

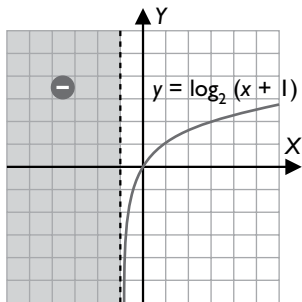
# Unidad 12.

## Análisis de funciones y representación de curvas

### 1. Análisis gráfico de una función

#### Aplica la teoría

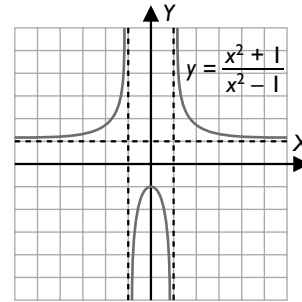
**1** Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



#### Solución:

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asintotas:
  - Verticales:  $x = -1$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$Signo:
  - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-1, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-1, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$
9. Puntos de inflexión: no tiene.  
Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-1, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**2** Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



#### Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
  - Verticales:  $x = -1, x = 1$
  - Horizontales:  $y = 1$
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y:  $A(0, -1)$Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(0, -1)$
  - Mínimo relativo: no tiene.Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.  
Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

## 2. Análisis de funciones polinómicas

### Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con el eje X de la función  $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$  y estudia su multiplicidad.

**Solución:**

$$2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow (8 - x^2)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ doble.} \\ x = 2\sqrt{2} \text{ simple.} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ simple.} \end{cases}$$

### Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**3**  $y = x^3 - 4x$

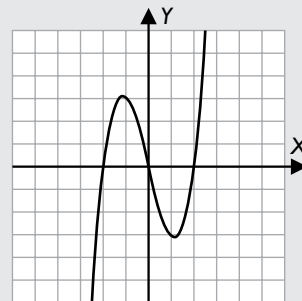
**Solución:**

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$Signo:
  - Positiva (+):  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(-2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
  - Mínimo relativo:  $B(2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
9. Punto de inflexión:  $O(0, 0)$   
Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

**4**  $y = 3x - x^3$

**Solución:**

$$y' = 3 - 3x^2$$

$$y'' = -6x$$

$$y''' = -6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(\sqrt{3}, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
  - Negativa (-):  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $C(1, 2)$
  - Mínimo relativo:  $D(-1, -2)$

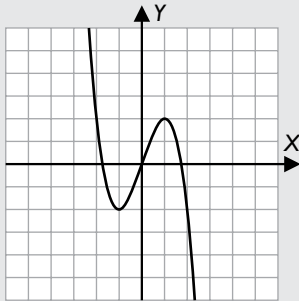
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-1, 1)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:  $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

**5**  $y = x^3$

**Solución:**

$$y' = 3x^2$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X:  $O(0, 0)$
- Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+):  $(0, +\infty)$
- Negativa (-):  $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

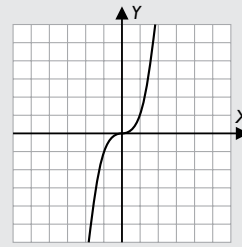
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$

9. Punto de inflexión:  $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

**6**  $y = 4x^2 - x^4$

**Solución:**

$$y' = 8x - 4x^3$$

$$y'' = 8 - 12x^2$$

$$y''' = -24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X:  $A(-2, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$
- Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+):  $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- Negativa (-):  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $C(-\sqrt{2}, 4)$ ,  $D(\sqrt{2}, 4)$
- Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

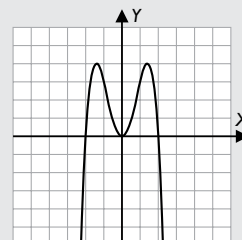
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:  $E(-\sqrt{6}/3, 20/9)$ ,  $F(\sqrt{6}/3, 20/9)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$$

**7**  $y = x^4 - 2x^3$

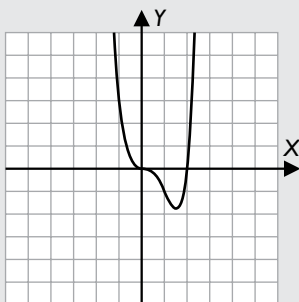
**Solución:**

$$y' = 4x^3 - 6x^2$$

$$y'' = 12x^2 - 12x$$

$$y''' = 24x - 12$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0), A(2, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $B(3/2, -27/16)$
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(3/2, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión:  $C(0, 0), D(1, -1)$ 
 Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, 1)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [-27/16, +\infty)$

