Unidad 13.
Integral indefinida

1. Reglas de integración

Piensa y calcula

Calcula:

a) $y = x^5$, $y' = \blacksquare$ b) $y' = 3x^2$, $y = \blacksquare$

c) $y = \cos x$, $y' = \blacksquare$ d) $y' = \cos x$, $y = \blacksquare$

Solución:

a) $y' = 5x^4$ b) $y = x^3$

c) $y' = -\text{sen}\, x$ d) $y = \text{sen}\, x$

Aplica la teoría

Calcula:

1 $\int 3(3x - 5)^7\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$\dfrac{(3x - 5)^8}{8} + k$

2 $\int \dfrac{dx}{(3x + 5)^3}$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$-\dfrac{1}{6(3x + 5)^2} + k$

3 $\int \cos \dfrac{x}{6}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$6\, \text{sen}\, \dfrac{x}{6} + k$

4 $\int e^x\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$e^x + k$

5 $\int \dfrac{dx}{x + 3}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$\ln |x + 3| + k$

6 $\int (e^x - \text{sen}\, x)\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$e^x + \cos x + k$

7 $\int 2^{6x}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$\dfrac{2^{6x - 1}}{3 \ln 2} + k$

8 $\int \dfrac{x\, dx}{x^2 - 1}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$\dfrac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + k$

9 $\int 2x \operatorname{sen} x^2\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos x^2 + k$

10 $\int \frac{7\, dx}{2\sqrt{7x+5}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$\sqrt{7x+5} + k$

11 $\int 3 \cos 3x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{sen} 3x + k$

12 $\int \frac{dx}{9+x^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + k$

13 $\int \sec^2 (3x+1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3} \operatorname{tg} (3x+1) + k$

14 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + k$

15 $\int 5 \operatorname{sen} x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-5 \cos x + k$

16 $\int (x^3 - 6x^2 + 1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$

17 $\int \operatorname{cosec}^2 (5x-1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{5} \operatorname{cotg}(5x-1) + k$

18 $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$2\sqrt{x-1} + k$

19 $\int e^{x/2}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$2\, e^{x/2} + k$

20 $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.
$-\cos x + \operatorname{sen} x + k$

21 $\int \frac{3}{(x-3)^4}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{(x-3)^3} + k$

22 $\int (4x+1)^5\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{(4x+1)^6}{24} + k$

23 $\int \operatorname{cotg} (-2x+1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{2} \ln |\operatorname{sen} (2x-1)| + k$

24 $\int 3 \cdot 2^{3x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$\frac{2^{3x}}{\ln 2} + k$

25 $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{6(2x-1)^3} + k$

26 $\int 3 \operatorname{cotg} 3x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\ln |\operatorname{sen} 3x| + k$

27 $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$\ln |x^2 - 3x + 5| + k$

28 $\int 5 \operatorname{sen} 5x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos 5x + k$

29 $\int 2 \operatorname{tg} 2x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\ln |\cos 2x| + k$

30 $\int 2 \sqrt[5]{2x} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$\frac{5x \sqrt[5]{2x}}{3} + k$

31 $\int \frac{2 \, dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{arc} \operatorname{sen} 2x + k$

32 $\int e^x \operatorname{sen} e^x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos e^x + k$

33 $\int e^{-7x} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$-\frac{e^{-7x}}{7} + k$

34 $\int \frac{dx}{1-x}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$-\ln |1-x| + k$

35 $\int 2x \operatorname{tg} x^2 \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\ln |\cos x^2| + k$

36 $\int \cos (5x-1) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{5} \operatorname{sen} (5x-1) + k$

37 $\int \frac{3 \, dx}{1+(3x)^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x + k$

38 $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-2 \cos \frac{x}{2} + k$

39 $\int (x^4 - 2x - 5) \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$

40 $\int e^x \cos e^x \, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{sen} e^x + k$

2. Integración por partes

Piensa y calcula

Calcula la derivada de: $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$

Solución:
$y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$

Aplica la teoría

Calcula:

41 $\int xe^x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 1) + k$$

42 $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

El resultado es:

$$-x \cos x + \operatorname{sen} x + k$$

43 $\int (x + 5) \cos x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x + 5$$
$$dv = \cos x\, dx$$

El resultado es:

$$(x + 5) \operatorname{sen} x + \cos x + k$$

44 $\int \operatorname{sen} (\ln x)\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{sen} (\ln x)$$
$$dv = dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es: $\frac{x}{2}(\operatorname{sen} (\ln x) - \cos (\ln x)) + k$

45 $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc\,sen} x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$$

46 $\int x^2 e^{-x}\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-x}dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.
El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k$$

47 $\int x^3 \ln x\, dx$

Solución:
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \ln x$$
$$dv = x^3\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^4}{4} \ln |x| - \frac{x^4}{16} + k$$

48 $\int (x^2 - 1) \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$
$$dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(-x^2 + 3) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + k$$

49 $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln x$$
$$dv = (x^2 + 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln |x| - \frac{x^3}{9} - x + k$$

50 $\int x^2 \cos x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = \cos x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(x^2 - 2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + k$$

51 $\int (x + 2) e^x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x + 2$$
$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x + 1) + k$$

52 $\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{sen} x$$
$$dv = e^{-x} \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación. El resultado es:

$$-\frac{1}{2} e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x) + k$$

53 $\int \ln (x + 1) \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln (x + 1)$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x + 1) \ln |x + 1| - x + k$$

54 $\int (x^2 + 4) e^x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 4$$
$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 6) + k$$

55 $\int e^x \cos x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + k$$

56 $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc\,tg} x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

Piensa y calcula

Realiza la siguiente división entera y haz la prueba: $39 \;\underline{|\;5\;\;}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} 39 & 5 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$$

Prueba: $39 = 5 \cdot 7 + 4$

Aplica la teoría

Calcula las siguientes integrales:

57 $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 3}{x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{3}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x| + k$$

58 $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x - 3}{x - 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 2 + \frac{5}{1 - x}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 2x - 5\ln|x - 1| + k$$

59 $\displaystyle\int \frac{5x + 2}{x^2 + x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1}$$

La integral es:

$$2\ln|x| + 3\ln|x + 1| + k$$

60 $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}$$

La integral es:

$$\ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{5}{2x^2} + k$$

61 $\displaystyle\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x + 3} - \frac{2}{(x + 3)^2}$$

