifica geométricamente que si $f(x)$ es una función positiva definida en el intervalo $[a, b]$ y $c \in [a, b]$, entonces se cumple:

$$\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Solución:

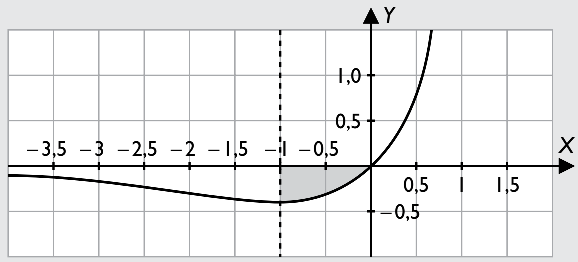
- La 1.ª integral es el área comprendida entre el eje X y la curva $f(x)$ en el intervalo $[a, c]$
- La 2.ª integral es el área comprendida entre el eje X y la curva $f(x)$ en el intervalo $[c, b]$
- La integral del 2.º miembro es el área comprendida entre el eje X y la curva $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$

Y como el intervalo $[a, b]$ se divide en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, ambos miembros representan la misma área.

118 Halla el área del recinto limitado por la curva $y = xe^x$, el eje X y la recta paralela al eje Y que pasa por el punto donde la curva tiene un mínimo relativo.

Solución:

La función tiene un mínimo relativo para $x = -1$



$$\int_{-1}^0 (x\ e^x)\ dx = \frac{2}{e} - 1$$

$$\text{Área} = 1 - \frac{2}{e} = 0{,}26\ \text{u}^2$$

Practica

121 Dibuja el recinto correspondiente y calcula la siguiente integral definida:

$$\int_2^5 (x-1)\,dx$$

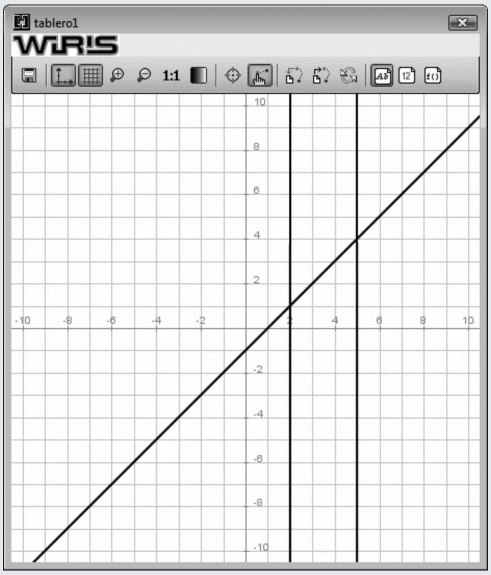
Observa y justifica el signo del valor obtenido.

Solución:

Problema 121
f(x) = x − 1;
dibujar(x = 2, {color = verde, anchura_línea = 2})
dibujar(x = 5, {color = verde, anchura_línea = 2})
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
resolver(f(x) = 0) ⇒ {{x=1}}
Hay una sola región en el intervalo [2, 5]

$$\int_2^5 f(x)\,dx \Rightarrow \frac{15}{2}$$

El signo es positivo porque la región está encima del eje X



122 Dibuja el recinto correspondiente y calcula la siguiente integral definida:

$$\int_1^4 (x^2-6x+4)\,dx$$

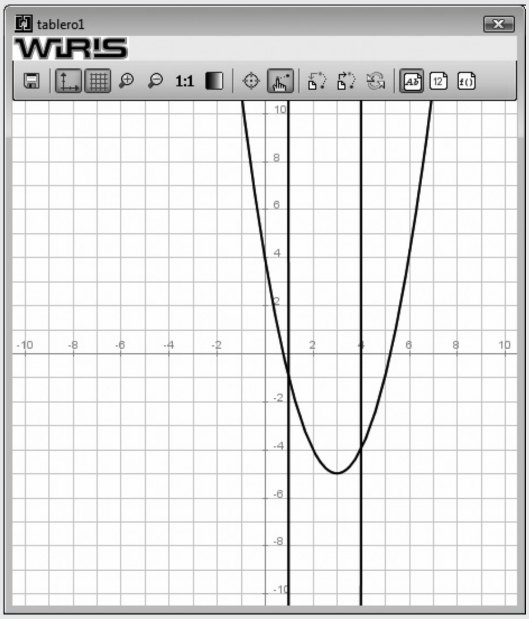
Observa y justifica el signo del valor obtenido.