**8**  $y = \frac{x^3}{3} - 4x$

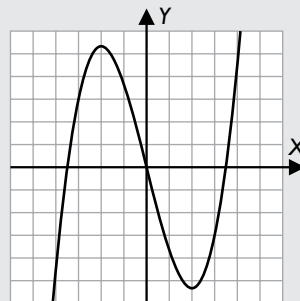
**Solución:**

$$y' = x^2 - 4$$

$$y'' = 2x$$

$$y''' = 2$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2\sqrt{3}, 0), O(0, 0), B(2\sqrt{3}, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $C(-2, 16/3)$
  - Mínimo relativo:  $D(2, -16/3)$
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-2, 2)$
9. Punto de inflexión:  $O(0, 0)$ 
 Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

### 3. Análisis de funciones racionales

#### Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces del denominador de la función  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

**Solución:**

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

#### Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**9**  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

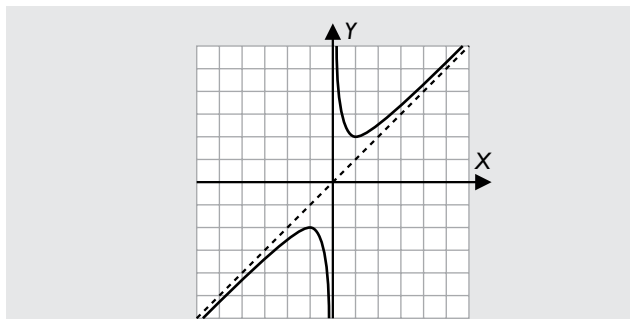
**Solución:**

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en  $x = 0$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 0$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = x$
- Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(-1, -2)$
  - Mínimo relativo:  $B(1, 2)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-1, 0) \cup (0, 1)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

**10**  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

**Solución:**

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y''' = \frac{6}{x^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en  $x = 0$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 0$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = x$
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-1, 0), B(1, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene

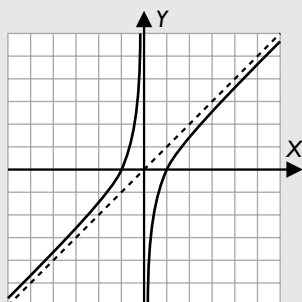
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

**11**  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
  2. Dominio:  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
  3. Continuidad: es discontinua en  $x = -1$ ,  $x = 1$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = -1$ ,  $x = 1$
    - Horizontales:  $y = 0$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y:  $A(0, -1)$
- Signo:
- Positiva (+):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $A(0, -1)$
    - Mínimo relativo: no tiene.

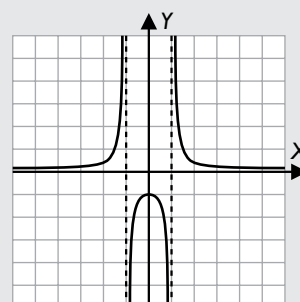
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

**12**  $y = \frac{x-1}{x^2}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{x-2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{6x-24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  3. Continuidad: es discontinua en  $x = 0$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 0$
    - Horizontales:  $y = 0$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(1, 0)$
    - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
- Positiva (+):  $(1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $A(2, 1/4)$
    - Mínimo relativo: no tiene.

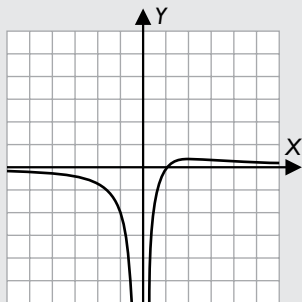
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, 2)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

9. Punto de inflexión:  $B(3, 2/9)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(3, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4]$$

**13**  $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{18x^4 - 108x^2 + 18}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales:  $y = 0$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $O(0, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
- Positiva (+):  $(0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $A(1, 3/2)$
    - Mínimo relativo:  $B(-1, -3/2)$

Monotonía:

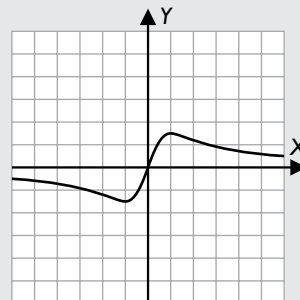
- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-1, 1)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:

$$O(0, 0), C(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4), D(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-3/2, 3/2]$$

**14**  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
  2. Dominio:
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$
  3. Continuidad: es discontinua en  $x = -2$ ,  $x = 2$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = -2$ ,  $x = 2$
    - Horizontales:  $y = 1$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$
    - Eje Y:  $C(0, 1/4)$
- Signo:
- Positiva (+):  $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-2, -1) \cup (1, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $C(0, 1/4)$
- Mínimo relativo: no tiene.

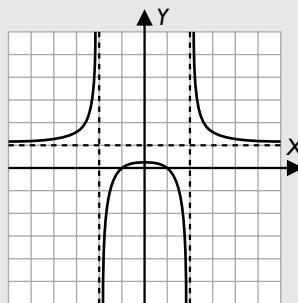
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-2, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4] \cup (1, +\infty)$$

## 4. Análisis de funciones irracionales

### Piensa y calcula

Halla mentalmente el dominio de la función  $y = \sqrt{x^2 - 4}$

**Solución:**

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

### Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**15**  $y = \sqrt{4 - x}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(4-x)\sqrt{4-x}}$$

$$y''' = -\frac{3}{8(4-x)^2\sqrt{4-x}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-\infty, 4]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = 4$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(4, 0)$
  - Eje Y:  $B(0, 2)$

Signo:

- Positiva (+):  $(-\infty, 4)$
- Negativa (-):  $\emptyset$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

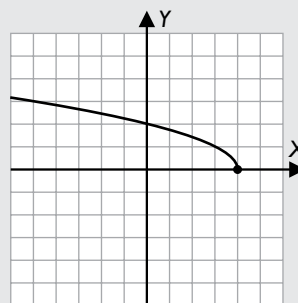
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $\emptyset$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 4)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 4)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$



**16**  $y = \sqrt{x^2 + 4}$

**Solución:**

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y'' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y''' = -\frac{12x}{(x^2 + 4)^2\sqrt{x^2 + 4}}$$

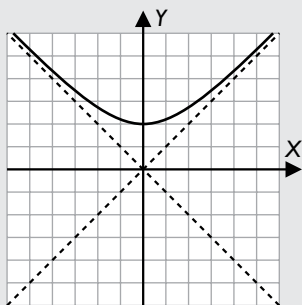
1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la real  $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = -x, y = x$
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y: A(0, 2)

Signo:

  - Positiva (+):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: A(0, 2)

Monotonía:

  - Creciente ( $\nearrow$ ): (0,  $+\infty$ )
  - Decreciente ( $\searrow$ ): ( $-\infty, 0$ )
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [2, +\infty)$

**17**  $y = \sqrt{x^2 - 1}$

**Solución:**

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y''' = \frac{3x}{(x^2 - 1)^2\sqrt{x^2 - 1}}$$

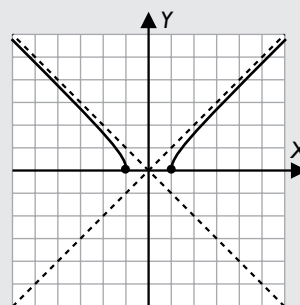
1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = -1, x = 1$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = -x, y = x$
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: A(-1, 0), B(1, 0)
  - Eje Y: no lo corta.

Signo:

  - Positiva (+):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

  - Creciente ( $\nearrow$ ): (1,  $+\infty$ )
  - Decreciente ( $\searrow$ ): ( $-\infty, -1$ )
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

**18**  $y = \sqrt{4 - x^2}$

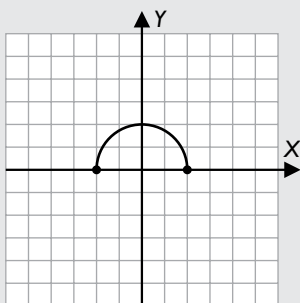
**Solución:**

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{12x}{(4 - x^2)^2\sqrt{4 - x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = -2$ ,  $x = 2$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$
    - Eje Y:  $C(0, 2)$
 Signo:
    - Positiva (+):  $(-2, 2)$
    - Negativa (-):  $\emptyset$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $C(0, 2)$
    - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-2, 0)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 2)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-2, 2)$



Es una semicircunferencia.