La integral es:

$$5\ln|x + 3| + \frac{2}{x + 3} + k$$

62 $\displaystyle\int \frac{x^2 + 8x + 10}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x + 3} + \frac{2}{(x + 3)^2} - \frac{5}{(x + 3)^3}$$

La integral es:

$$\ln|x + 3| - \frac{2}{x + 3} + \frac{5}{2(x + 3)^2} + k$$

63 $\displaystyle\int \frac{3x^2 - x - 9}{x + 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 5x + \ln|x + 2| + k$$

64 $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 10}{x^2 - 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 2 + \frac{3}{x - 1} - \frac{5}{x + 1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x - 1| - 5\ln|x + 1| + k$$

65 $\displaystyle\int \frac{8x + 7}{x^2 + x - 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1}$$

La integral es:

$$3\ln|x + 2| + 5\ln|x - 1| + k$$

66 $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2}$$

La integral es:

$$2\ln|x - 1| - \frac{5}{x - 1} + k$$

67 $\displaystyle\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{(x - 2)^2} + \frac{5}{(x - 2)^3}$$

La integral es:

$$\ln|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2(x - 2)^2} + k$$

68 $\displaystyle\int \frac{x^2 - 12x + 12}{x^3 - 4x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$-\frac{3}{x} - \frac{1}{x - 2} + \frac{5}{x + 2}$$

La integral es:

$$-3\ln|x| - \ln|x - 2| + 5\ln|x + 2| + k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces imaginarias de la siguiente ecuación:

$$x^2 + 9 = 0$$

Solución:

$x = \pm 3i$

Aplica la teoría

Calcula las siguientes integrales:

69 $\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 1 \pm 2i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$\ln |x^2 - 2x + 5| + \frac{3}{2} \text{ arc tg } \frac{x - 1}{2} + k$$

70 $\int \frac{8x^2 - 18x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = -1$ real simple, $x = 2$ real doble.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 1} + \frac{5}{x - 2} - \frac{1}{(x - 2)^2}$$

La integral es:

$$3 \ln |x + 1| + 5 \ln |x - 2| + \frac{1}{x - 2} + k$$

71 $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 3$ real simple.

$x = \pm 2i$ imaginarias simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x - 3} + \frac{2x + 1}{x^2 + 4}$$

La integral es:

$$\ln |x - 3| + \ln |x^2 + 4| + \frac{1}{2} \text{ arc tg } \frac{x}{2} + k$$

72 $\int \frac{2x + 5}{x^2 + 4x + 5}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = -2 \pm i$ imaginarias simples.

La integral es:

$$\ln |x^2 + 4x + 5| + \text{arc tg } (x + 2) + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes integrales inmediatas.

a) $\int \frac{dx}{x}$

b) $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$

Solución:

a) $\ln |x| + k$ b) $\ln |e^x + 3| + k$

Aplica la teoría

Calcula las siguientes integrales:

73 $\int \frac{dx}{x (\ln x)^2}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\ln x = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$-\frac{1}{\ln x} + k$$

74 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x[(\ln x)^2 - 1]}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\ln x = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\ln[(\ln x)^2 - 1] + k$$

75 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = \ln t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x + 2) + k$$

76 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x - 4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = \ln t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x + 4\ln|e^x - 4| + k$$

77 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+1} = t$$
$$x + 1 = t^2$$
$$x = t^2 - 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+1} + k$$

78 $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+3} = t$$
$$x + 3 = t^2$$
$$x = t^2 - 3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x+3} - 2\ln|\sqrt{x+3} + 1| + k$$

79 $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} - 1| + k$$

80 $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\ln|\sqrt{x} + 1| + k$$

81 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + k$$

82 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x} - 1| + k$$

83 Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Solución:

$$\begin{cases} x^2/2 + k & \text{si } x \le 1 \\ -3x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

84 Sea $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\, dx$

Solución:

$\begin{cases} -\cos x + k & \text{si } x \le 0 \\ \ln |x| + k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

85 Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\, dx$

Solución:

$\begin{cases} x^3/3 + k & \text{si } x \le 1 \\ e^x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

6. Integración de funciones trigonométricas

Piensa y calcula

Escribe la fórmula fundamental de la trigonometría.

Solución:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Aplica la teoría

Calcula:

86 $\int \text{sen } x \cos x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es:

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}^2 x + k$$

87 $\int \text{sen}^3 x \cos x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es:

$$\frac{1}{4}\,\text{sen}^4 x + k$$

88 $\int \text{sen}^4 x \cos x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es: $\frac{1}{5}\,\text{sen}^5 x + k$

89 $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$$

90 $\int \text{sen}^2 x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\,\text{sen } 2x\right) + k$$

91 $\int \text{sen}^4 x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es: $\frac{3x}{8} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{\text{sen } 4x}{32} + k$

92 $\int \text{sen}^2 5x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen $5x$

La integral es:

$$\frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 10x}{20} + k$$

93 $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{sen } t$$
$$dx = \cos t\, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(\text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2}\right) + k$$

94 $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ sen } t$$
$$dx = 4 \cos t\, dt$$

La integral es:

$$8 \text{ arc sen } \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2} + k$$

95 $\int \sqrt{2 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{2} \text{ sen t}$$
$$dx = \sqrt{2} \cos t\, dt$$

La integral es:

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{2 - x^2} + k$$

96 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{tg } t$$
$$dx = \sec^2 t\, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + k$$

97 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ tg } t$$
$$dx = 4 \sec^2 t\, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{16 + x^2}}{16x} + k$$

Ejercicios y problemas

Preguntas tipo test

Calcula las siguientes integrales y señala la solución correcta:

1 $\displaystyle\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx$

- ❑ $\text{arc tg } 2x + k$
- ❑ $\frac{1}{2}\ln|4x^2+1| + k$
- ❑ $x + k$
- ☒ $x - \frac{1}{2}\ln|4x^2+1| + k$

2 $\displaystyle\int \frac{2x^3-9x^2+7x}{x^2-x}\,dx$

- ❑ $2x^2 - x + k$
- ☒ $x^2 - 7x + k$
- ❑ $2x^2 - 7x + \ln|x| + \ln|x-1| + k$
- ❑ $x^2 + \ln|x| + \ln|x-1| + k$

3 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

- ❑ $\ln|x| + \ln|x+1| + k$
- ❑ $\ln|x| + \ln|x-1| + k$
- ☒ $\ln|x| - \ln|x+1| + k$
- ❑ $\ln|x| \cdot \ln|x-1| + k$