Solución:

Problema 122
f(x) = x^2 − 6x + 4;
dibujar(x = 1, {color = verde, anchura_línea = 2})
dibujar(x = 4, {color = verde, anchura_línea = 2})
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
resolver(f(x) = 0) ⇒ $\{\{x=-\sqrt{5}+3\},\{x=\sqrt{5}+3\}\}$
Hay una sola región en el intervalo [1, 4]

$$\int_1^4 f(x)\,dx \Rightarrow -12$$

El signo es negativo porque la región está debajo del eje X



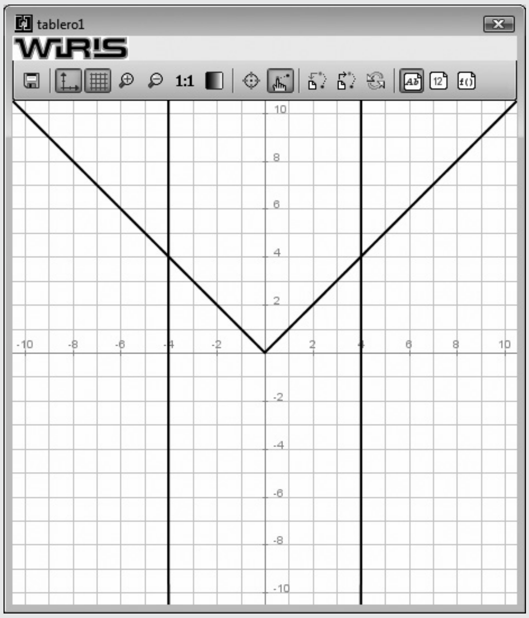
123 Dibuja el recinto correspondiente y calcula la siguiente integral definida:

$$\int_{-4}^4 |x|\,dx$$

Solución:

Problema 123
f(x) = |x|;
dibujar(x = −4, {color = verde, anchura_línea = 2})
dibujar(x = 4, {color = verde, anchura_línea = 2})
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

$$\int_{-4}^4 f(x)\,dx \Rightarrow 16$$



124 Calcula la derivada de la función:

$$\int_{x^2}^{x^3} \ln t \, dt$$

Solución:

Problema 124

$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln(t)\, dt \Rightarrow x \mapsto x^3 \cdot \ln(x^3) - x^2 \cdot \ln(x^2) + (-x^3 + x^2)$

$F'(x) \Rightarrow (9 \cdot x^2 - 4 \cdot x) \cdot \ln(x)$

125 Dibuja el recinto limitado por las siguientes funciones y calcula su área:

$$f(x) = 4 - x^2 \quad g(x) = 2x + 1$$

Solución:

Problema 125

$f(x) = 4 - x^2$;

$g(x) = 2x + 1 \Rightarrow x \mapsto 2 \cdot x + 1$

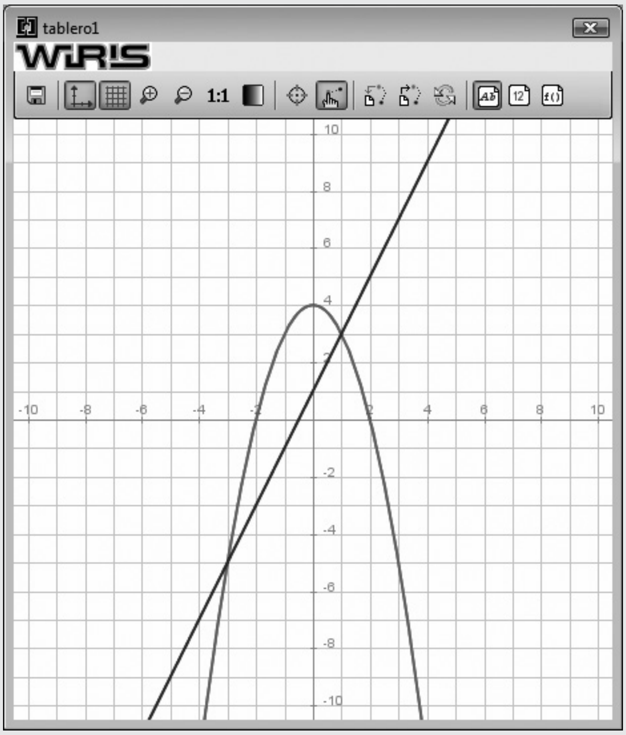
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(g(x), {color = azul, anchura_línea = 2})

resolver(f(x) = g(x)) $\Rightarrow$ {{x=−3}, {x=1}}

$\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \Rightarrow \frac{32}{3}$

Área $= \frac{32}{3}$ u^2



126 Dibuja y calcula el área del recinto limitado por el eje *X* y la función:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$$