10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, 2]$

**19**  $y = \sqrt[3]{x}$

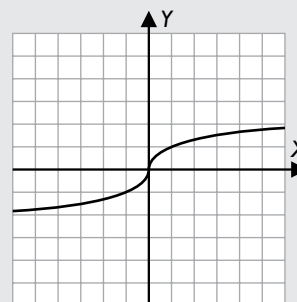
**Solución:**

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9x^3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y''' = \frac{10}{27x^5\sqrt[3]{x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en toda la recta real.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $O(0, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$
 Signo:
    - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
    - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$
  9. Punto de inflexión:  $O(0, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**20**  $y = x\sqrt{4-x^2}$

**Solución:**

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x^3-8x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$y''' = -\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} - \frac{4x^2+32}{(4-x^2)^2\sqrt{4-x^2}}$$

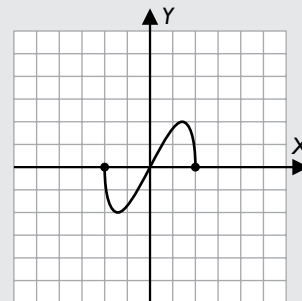
1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = -2, x = 2$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(0, 2)$

- Negativa (-):  $(-2, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $C(\sqrt{2}, 2)$
    - Mínimo relativo:  $D(-\sqrt{2}, -2)$
  - Monotonía:
    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

9. Punto de inflexión:  $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-2, 0)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, 2)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [-2, 2]$

## 5. Análisis de funciones exponenciales

### Piensa y calcula

Halla mentalmente los puntos de corte con los ejes de la función  $y = (2-x)e^x$

**Solución:**

Eje X:  $A(2, 0)$

Eje Y:  $B(0, 2)$

### Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**21**  $y = (x-2)e^x$

**Solución:**

$$y' = (x-1)e^x$$

$$y'' = xe^x$$

$$y''' = (x+1)e^x$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(2, 0)$
  - Eje Y:  $B(0, -2)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo:  $C(1, -e)$

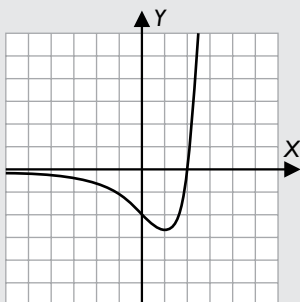
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(1, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 1)$

9. Punto de inflexión:  $B(0, -2)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-e, +\infty)$$

**22**  $y = xe^{-x}$

**Solución:**

$$y' = -(x-1)e^{-x}$$

$$y'' = (x-2)e^{-x}$$

$$y''' = -(x-3)e^{-x}$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

  - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(1, 1/e)$
  - Mínimo relativo: no tiene.

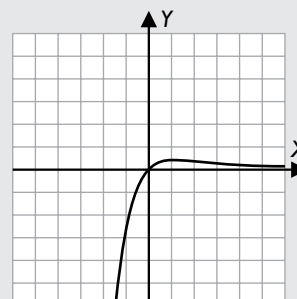
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 1)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(1, +\infty)$

9. Punto de inflexión:  $B(2, 2/e^2)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(2, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/e]$$

**23**  $y = \frac{e^x}{x}$

**Solución:**

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$$y''' = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{x^4}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 0$
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y: no lo corta.

Signo:

  - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(1, e)$

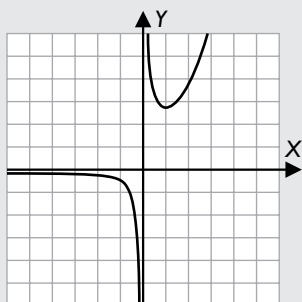
**Monotonía:**

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(1, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

**Curvatura:**

- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$$

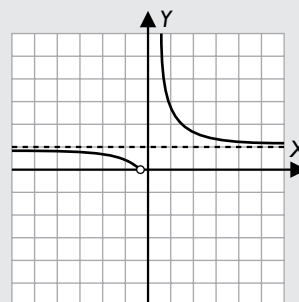
**Monotonía:**

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $\emptyset$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

9. Punto de inflexión:  $A(-1/2, 1/e^2)$

**Curvatura:**

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -1/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

**24**  $y = e^{1/x}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$y'' = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{e^{1/x}(6x^2 + 6x + 1)}{x^6}$$

1. Tipo de función: exponencial.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 0$
    - Horizontales:  $y = 1$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y: no lo corta.
- Signo:**
- Positiva (+):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo: no tiene.