4 $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

- ❑ $\ln|x+1| - \frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- ☒ $-\frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- ❑ $\ln|x+1| - \frac{1}{2x^2+4x+2} + k$
- ❑ $-\frac{1}{2x^2+4x+2} + k$

5 $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

- ☒ $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+1| + k$
- ❑ $\frac{x}{2} - \sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1| + k$
- ❑ $\frac{2}{3}\sqrt{x} - x - 4\ln|\sqrt{x}+1| + k$
- ❑ $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1| + k$

6 $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x-1| + 6\ln|x-2| + k$
- ❑ $\frac{x^2-3}{2} + \ln|x-1| + 6\ln|x-2| + k$
- ☒ $\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 6\ln|x+2| + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x^2+3x+2| + k$

7 $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- ☒ $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- ❑ $(x^2-2)\sqrt{x^2+1} + k$
- ❑ $\frac{x^2-2}{3} + \sqrt{x^2+1} + k$

8 $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,dx$

- ☒ $e^{e^x} + k$
- ❑ $x\,e^x + k$
- ❑ $x\,e^{e^x} + k$
- ❑ $\frac{e^{e^x}}{x} + k$

9 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2+4| + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$
- ☒ $\frac{x^2}{2} - 2\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$

10 $\displaystyle\int \frac{4-2x^2}{x}\ln x\,dx$

- ❑ $4(\ln x)^2 - x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + k$
- ☒ $2(\ln x)^2 - x^2\ln x + \frac{x^2}{2} + k$
- ❑ $4(\ln x)^2 - x^2 - \frac{x^2}{2} + k$
- ❑ $2(\ln x)^2 - \ln x + \frac{x^2}{2} + k$

1. Reglas de integración

Calcula las siguientes integrales:

98 $\int 4(4x-1)^5\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(4x-1)^6}{6}+k$$

99 $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{4(x-1)^4}+k$$

100 $\int \cos\frac{3x}{2}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{3x}{2}+k$$

101 $\int e^{-x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x}+k$$

102 $\int \frac{dx}{x-1}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\ln|x-1|+k$$

103 $\int (\cos x - e^{-x})\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$e^{-x}+\mathrm{sen}\,x+k$$

104 $\int 2^{-4x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{2^{-4x}}{4\ln 2}+k$$

105 $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+9|+k$$

106 $\int \mathrm{sen}\,(5-2x)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2}\cos(2x-5)+k$$

107 $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$2\sqrt{3x}+k$$

108 $\int x\cos(x^2+1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(x^2+1)+k$$

109 $\int \frac{dx}{3+x^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}x+k$$

110 $\int x\sec^2 x^2\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x^2+k$$

111 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\mathrm{arc\,sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}x+k$$

112 $\int 5 \text{ sen } 7x\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{7}\cos 7x + k$$

113 $\int (10x^4 + 2x^3 - x - 1)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$2x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - x + k$$

114 $\int \text{cosec}^2 (3 - 4x)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{4}\text{cotg } (3 - 4x) + k$$

115 $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} + k$$

116 $\int e^{x/3}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$3e^{x/3} + k$$

117 $\int (\text{sen } x - \cos x)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$-\cos x - \text{sen } x + k$$

118 $\int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x+2} + \frac{8}{x^5}\right) dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$x^3 + x - \ln|x + 2| - \frac{2}{x^4} + k$$

119 $\int (2x - 1)^3\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(2x-1)^4}{8} + k$$

120 $\int -x \text{ cotg } x^2\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{2}\ln|\text{sen } x^2| + k$$

121 $\int 5 \cdot 7^{-5x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{7^{-5x}}{\ln 7} + k$$

122 $\int \frac{dx}{(x+7)^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x+7} + k$$

123 $\int 2x \text{ cotg } x^2\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\ln|\text{sen } x^2| + k$$

124 $\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 1}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\ln|x^3 + 5x - 1| + k$$

125 $\int \text{sen } (3x + 2)\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{3}\cos (3x + 2) + k$$

126 $\int \operatorname{tg} \frac{x}{4}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-4 \ln \left|\cos \frac{x}{4}\right| + k$$

127 $\int \sqrt[3]{5x + 1}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{3(5x + 1)\sqrt[3]{5x + 1}}{20} + k$$

128 $\int \frac{7\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$7 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + k$$

129 $\int e^{-x} \operatorname{sen} e^{-x}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\cos e^{-x} + k$$

130 $\int e^{5x}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{e^{5x}}{5} + k$$

131 $\int \frac{5\, dx}{5x + 4}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\ln |5x + 4| + k$$

132 $\int \operatorname{tg} (4x + 5)\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{4} \ln |\cos (4x + 5)| + k$$

133 $\int \cos (4 - x)\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\operatorname{sen} (4 - x) + k$$

134 $\int \frac{6\, dx}{1 + (2x)^2}$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$3 \operatorname{arc\,tg} 2x + k$$

135 $\int \operatorname{sen} \frac{4x}{5}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{4} \cos \frac{4x}{5} + k$$

136 $\int \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 8x + 1\right) dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 4x^2 + x + k$$

137 $\int e^{-x} \cos e^{-x}\, dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\operatorname{sen} e^{-x} + k$$

138 Calcula tres primitivas de la función:

$$y = \operatorname{sen} x$$

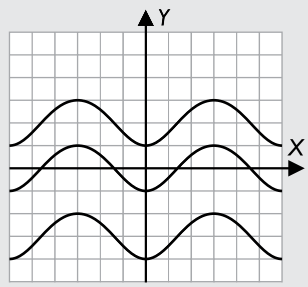
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = -\cos x$

$y = 2 - \cos x$

$y = -3 - \cos x$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

139 Dada la función:

$$y = \cos x$$

a) Calcula su integral indefinida.
b) Halla la primitiva que pasa por el punto $P(0, 3)$
c) Dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

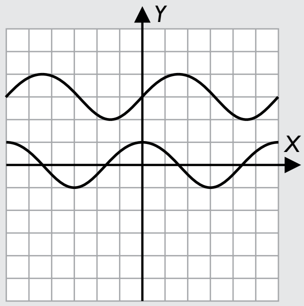
Solución:

a) $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + k$

b) $\text{sen } 0 + k = 3 \Rightarrow k = 3$

$y = 3 + \text{sen } x$

c)