Solución:

Problema 126

$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$;

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

resolver(f(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=−1}, {x=0}, {x=2}}

Hay dos regiones en los intervalos [−1, 0] y [0, 2]

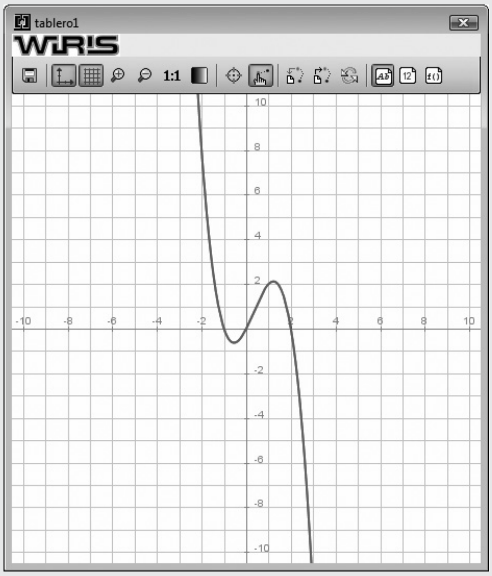
$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx \Rightarrow -\frac{5}{12}$

$\int_{0}^{2} f(x)\, dx \Rightarrow \frac{8}{3}$

$\left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{8}{3}\right| \Rightarrow \frac{37}{12}$

$\frac{37.}{12} \Rightarrow 3.0833$

Área $= \frac{37}{12}$ u^2 = 3,08 u^2



127 Calcula el área encerrada por las funciones:

$$f(x) = x^3 + 3x^2, \; g(x) = x + 3$$

Solución:

Problema 127

$f(x) = x^3 + 3x^2$;

$g(x) = x + 3$;

resolver(f(x) = g(x)) $\Rightarrow$ {{x=−3}, {x=−1}, {x=1}}

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(g(x), {color = azul, anchura_línea = 2})

dibujar(x = −3, {color = verde, anchura_línea = 2})

dibujar(x = −1, {color = verde, anchura_línea = 2})

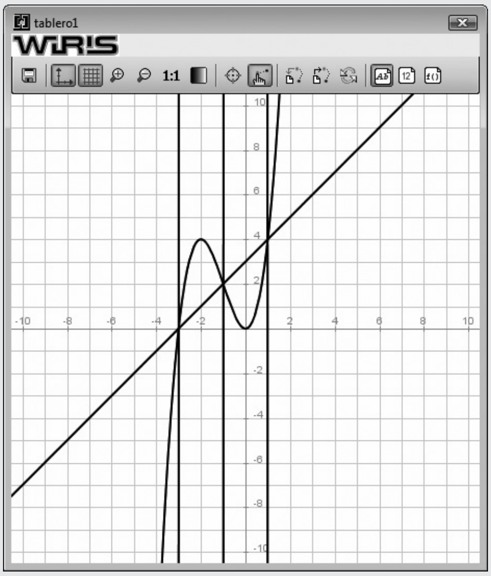
dibujar(x = 1, {color = verde, anchura_línea = 2})

$\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x))\, dx \Rightarrow 4$

$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \Rightarrow -4$

Área = |4| + |−4| $\Rightarrow$ 8

Área= 8 u^2



128 Un objeto se deja caer en el vacío. Suponiendo que la gravedad es de 9,8 m/s^2, calcula la velocidad que lleva al cabo de 4 s y el espacio recorrido. Dibuja las funciones correspondientes a la velocidad y a la aceleración.