**25**  $y = e^{-x^2}$

**Solución:**

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

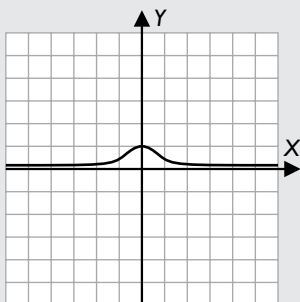
$$y''' = -(2x^2 - 3)4xe^{-x^2}$$

1. Tipo de función: exponencial.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo su dominio.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales:  $y = 0$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y:  $A(0, 1)$
- Signo:**
- Positiva (+):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $A(0, 1)$
    - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:**
- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:  $B(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$ ,  $C(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, 1]$$

**26**  $y = \frac{e^x}{x^2}$

**Solución:**

$$y' = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2 - 4x + 6)e^x}{x^4}$$

$$y''' = \frac{(x^3 - 6x^2 + 18x - 24)e^x}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales:  $x = 0$
- Horizontales:  $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Negativa (-):  $\emptyset$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo:  $A(2, e^2/4)$

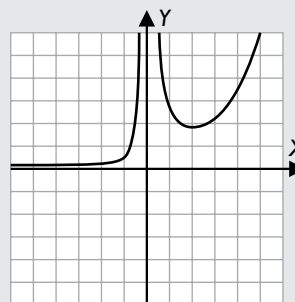
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 2)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$$

## 6. Análisis de funciones logarítmicas

### Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con los ejes de la función  $y = \ln(x^2 - 1)$

**Solución:**

Puntos de corte con el eje X

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2$$

$$A(-\sqrt{2}, 0); B(\sqrt{2}, 0)$$

Al eje Y no lo corta.

## Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**27**  $y = \ln(x^2 + 4)$

**Solución:**

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 8}{(x^2 + 4)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 48x}{(x^2 + 4)^3}$$

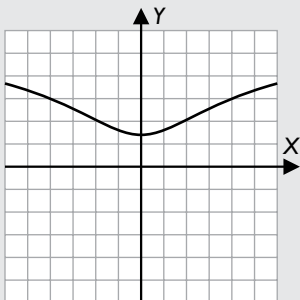
- Tipo de función: logarítmica.
  - Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
  - Periodicidad: no es periódica.
  - Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  - Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  - Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y:  $A(0, \ln 4)$

Signo:

    - Positiva (+):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
    - Negativa (-):  $\emptyset$
  - Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo:  $A(0, \ln 4)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0)$
  - Puntos de inflexión:  $B(-2, \ln 8)$ ,  $C(2, \ln 8)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(-2, 2)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [\ln 4, +\infty)$

**28**  $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

**Solución:**

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 6x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 18x^2 + 30x - 18}{(x^2 - 3x + 2)^3}$$

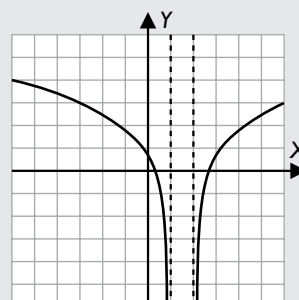
- Tipo de función: logarítmica.
  - Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
  - Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en  $x = 1$ ,  $x = 2$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
  - Periodicidad: no es periódica.
  - Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  - Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 1$ ,  $x = 2$
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  - Corte con los ejes:
    - Eje X:  $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0\right)$
    - Eje Y:  $(0, \ln 2)$

Signo:

    - Positiva (+):  $\left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$
    - Negativa (-):  $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$
  - Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(2, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 1)$
  - Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**29**  $y = \ln x^2$

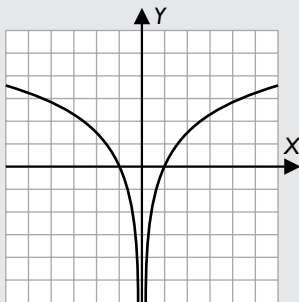
**Solución:**

$$y' = \frac{2}{x}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2}$$

$$y''' = \frac{4}{x^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 0$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-1, 0), B(1, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-1, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**30**  $y = x \ln x$