2. Integración por partes

Calcula las siguientes integrales:

140 $\int x \, e^{3x} \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^{3x} \, dx$$

El resultado es:

$$e^{3x} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right) + k$$

141 $\int (x - 1) \text{ sen } x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$
$$dv = \text{sen } x \, dx$$

El resultado es:

$$(-x + 1) \cos x + \text{sen } x + k$$

142 $\int (x - 2) \cos x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 2$$
$$dv = \cos x \, dx$$

El resultado es:

$$(x - 2) \text{ sen } x + \cos x + k$$

143 $\int x \ln (x + 5) \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln (x + 5)$$
$$dv = x \, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} (x^2 - 25) \ln |x + 5| - \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + k$$

144 $\int x \text{ arc tg } x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc tg } x$$
$$dv = x \, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} (x^2 + 1) \text{ arc tg } x - \frac{x}{2} + k$$

145 $\int x^2 e^{-3x} \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-3x} \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$-\frac{1}{27} e^{-3x}(9x^2 + 6x + 2) + k$$

146 $\int x^4 \ln x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln x$$
$$dv = x^4 \, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^5}{5} \ln |x| - \frac{x^5}{25} + k$$

147 $\int (x^2 + 3) \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 3$$
$$dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 + 1) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + k$$

148 $\int (x^2 - 1) \ln x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln x$$
$$dv = (x^2 - 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln |x| - \frac{x^3}{9} + x + k$$

149 $\int (x^2 - 1) \cos x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$
$$dv = \cos x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 - 3) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + k$$

150 $\int (x - 1) e^x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$
$$dv = e^x \, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 2) + k$$

151 $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{sen} x$$
$$dv = e^{2x} \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y planear una ecuación.

El resultado es: $\frac{1}{5} e^{2x}(2 \operatorname{sen} x - \cos x) + k$

152 $\int \ln (x - 1) \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln (x - 1)$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x - 1) \ln |x - 1| - x + k$$

153 $\int (x^2 - 3) e^x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 3$$
$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x - 1) + k$$

154 $\int e^{-x} \cos x \, dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^{-x} \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + k$$

155 $\int \operatorname{arc\,tg} 2x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc\,tg} 2x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \operatorname{arc\,tg} 2x - \frac{1}{4} \ln |4x^2 + 1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

Calcula las siguientes integrales:

156 $\int \frac{x^2 + x - 2}{x} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.
La descomposición es:

$$x + 1 - \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + x - 2 \ln |x| + k$$

157 $\int \frac{x^2 - 6x + 2}{5 - x} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.
La descomposición es:

$$-x + 1 - \frac{3}{5 - x}$$

La integral es:

$$-\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln |x - 5| + k$$

158 $\int \frac{3x - 4}{x^2 - 4} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - 2} + \frac{5}{x + 2}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} (\ln |x - 2| + 5 \ln |x + 2|) + k$$

159 $\int \frac{5x^2 - 2x - 3}{x^3} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

La integral es:

$$5 \ln |x| + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + k$$

160 $\int \frac{4x - 11}{x^2 - 6x + 9} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x - 3} + \frac{1}{(x - 3)^2}$$

La integral es:

$$4 \ln |x - 3| - \frac{1}{x - 3} + k$$

161 $\int \frac{-2x^2 + 14x - 31}{x^3 - 9x^2 - 27x + 27} \, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$-\frac{2}{x - 3} + \frac{2}{(x - 3)^2} - \frac{7}{(x - 3)^3}$$

La integral es:

$$-2 \ln |x - 3| - \frac{2}{x - 3} + \frac{7}{2(x - 3)^2} + k$$

162 $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 10x + 13}{x - 3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2x - 4 + \frac{1}{x - 3}$$

La integral es:

$$x^2 - 4x + \ln|x - 3| + k$$

163 $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 2}{x^2 - x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.
El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x - 1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x| + 3\ln|x - 1| + k$$

164 $\displaystyle\int \frac{11x + 13}{x^2 + x - 6}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x + 3} + \frac{7}{x - 2}$$

La integral es:

$$4\ln|x + 3| + 7\ln|x - 2| + k$$

165 $\displaystyle\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 1}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 1} - \frac{4}{(x + 1)^2}$$

La integral es:

$$3\ln|x + 1| + \frac{4}{x + 1} + k$$

166 $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 8x + 5}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 2} - \frac{4}{(x + 2)^2} + \frac{1}{(x + 2)^3}$$

La integral es:

$$3\ln|x + 2| + \frac{4}{x + 2} - \frac{1}{2(x + 2)^2} + k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

Calcula las siguientes integrales:

167 $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 10}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \pm 3i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$\ln|x^2 + 2x + 10| - \frac{5}{3}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{x + 1}{3} + k$$

168 $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 18x + 25}{x^3 + 3x^2 - 4}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 1$ real simple.

$x = -2$ real doble.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x - 1} - \frac{3}{x + 2} + \frac{1}{(x + 2)^2}$$

La integral es:

$$5\ln|x - 1| - 3\ln|x + 2| - \frac{1}{x + 2} + k$$

169 $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 + 9x + 18}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = -2$ real simple.

$x = \pm 3i$ imaginarias simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x + 2} + \frac{x - 1}{x^2 + 9}$$

La integral es:

$$\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x^2+9| - \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + k$$

170 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-4x+8}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 2 \pm 2i$ imaginarias simples.

La integral es:

$$\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8| + 3\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{2} + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

Calcula las siguientes integrales:

171 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\ln x = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$\ln(\ln x) + k$$

172 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x[(\ln x)^2+1]}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\ln x = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\ln[(\ln x)^2+1] + k$$

173 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x-3}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = \ln t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$-\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\ln|e^x-3| + k$$

174 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+5}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = \ln t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x - 5\ln|e^x+5| + k$$

175 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-1} = t$$
$$x-1 = t^2$$
$$x = t^2+1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} + k$$

176 $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sqrt{x-3}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-3} = t$$
$$x-3 = t^2$$
$$x = t^2+3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x-3} - 4\ln|\sqrt{x-3}-2| + k$$

177 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + k$$

178 $\displaystyle\int \frac{dx}{2x - \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene: $\ln|2\sqrt{x} - 1| + k$

179 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene: $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + k$

180 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x} + 1| + k$

181 Sea $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Solución:

$\begin{cases} x^2 + k & \text{si } x \le 1 \\ -x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