Solución:

Problema 128

$a(t) = 9.8;$

$v(t) = \int a(t)\,dt \rightarrow t \mapsto 9.8 \cdot t$

dibujar(v(t), {color = rojo, anchura_línea = 2})

$v(4) \rightarrow 39.2$

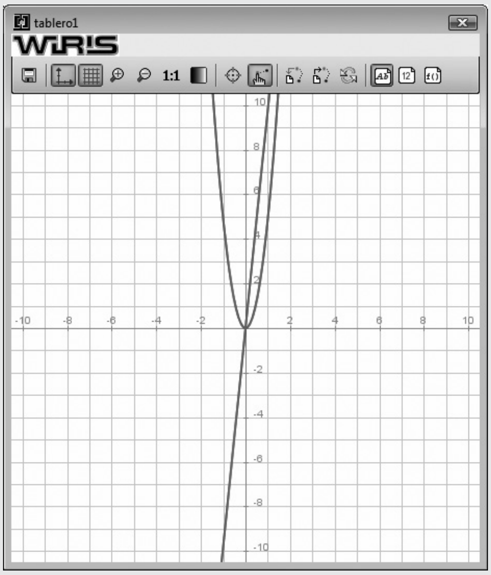
Velocidad = 39,2 m/s

$e(t) = \int v(t)\,dt \rightarrow t \mapsto 4.9 \cdot t^2$

dibujar(e(t), {color = rojo, anchura_línea = 2})

$e(4) \rightarrow 78.4$

Espacio = 78,4 m



129 La función que mide el caudal de un río en función de los meses del año viene dada por:

$$f(x) = 3 + 2\cos\frac{\pi x}{6}$$

donde $f(x)$ está dado en miles de hectolitros por mes, y x en meses.

a) ¿Qué cantidad de agua pasa por el río en un año?

b) Dibuja la región correspondiente a la cantidad de agua que lleva el río.

Solución:

Problema 129

$f(x) = 3 + 2\cos\frac{\pi x}{6};$

dibujar(x = 0, {color = verde, anchura_línea = 2})

dibujar(x = 12, {color = verde, anchura_línea = 2})

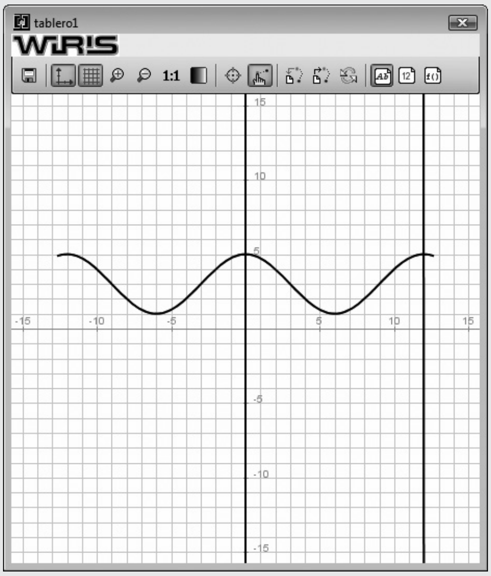
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow$ {□}

Hay una única región en el intervalo [0, 12]

$\int_0^{12} f(x)\,dx \rightarrow 36$

Volumen = 36 miles de hectolitros.



130 Deduce la fórmula del volumen de una pirámide.

Solución:

Problema 130

$A(x) = \frac{B}{H^2} \cdot x^2;$

$\int_0^{H} A(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$

131 Calcula el volumen generado por la función

$$f(x) = \frac{x}{3}$$

cuando gira alrededor del eje X, en el intervalo [3, 9]

Solución:

Problema 131

$f(x) = \frac{x}{3}$;

dibujar(x = 3, {color=verde, anchura_línea = 2})

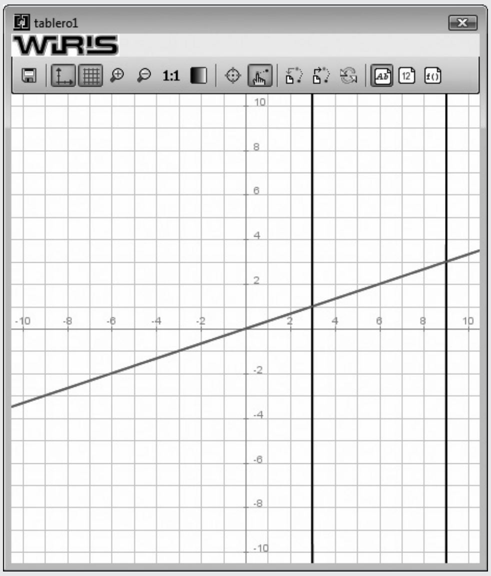
dibujar(x = 9, {color=verde, anchura_línea = 2})