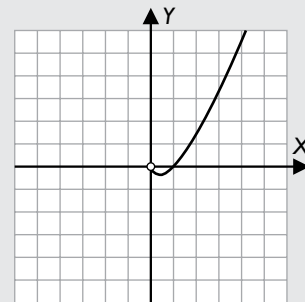
**Solución:**

$$y' = 1 + \ln x$$

$$y'' = \frac{1}{x}$$

$$y''' = -\frac{1}{x^2}$$

1. Tipo de función: polinómica multiplicada por logarítmica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(1, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
  - Positiva (+):  $(1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $B(1/e, -1/e)$
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(1/e, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1/e)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [-1/e, +\infty)$



**31**  $y = \frac{\ln x}{x}$

**Solución:**

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{3 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$y''' = \frac{11 - 6 \ln x}{x^4}$$

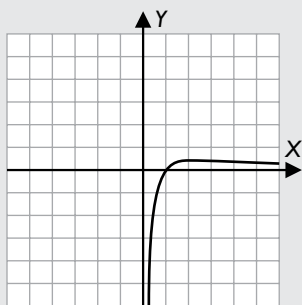
1. Tipo de función: logarítmica dividida entre polinómica.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 0$
    - Horizontales:  $y = 0$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(1, 0)$
    - Eje Y: no lo corta.

Signo:

    - Positiva (+):  $(1, +\infty)$
    - Negativa (-):  $(0, 1)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $B(e, 1/e)$
    - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, e)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(e, +\infty)$
  9. Punto de inflexión:  $C\left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(e^{3/2}, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, e^{3/2})$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 1/e]$

**32**  $y = \ln(1 - x^2)$

**Solución:**

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 + 12x}{(x^2 - 1)^3}$$

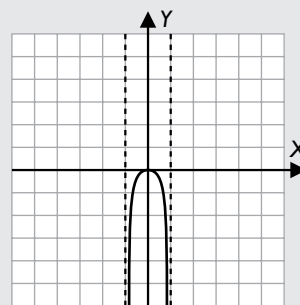
1. Tipo de función: logarítmica.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-1, 1)$
  3. Continuidad: es continua en todo su dominio; en  $x = -1, x = 1$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = -1, x = 1$
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $O(0, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

    - Positiva (+):  $\emptyset$
    - Negativa (-):  $(-1, 0) \cup (0, 1)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $O(0, 0)$
    - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-1, 0)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0]$

## 7. Análisis de funciones trigonométricas

### Piensa y calcula

Halla mentalmente el periodo de la función  $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

#### Solución:

Si el periodo de  $y = \operatorname{sen} x$  es  $2\pi$ , para hallar el de  $y = \operatorname{sen} 2x$  hay que dividir  $2\pi$  entre 2; por tanto, el periodo es  $\pi$

### Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**33**  $y = 3 \cos x/2$

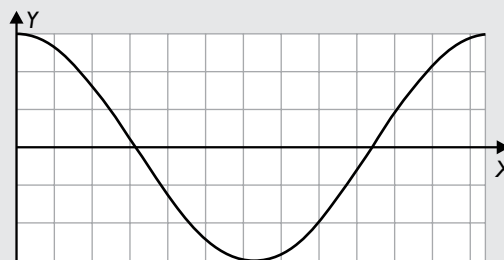
#### Solución:

$$y' = -\frac{3 \operatorname{sen} x/2}{2}$$

$$y'' = -\frac{3 \cos x/2}{4}$$

$$y''' = \frac{3 \operatorname{sen} x/2}{8}$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
  2. Dominio:  $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
  4. Periodicidad: es periódica de periodo  $4\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, 4\pi)$
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: A( $\pi$ , 0), B( $3\pi$ , 0)
    - Eje Y: C(0, 3)Signo:
    - Positiva (+):  $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$
    - Negativa (-):  $(\pi, 3\pi)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: C(0, 3)
    - Mínimo relativo: D( $2\pi$ , -3)Monotonía:
    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(2\pi, 4\pi)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 2\pi)$
  9. Puntos de inflexión: A( $\pi$ , 0), B( $3\pi$ , 0)
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(\pi, 3\pi)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\operatorname{Im}(f) = [-3, 3]$