182 Sea $f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Solución:

$\begin{cases} 2\ln|x| + k & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{sen} x + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

183 Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Solución:

$\begin{cases} -1/x + k & \text{si } x \le 1 \\ 2e^{x/2} + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

6. Integración de funciones trigonométricas

Calcula las siguientes integrales:

184 $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{3}\cos^3 x + k$$

185 $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es:

$$-\frac{1}{4}\cos^4 x + k$$

186 $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{5}\cos^5 x + k$$

187 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{5}\left(-\cos^4 x + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\right) + k$$

188 $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas. Es par en el sen x y en el cos x

La integral es: $(-x + \operatorname{tg} x) + k$

189 $\int \cos^4 x\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el cos x

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \operatorname{sen} x \cos x \left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\right] + k$$

190 $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 3 \operatorname{sen} t$$

$$dx = 3 \cos t\, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(9 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2}\right) + k$$

191 $\int \sqrt{25 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \operatorname{sen} t$$

$$dx = 5 \cos t\, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(25 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{5} + x\sqrt{25 - x^2}\right) + k$$

192 $\int \sqrt{3 - x^2}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{3} \operatorname{sen} t$$

$$dx = \sqrt{3} \cos t\, dt$$

La integral es: $\frac{1}{2}\left(3 \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{3}x + x\sqrt{3 - x^2}\right) + k$

193 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 2 \operatorname{tg} t$$

$$dx = 2 \sec^2 t\, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + k$$

194 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \operatorname{tg} t$$

$$dx = 5 \sec^2 t\, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{25 + x^2}}{25x} + k$$

Para ampliar

195 Calcula tres primitivas de la función:

$$y = x$$

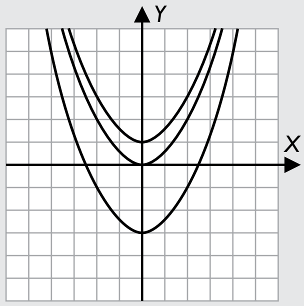
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = \dfrac{x^2}{2}$

$y = \dfrac{x^2}{2} + 1$

$y = \dfrac{x^2}{2} - 3$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

196 Dada la función:

$$y = -x + 1$$

a) Calcula su integral indefinida.

b) Halla la primitiva que pasa por el punto $P(4, -1)$

c) Dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

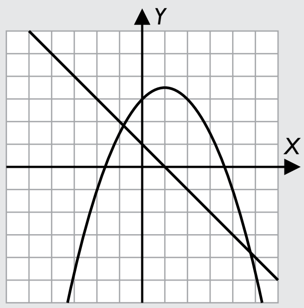
a) $\displaystyle\int (-x + 1)\, dx = -\frac{x^2}{2} + x + k$

b) $-\dfrac{4^2}{2} + 4 + k = -1$

$k = 3$

$y = -\dfrac{x^2}{2} + x + 3$

c)



197 Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\, dx = \begin{cases} x + k & \text{si } x < -2 \\ x^2/2 + k & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

198 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.
La descomposición es:

$$x + 3 + \frac{1}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x| + k$$

199 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$$

200 Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - \ln|e^x + 1| + k$$

201 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x \ln x$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln x$$

$$dv = x\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^2}{2}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\right) + k$$

202 Calcula la integral de la función:

$$y = e^{x+2}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$e^{x+2} + k$$

203 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (1 + x)\,e^x$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = 1 + x$$

$$dv = e^x\,dx$$

El resultado es:

$$xe^x + k$$

204 Calcula:

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6}\,dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$2x + 1 + \frac{1}{5}\left(\frac{6}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)$$

La integral es: $x^2 + x + \frac{6}{5}\ln|x - 3| - \frac{1}{5}\ln|x + 2| + k$

205 Halla una función $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = x^2e^x$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x\,dx$$

El resultado es: $e^x(x^2 - 2x + 2) + k$

206 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + k$$

207 Calcula $\int x^3\,e^{x^2}$

Solución:

Se calcula por partes; tiene que aplicarse dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = x\,e^{x^2}$$

El resultado es: $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + k$

208 Calcula $\int \frac{x\,dx}{e^{x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^{x^2} = t \Rightarrow 2x\,e^{x^2}\,dx = dt$$

$$x\,dx = \frac{dt}{2t}$$

La integral es: $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$

209 Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

La integral es: $\frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x - 1|) + k$

210 Calcula una primitiva de la función:

$$y = \sqrt{x}$$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$$

Problemas

211 Calcula tres primitivas de la función:

$$y = -x$$

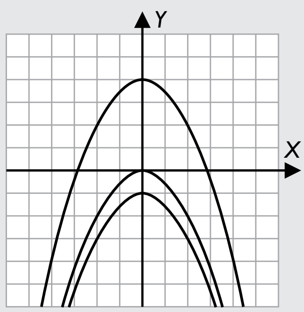
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + 4$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 1$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

212 Dada la función: $y = e^x$

a) Calcula su integral indefinida.

b) Halla la primitiva que pasa por el punto $P(1, 1)$

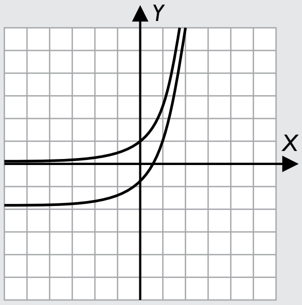
c) Dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

a) $\int e^x\,dx = e^x + k$

b) $e^1 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - e \Rightarrow y = e^x + 1 - e$

c)



213 Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -x^2/2 + k & \text{si } x \le 1 \\ e^x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

214 Calcula $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^x}}$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$-2\sqrt{1 - e^x} + k$$

215 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - \ln|e^x - 1| + k$$

216 Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2 + \frac{2}{x - 1}$$

La integral es: $2x + 2\ln|x - 1| + k$

217 Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + k$$

218 Calcula $\int \frac{1}{x + 1}\,dx$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\ln|x + 1| + k$$

219 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + k$$

220 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 3 + \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|x| + k$$

221 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$4x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$2x^2 - 5x + \ln|x + 2| + k$$

222 Calcula $\int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1}\, dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$x + 2 \ln |x - 1| - \ln |x + 1| + k$$

223 Calcula $\int (x^2 + 5)\, e^{-x}\, dx$

Solución:

Se calcula por partes, hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 5$$
$$dv = e^{-x}\, dx$$

El resultado es: $-e^{-x}(x^2 + 2x + 7) + k$

224 Calcula la integral de la función $f(x) = \frac{16}{(x + 1)^2}$

Solución:

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{16}{x + 1} + k$$

225 Calcula la integral de la función:

$$y = e^{-x}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

226 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{2x}$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = 2e^{2x}\, dx$$

El resultado es: $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + k$

227 Calcula $\int x \cos x^2\, dx$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + k$$

228 Sea la integral:

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x\, dx$$

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

Solución:

a) Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$
$$e^{2x} = t^2$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Luego hay que hacerla por partes.