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea = 2})

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=0}}

$\pi \int_3^9 (f(x)^2)\, dx \rightarrow 26 \cdot \pi$

Volumen = 26π u^3



132 Calcula el valor de a para que el área de la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$ sea el doble del área de la región limitada por dicha parábola y la recta $y = 1$

Solución:

Problema 132

$f(x) = 1 - x^2$;

$F(x) = \int f(x)\, dx \rightarrow x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot x^3 + x$

$F(0) \rightarrow 0$

$F(1) \rightarrow \frac{2}{3}$

$F(1) - F(0) \rightarrow \frac{2}{3}$

Área = $\frac{2}{3}$ u^2

$g(x) = a - x^2 \rightarrow x \mapsto a - x^2$

$G(x) = \int g(x)\, dx \rightarrow x \mapsto a \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3$

$G(0) \rightarrow 0$

$G(\sqrt{a}) \rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3}$

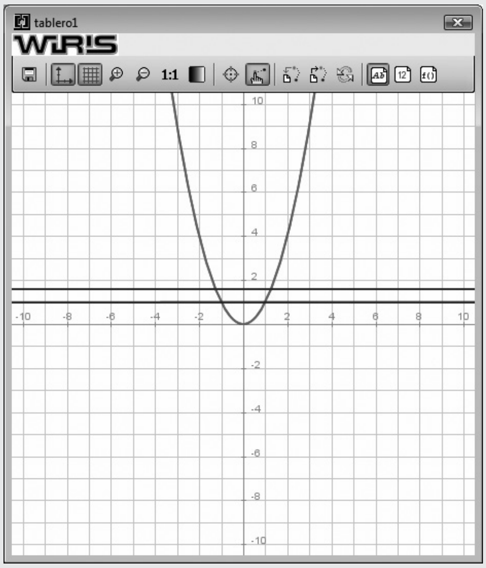
$G(\sqrt{a}) - G(0) \rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3}$

resolver$\left(\frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3}\right) \rightarrow$ {{a=$\sqrt[3]{2^2}$}}

dibujar(x^2, {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(y = 1, {color = azul, anchura_línea = 2})

dibujar(y = $\sqrt[3]{2^2}$, {color = azul, anchura_línea = 2})



133 Dada la función: $f(x) = 2x + |x^2 - 1|$ calcula:

$$\int_0^2 f(x)\, dx$$

Solución:

Ejercicio 133

$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$;

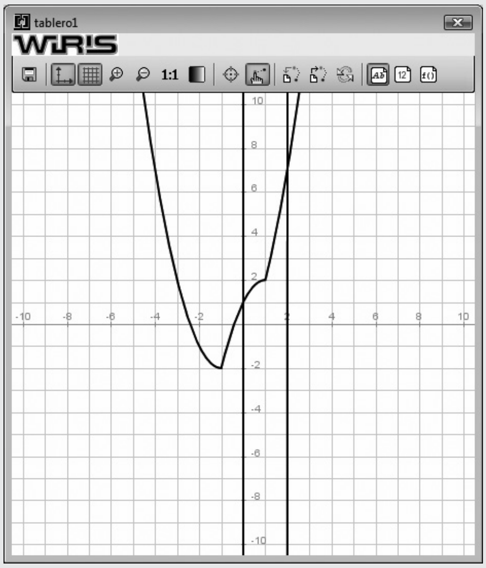
$\int_0^2 f(x)\, dx \rightarrow 6$

Área = 6 u^2

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(x = 0, {color = verde, anchura_línea = 2})

dibujar(x = 2, {color = verde, anchura_línea = 2})



Ponte a prueba

1 Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$

a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1/2$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución:

a) Calculamos la recta tangente:

$x = -1/2 \Rightarrow y = e$, $P(-1/2, e)$

$f'(x) = -2e^{-2x}$

$f'(-1/2) = -2e$

Ecuación de la recta tangente:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

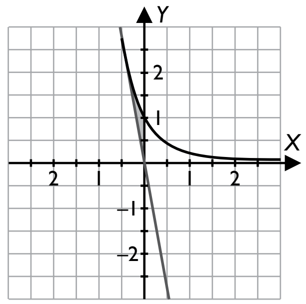
$y - e = -2e(x + 1/2)$

$y - e = -2ex - e$

$y = -2ex$

b) Cálculo del área:

El recinto está comprendido entre la función $f(x) = e^{-2x}$ y la recta tangente $g(x) = -2ex$ en el intervalo $[-1/2, 0]$



Función diferencia:

$f(x) - g(x) = e^{-2x} + 2ex$

$$F(x) = \int (e^{-2x} + 2ex)\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + ex^2$$

$F(-1/2) = -e/4$, $F(0) = -1/2$

Área $= |F(0) - F(-1/2)| = |-1/2 + e/4| = e/4 - 1/2 = 0{,}18\ u^2$

2 Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista señala que dada la estructura de la empresa, solo puede optar a dos tipos, *A* o *B*; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo *A* instaladas y el cuadrado del número de alarmas instalas del tipo *B*. Estudia cuántas alarmas de cada tipo deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad.

Solución:

Planteamiento:

N.º de alarmas del tipo *A*: x

N.º de alarmas del tipo *B*: y

Seguridad $(x, y) = 0{,}1xy^2$

Condiciones: $x + y = 9$

$S(x, y) = 0{,}1xy^2$

$S(x) = 0{,}1x(9 - x)^2 = 0{,}1x^3 - 1{,}8x^2 + 8{,}1x$

$S'(x) = 0{,}3x^2 - 3{,}6x + 8{,}1 \Rightarrow 0{,}3x^2 - 3{,}6x + 8{,}1 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = 9$

$S''(x) = 0{,}6x - 3{,}6$

$S''(3) = -1{,}8$ Máximo relativo

$S''(9) = 1{,}8$ Mínimo relativo

N.º de alarmas: 3 del tipo *A* y 6 del tipo *B*

3 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determina su dominio de definición, estudia su continuidad y halla las asíntotas.

b) Esboza una gráfica de la función.

c) Halla los puntos donde la recta tangente es paralela a la recta $x + 4y = 0$

Solución:

a) Para $x < 2$ es una hipérbola, y para $x \geq 2$, una parábola.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Estudiamos $x = 2$

$f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{2^- - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = (2^+)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

Como los límites laterales son iguales e igual al valor de la función, $f(x)$ es continua en $x = 2$

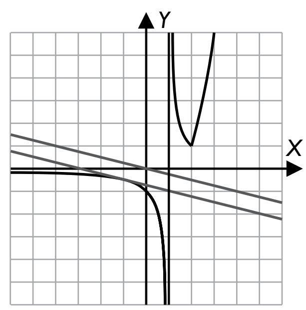
$f(x)$ es continua en todo su dominio, por estar definida por una función polinómica y otra racional; donde podía tener problemas es en $x = 2$ y hemos visto que también es continua.

Asíntotas: las funciones polinómicas nunca las tienen; la hipérbola tiene dos asíntotas:

Vertical: $x = 1$

Horizontal: $y = 0$

b) Un trozo de una hipérbola y otro trozo de una parábola.



c) Para que sean paralelas han de tener la misma pendiente.

$x + 4y = 0 \Rightarrow 4y = -x \Rightarrow y = -x/4 \Rightarrow m = -1/4$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow$$

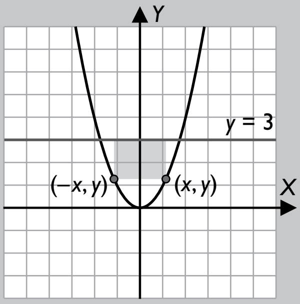
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$x = 3$ no es menor que 2

$x = -1 \Rightarrow y = -1/2$, el punto es $P(-1, -1/2)$

$2x = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{8}$ no es mayor que 2

4 Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$:



De entre todos los rectángulos situados como el de la figura anterior, determinar el que tiene área máxima.

Solución:

Planteamiento: Área$(x, y) = 2x(3 - y)$

Condiciones: $y = x^2$

$A(x, y) = 2x(3 - y)$

$A(x) = 2x(3 - x^2) = 6x - 2x^3$

$A'(x) = 6 - 6x^2 \Rightarrow 6 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$, un vértice del rectángulo es $P(1, 1)$

$A''(x) = -12x$

$x = -1$ no tiene sentido, x es una longitud.

$A''(1) = -12$ Máximo relativo

El rectángulo tiene de base 2 unidades y de altura 2 unidades, es un cuadrado, que es un caso particular de rectángulo.

5 Determina los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función:

$$f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$$

tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y además pase por el punto $(1, -1/e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

Si $f(x)$ tiene un extremo relativo para $x = 3$:

$f'(3) = 0$

$f'(x) = (-ax^2 + 2ax - bx + b)e^{-x}$

$f'(3) = (-9a + 6a - 3b + b)e^{-3} = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$

Si $f(x)$ pasa por el punto $(1, -1/e) \Rightarrow f(1) = -1/e$

$f(1) = (a + b)e^{-1} \Rightarrow (a + b)e^{-1} = -1/e$

$\Rightarrow a + b = -1$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 2b = 0 \\ a + b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2, b = -3$$

Ecuación de la recta tangente:

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

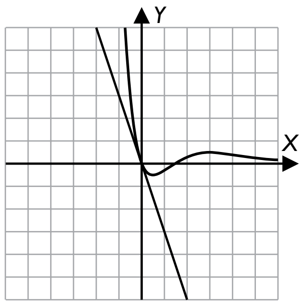
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$f'(x) = (-ax^2 + 2ax - bx + b)e^{-x}$

$f'(0) = -3$

$y = -3x$

La ecuación de la recta tangente es $y = -3x$



6 Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

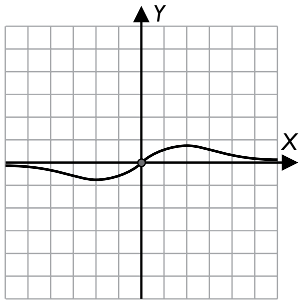
Para $x \neq 0$, $f(x)$ está definida por el cociente de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}$; así que será continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en las raíces del denominador.

Para $x = 0$, está definida con $f(0) = 0$

Tenemos que probar que el límite coincide con ese valor:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$$

Como sí coincide, la función es continua en x = 0 y, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$



7 Calcula la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto (0, 1) (es decir, $f(0) = 1$) y que tiene como derivada la función:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Solución:

Hallamos la primitiva:

Como en el numerador está la derivada del denominador, es el logaritmo neperiano del denominador:

$$f(x) = \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx = \ln |x^2 + 1| + k$$

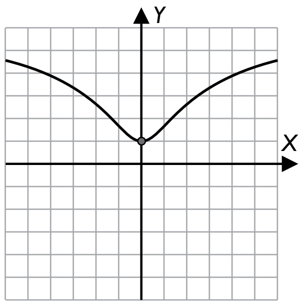
Para hallar el valor de k, le ponemos la condición de que pasa por el punto (0, 1)

$f(0) = 1$

$f(0) = \ln |0^2 + 1| + k = \ln |0 + 1| + k = \ln |1| + k = 0 + k = k$

Por tanto, $k = 1$

$f(x) = \ln |x^2 + 1| + 1$



8 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) Determina una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$

Solución:

a) Máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión:

Máximos y mínimos relativos:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = 5/2 \Rightarrow A(-1, 5/2)$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$$

$f''(-1) = 1/2 > 0\ (+) \Rightarrow A(-1, 5/2)$ Mínimo relativo

$x = 1 \Rightarrow y = 7/2 \Rightarrow B(1, 7/2)$

$f''(1) = -1/2 < 0\ (-) \Rightarrow B(1, 7/2)$ Máximo relativo

Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(0, 3)$

$$f'''(x) = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2 + 1)^4}$$

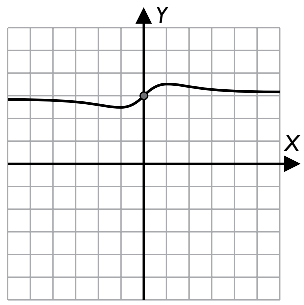
$f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow C(0, 3)$ Punto de inflexión

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \dfrac{12 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow D\left(-\sqrt{3}, \dfrac{12 - \sqrt{3}}{4}\right)$

$f'''(-\sqrt{3}) = 3/16 \neq 0 \Rightarrow D\left(-\sqrt{3}, \dfrac{12 - \sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión

$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \dfrac{12 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow E\left(\sqrt{3}, \dfrac{12 + \sqrt{3}}{4}\right)$