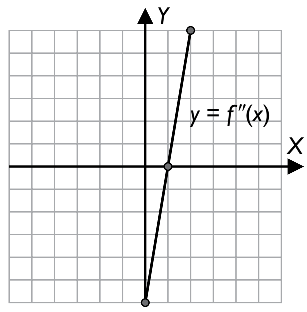
La integral es:

$$-e^x \cos e^x + \operatorname{sen} e^x + k$$

b) Para $x = 0, y = 0$

$$-e^0 \cos e^0 + \operatorname{sen} e^0 + k = 0$$
$$-\cos 1 + \operatorname{sen} 1 + k = 0$$
$$k = \cos 1 - \operatorname{sen} 1$$

229 La recta que pasa por los puntos (0, –6) y (1, 0) (observa el dibujo) es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que el origen pertenece a la curva $y = f(x)$ y que en ese punto la recta tangente tienen pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f



Solución:

$f''(x) = 6x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + k_1$

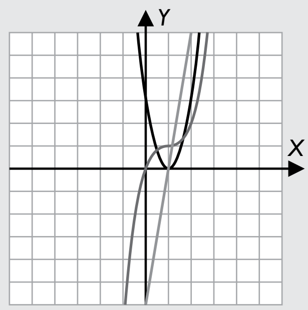
$f'(0) = 3 \Rightarrow k_1 = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + k_2$

$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$



230 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

La integral es:

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x| - \ln|x+1| + k$$

231 Calcula: $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

La integral es:

$$x + \ln|x-2| - \ln|x+1| + k$$

232 Calcula la integral de la función $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 2}$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{3}\ln|x^3 - 2| + k$$

233 Calcula la integral de la función $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}x + k$$

234 Calcula la integral de la función $f(x) = (x+1)e^{2x}$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x + 1$$
$$dv = e^{2x}\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + k$$

235 Calcula $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

Solución:

Se llama I a la integral buscada.

Se aplica la integración por partes.

$$u = x \operatorname{sen} x$$
$$dv = \cos x\,dx$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$I = x \operatorname{sen}^2 x - \int \operatorname{sen}^2 x - I$$

Se resuelve la integral trigonométrica que es par en el seno.

$$\int \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$$

Queda:

$$2I = x \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + k$$

$$I = \frac{x \operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x + k$$

236 Calcula $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{2 + e^x}\,dx$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$
$$e^{3x} = t^3$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4\ln|e^x + 2| + k$$

237 Calcula una primitiva de la función $f(x) = x\ln(1 + x^2)$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = \ln(1 + x^2)$$
$$dv = x\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}[(x^2 + 1)\ln|x^2 + 1| - x^2] + k$$

238 Calcula $\displaystyle\int x\sqrt{1 + x^2}\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2} + k$$

Para profundizar

239 Calcula tres primitivas de la función:

$$y = e^x$$

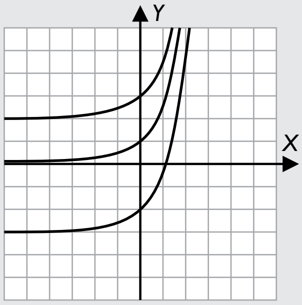
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = e^x$

$y = e^x + 2$

$y = e^x - 3$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

240 Dada la función:

$$y = \text{sen } x$$

a) Calcula su integral indefinida.

b) Halla la primitiva que pasa por el punto $P(\pi, 3)$

c) Dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

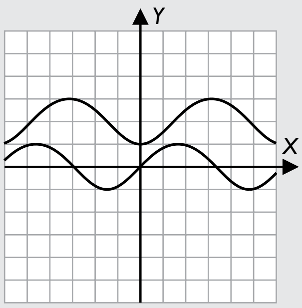
Solución:

a) $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + k$

b) $-\cos \pi + k = 3 \Rightarrow k = 2$

$y = -\cos x + 2$

c)



241 Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \leq -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \cos x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x)dx = \begin{cases} -\cos x + k & \text{si } x \leq -1 \\ e^x + k & \text{si } -1 < x < 2 \\ \text{sen } x + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

242 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ arc tg } \frac{\sqrt{3}}{3} x + k$$

243 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{-x}$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = e^{-x}\, dx$$

El resultado es: $-e^{-x}(x + 1) + k$

244 Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{2x + 2}{1 - x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-2 - \frac{4}{x - 1}$$

La integral es:

$$-2x - 4 \ln |x - 1| + k$$

245 Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\ln |x - 1| + k$$

246 Calcula:

$$\int x^2 \ln x\, dx$$

donde $\ln x$ denota el logaritmo neperiano de un número positivo x

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = \ln x$$

$$dv = x^2\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^3}{3}\left(\ln |x| - \frac{1}{3}\right) + k$$

247 Calcula la integral de la función $f(x) = 2 + x - x^2$

Solución:
Es la integral de un polinomio.
$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + k$$

248 Halla una función $f(x)$ sabiendo que:
$$f'(x) = x^2\, e^x$$

Solución:
Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.
La primera vez se hacen los cambios:
$$u = x^2$$
$$dv = e^x\, dx$$
El resultado es:
$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

249 Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

Solución:
Se aplica el método de integración de funciones racionales.
El denominador tiene raíces reales simples.
La descomposición es:
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)$$
La integral es:
$$\frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x+3|) + k$$

250 Calcula la integral de la función:
$$f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$$
Usa el cambio de variable $\sqrt{x} = t$

Solución:
Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.
$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$
Luego hay que hacerla por partes.
La integral es:
$$2\operatorname{sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + k$$

251 Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Solución:
Es la integral de una función racional.
$$-\frac{1}{x} + k$$

252 Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, calcula:
$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$$

Solución:
Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.
$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$
$$e^{2x} = t^2$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$
La integral es:
$$\frac{1}{2}(\ln|e^x - 1| - \ln|e^x + 1| + k$$

253 Calcula $f(x) = \displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}\, dx$

Solución:
Se aplica el método de integración de funciones racionales.
El denominador tiene raíces reales simples.
La descomposición es:
$$-x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1}$$
La integral es:
$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 3\ln|x| - 2\ln|x-1| + k$$

254 Calcula la integral de la función:
$$f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$$-\frac{1}{3}(5 - x^2)\sqrt{5 - x^2} + k$$

255 Calcula una primitiva de la función:
$$y = \operatorname{tg} x$$

Solución:
Es la integral de una función trigonométrica.
$$-\ln|\cos x| + k$$

256 Calcula $\displaystyle\int x^3\, e^{x^2}\, dx$

Solución:
Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.
La primera vez se hacen los cambios:
$$u = x^2$$
$$dv = xe^{x^2}\, dx$$
El resultado es:
$$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + k$$

257 Calcula una primitiva de la función $y = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-1 + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$$

La integral es: $-x + \ln|x + 2| - \ln|x - 2| + k$

258 Utiliza el cambio de variable $\ln x = t$ para calcular la integral:

$$\int \frac{1 + \ln x^2 + (\ln x)^2}{x(1 + \ln x)}\, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$\ln x = t \Rightarrow x = e^t$$

$$dx = e^t\, dt$$

$$I = \int \frac{1 + 2t + t^2}{e^t(1 + t)}\, e^t\, dt = \int \frac{1 + 2t + t^2}{1 + t}\, dt =$$

$$= \int \frac{(1 + t)^2}{1 + t}\, dt = \int (t + 1)\, dt = \frac{1}{2}t^2 + t + k =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x + k$$

259 Calcula la integral:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de la función racional.

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k$$

Practica

Calcula las siguientes integrales:

264 $\int x \cos x \, dx$

Solución:

Ejercicio 264

$\int x \cdot \cos(x) \, dx \rightarrow \cos(x) + x \cdot \operatorname{sen}(x)$

265 $\int \ln x \, dx$

Solución:

Ejercicio 265

$\int \ln x \, dx \rightarrow x \cdot \ln(x) - x$

266 $\int x^2 e^x \, dx$

Solución:

Ejercicio 266

$\int x^2 \cdot e^x \, dx \rightarrow (x^2 - 2 \cdot x + 2) \cdot e^x$

267 $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

Ejercicio 267

$\int e^x \cdot \operatorname{sen}(x) \, dx \rightarrow \frac{e^x \cdot \operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{e^x \cdot \cos(x)}{2}$

En los siguientes ejercicios haz la descomposición en fracciones simples del integrando y calcula la integral.

268 $\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} \, dx$

Solución:

Ejercicio 268

$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} \, dx \rightarrow \ln(|x^2+1|) + 3 \cdot x$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{3,1\},\{2 \cdot x, x^2+1\}\}$

269 $\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6} \, dx$

Solución:

Ejercicio 269

$\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6} \, dx \rightarrow 7 \cdot \ln(|-x-3|) + 5 \cdot \ln(|x-2|)$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\right) \rightarrow \{\{5, x-2\},\{7, x+3\}\}$

270 $\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13} \, dx$

Solución:

Ejercicio 270

$\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13} \, dx \rightarrow \frac{3 \cdot \ln(|x^2 - 4 \cdot x + 13|)}{2} + \frac{11 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)}{3}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\right) \rightarrow \{\{3 \cdot x + 5, x^2 - 4 \cdot x + 13\}\}$

271 $\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} \, dx$

Solución:

Ejercicio 271

$\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} \, dx \rightarrow 3 \cdot \ln(|-x+1|) + 2 \cdot \ln(|x-5|) + \frac{-1}{x-1}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2, x-5\},\{1, x^2 - 2 \cdot x + 1\},\{3, x-1\}\}$

272 $\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \, dx$

Solución:

Ejercicio 272

$\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \, dx \rightarrow 3 \cdot \ln(|x-2|) + \ln(|x^2+1|)$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2, x-5\},\{1, x^2 - 2 \cdot x + 1\},\{3, x-1\}\}$

273 $\int \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} \, dx$

Solución:

Ejercicio 273

$\int \frac{1}{(x^2 - x) \cdot (x - 1)} \, dx \rightarrow \ln(|x|) - \ln(|-x+1|) - \frac{1}{x-1}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{1}{(x^2 - x) \cdot (x - 1)}\right) \rightarrow \{\{1, x\},\{1, x^2 - 2 \cdot x + 1\},\{-1, x-1\}\}$

274 $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$

Solución:

Ejercicio 274

$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx \Rightarrow -\frac{\ln(|x^2+1|)}{2} + \operatorname{atan}(x) + \frac{x^2}{2}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right) \Rightarrow \{\{x,1\},\{-x+1,x^2+1\}\}$

275 $\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}\,dx$

Solución:

Ejercicio 275

$\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}\,dx \rightarrow -\ln(|-x+1|) + \frac{x^3-x^2+2}{2\cdot x-2}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}\right) \rightarrow \{\{x,1\},\{-1,x^2-2\cdot x+1\},\{-1,x-1\}\}$

$\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1} = x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$

Calcula las siguientes integrales:

276 $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

Solución:

Ejercicio 276

$\int \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow \frac{\ln(x)^2}{2}$

277 $\int \frac{6}{e^x+3}\,dx$

Solución:

Ejercicio 277

$\int \frac{6}{e^x+3}\,dx \Rightarrow 2\cdot\ln(|e^x|) - 2\cdot\ln(|e^x+3|)$

278 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

Solución:

Ejercicio 278

$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x+1}}\,dx \Rightarrow \ln(|-\sqrt{x+1}+1|) - \ln(|\sqrt{x+1}+1|)$

279 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

Solución:

Ejercicio 279

$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx \Rightarrow 6\cdot\ln(|\sqrt[6]{x}-1|) + (2\cdot\sqrt[6]{x}^3 + 3\cdot\sqrt[6]{x}^2) + 6\cdot\sqrt[6]{x}$

280 $\int |x|\,dx$

Solución:

Ejercicio 280

$\int |x|\,dx \Rightarrow \frac{x\cdot|x|}{2}$

281 $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

Solución:

Ejercicio 281

$\int (\operatorname{sen} x)^2 \cdot \cos(x)\,dx \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)^3}{3}$

282 $\int \cos^3 x\,dx$

Solución:

Ejercicio 282

$\int (\cos x)^3\,dx \Rightarrow -\frac{\operatorname{sen}(x)^3}{3} + \operatorname{sen}(x)$

283 $\int \cos^2 x\,dx$

Solución:

Ejercicio 283

$\int (\cos(x))^2\,dx \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2\cdot x)}{4} + \frac{x}{2}$

284 $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

Solución:

Ejercicio 284

$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx \rightarrow \left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt{2\cdot x-1}$

285 $\int \sqrt{4 - x^2}\ dx$

Solución:

Ejercicio 285

$$\int \sqrt{4 - x^2}\ dx \rightarrow \frac{x \cdot \sqrt{-x^2+4}}{2} + 2 \cdot \text{asen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

286 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 + x^2}}$

Solución:

Ejercicio 286

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{9 + x^2}}\ dx \rightarrow \frac{-1 \cdot \sqrt{x^2+9}}{9 \cdot x}$$

287 $\int x^3 \ln x\ dx$

Solución:

Ejercicio 287

$$\int x^3 \cdot \ln(x)\ dx \rightarrow \frac{x^4 \cdot \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16}$$

288 $\int \frac{\ln x}{x^2}\ dx$

Solución:

Ejercicio 288

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx \rightarrow -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

289 $\int e^{-x}(x^2 + 1)\ dx$

Solución:

Ejercicio 289

$$\int e^{-x} \cdot (x^2 + 1)\ dx \rightarrow (-x^2 - 2 \cdot x - 3) \cdot e^{-x}$$

290 $\int \frac{2}{1 + \sqrt{x}}\ dx$

Solución:

Ejercicio 290

$$\int \frac{2}{1 + \sqrt{x}}\ dx \rightarrow -4 \cdot \ln(|-\sqrt{x} - 1|) + 4 \cdot \sqrt{x}$$

291 $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\ dx$

Solución:

Ejercicio 291

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \cdot \ln(x)}\ dx \rightarrow \frac{\ln(\ln(x))^2}{2}$$

292 Calcula la integral:

$$F(x) = \int (3x^2 - 4x - 1)\ dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto $P(2, 1)$. Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:

Ejercicio 292

$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \rightarrow x \mapsto 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1$

$F(x) = \int f(x)\ dx \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

P = punto(2, 1) $\rightarrow$ (2,1)

Sustituimos el punto P(2, 1)

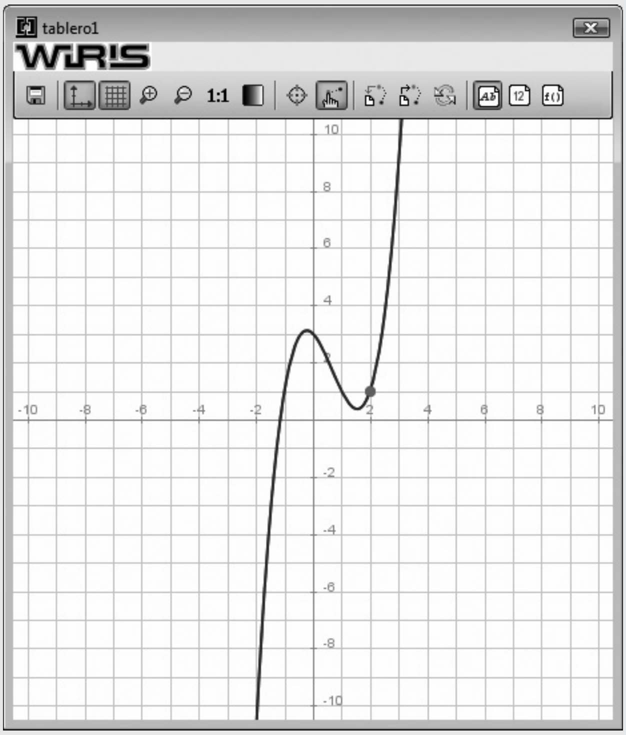
resolver(F(2) + k = 1) $\rightarrow$ {{k=3}}

La función es :

$F(x) = F(x) + 3 \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 3$

dibujar(F(x), {color=azul, anchura_linea=2})

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



293 Calcula la integral:

$$\int x \operatorname{sen} 2x\, dx$$

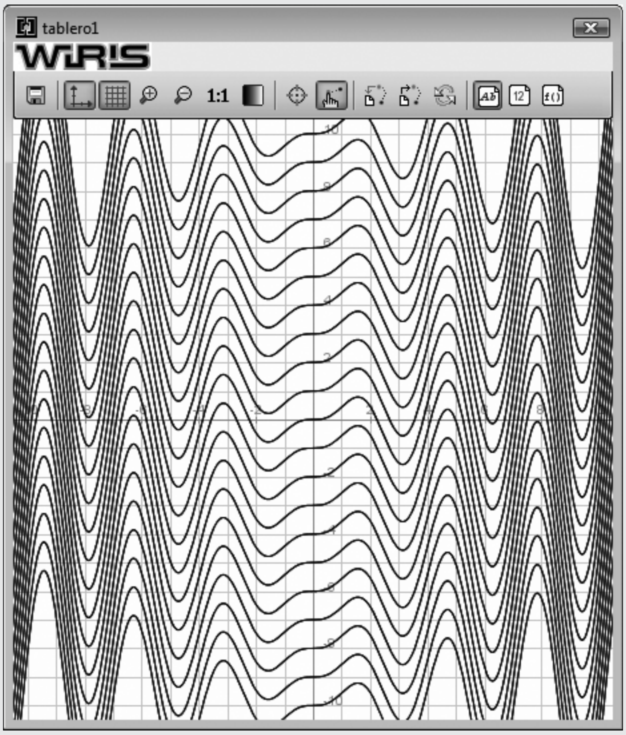
Sustituye la constante k por los números: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 293

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(2x)\, dx \rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2\cdot x)}{4} - \frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}$$

$$\text{aplicar\_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(\frac{\operatorname{sen}(2\cdot x)}{4} - \frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2} + k\right), -10..10\right)$$



294 Calcula la integral:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x$$

Sustituye la constante k por los números: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 294

$$\int (\operatorname{sen}(x))^3 \cdot \cos(x)\, dx \rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)^4}{4}$$

tablero(punto(0, 0), 12, 12);

aplicar_función($k \mapsto$ dibujar($\frac{\operatorname{sen}(x)^4}{4}$ + k, {color = rojo, anchura_línea = 2}), −5..5);

Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.