$f'''(\sqrt{3}) = 3/16 \neq 0 \Rightarrow E\left(\sqrt{3}, \dfrac{12 + \sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión



b) Hallamos la primitiva:

$$\frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} = 3 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}\, dx = \int \left(3 + \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx =$$

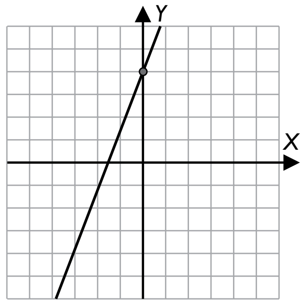
$$= 3x + \frac{1}{2} \cdot \ln |x^2 + 1| + k$$

Para hallar el valor de k, le ponemos la condición de que $F(0) = 4$

$F(0) = 3 \cdot 0 + 1/2 \ln |0^2 + 1| + k = 0 + \ln |0 + 1| + k =$
$= \ln |1| + k = 0 + k = k$

Por tanto $k = 4$

$F(x) = 3x + 1/2 \ln |x^2 + 1| + 4$



9 Dada la función

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2 - 4}$$

se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X

b) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

c) Asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada.

Solución:

a) Dominio: por ser una función racional tenemos que excluir las raíces del denominador.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Corte con los ejes:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4}$$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$

Corta al eje X en los puntos $A(-1, 0)$; $B(4, 0)$

b) Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$

$$\lim_{x \to -2^-} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - \frac{3 \cdot (-2^-)}{(-2^-)^2 - 4} = 1 - \frac{-6}{4^+ - 4} =$$

$$= 1 + \frac{6}{0^+} \to +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - \frac{3 \cdot (-2^+)}{(-2^+)^2 - 4} = 1 - \frac{-6}{4^- - 4} =$$

$$= 1 + \frac{6}{0^-} \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - \frac{3 \cdot 2^-}{(2^-)^2 - 4} = 1 - \frac{6}{4^- - 4} =$$

$$= 1 - \frac{6}{0^-} \to +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - \frac{3 \cdot 2^+}{(2^+)^2 - 4} = 1 - \frac{6}{4^+ - 4} =$$

$$= 1 - \frac{6}{0^+} \to -\infty$$

c) Asíntotas horizontales y oblicuas:

Asíntota horizontal:

$$h = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - 0 = 1$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

Para que una función racional tenga asíntota oblicua, el grado del numerador debe ser una unidad mayor que el grado del denominador.

d) Máximos y mínimos relativos:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 12}{(x^2 - 4)^2}$$

El numerador nunca se anula.

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Monotonía:

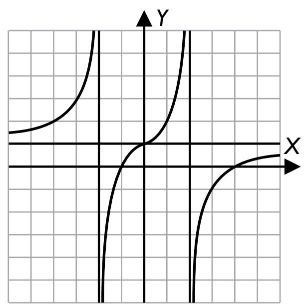
Tenemos que marcar las discontinuidades de la primera derivada, $x = -2$, $x = 2$, que tienen de multiplicidad 2, es decir, par.

$f'(x)$	+		+		+
x		-2	0	2	

Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

e) Gráfica:

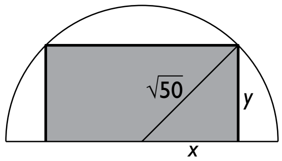


10 En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtén razonadamente:

a) el área del rectángulo en función de x

b) el valor de x para el que el área del rectángulo es máxima.

Solución:



a) Llamamos x a la mitad de la base del rectángulo.

Área del rectángulo en función de x

Planteamiento: Área$(x, y) = 2xy$

Condiciones: $x^2 + y^2 = 50$

Despejamos y de la condición:

$y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$

$A(x, y) = 2x\sqrt{50 - x^2}$

b) Hallamos x derivando:

$$A'(x) = \frac{100 - 4x^2}{\sqrt{50 - x^2}} \Rightarrow 100 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 25 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = -5, x = 5$

$x = -5$ no tiene sentido; x es una longitud.

$x = 5 \Rightarrow y = 5$

$$A'(x) = \frac{4x^3 - 300x}{(50 - x^2)\sqrt{50 - x^2}}$$

$A''(5) = -8 < 0$ (–) Máximo relativo

El rectángulo tiene de base 10 metros, y de altura, 5 metros.