**34**  $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

#### Solución:

$$y' = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

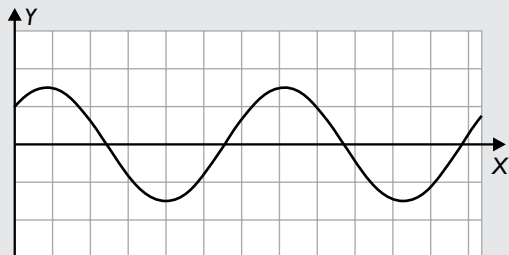
$$y''' = -\cos x + \operatorname{sen} x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio:  $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de periodo  $2\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, 2\pi)$
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: A( $3\pi/4$ , 0), B( $7\pi/4$ , 0)
  - Eje Y: C(0, 1)Signo:
  - Positiva (+):  $(0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi)$
  - Negativa (-):  $(3\pi/4, 7\pi/4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: D( $\pi/4$ ,  $\sqrt{2}$ )
  - Mínimo relativo: E( $5\pi/4$ ,  $-\sqrt{2}$ )Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(\pi/4, 5\pi/4)$

9. Puntos de inflexión:  $A(3\pi/4, 0)$ ,  $B(7\pi/4, 0)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(3\pi/4, 7\pi/4)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

**35**  $y = \cos^2 x$

**Solución:**

$$y' = -2 \operatorname{sen} x \cos x$$

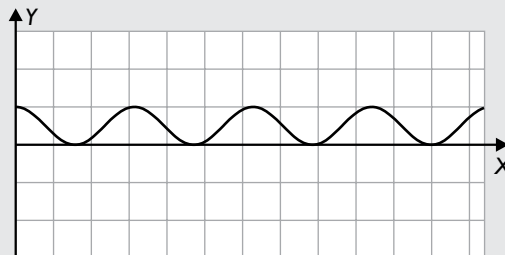
$$y'' = 2 - 4 \cos^2 x$$

$$y''' = 8 \operatorname{sen} x \cos x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de periodo  $\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asintotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(\pi/2, 0)$
  - Eje Y:  $B(0, 1)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $B(0, 1)$
  - Mínimo relativo:  $C(\pi/2, 0)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(\pi/2, \pi)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, \pi/2)$
9. Puntos de inflexión:  $D(\pi/4, 1/2)$ ,  $E(3\pi/4, 1/2)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(\pi/4, 3\pi/4)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, 1]$$

**36**  $y = \operatorname{sen} x \cos x$

**Solución:**

$$y' = -1 + 2 \cos^2 x$$

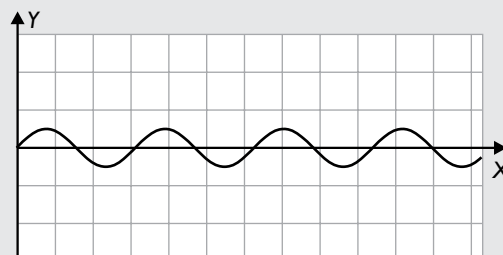
$$y'' = -4 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$y''' = 4 - 8 \cos^2 x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de periodo  $\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asintotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(\pi/2, 0)$ ,  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(0, \pi/2)$
  - Negativa (-):  $(\pi/2, \pi)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $B(\pi/4, 1/2)$
  - Mínimo relativo:  $C(3\pi/4, -1/2)$
9. Puntos de inflexión:  $O(0, 0)$ ,  $D(\pi/2, 0)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(\pi/2, \pi)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, \pi/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$$

# Ejercicios y problemas

## Preguntas tipo test

1 Dada la función:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

halla los máximos y mínimos relativos.

- Máximo A(2, -4), mínimo B(-2, 1)
- No tiene.
- Máximo A(-2, 4), mínimo O(0, 0)
- Máximo A(1, 3), mínimo B(-3, 1)

2 Dada la función:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

halla dónde es convexa ( $\cup$ )

- $(-\infty, 0)$
- $(-\infty, -\sqrt{3})$
- $(0, +\infty)$
- $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

3 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Halla los puntos de inflexión.

- A(-1, 0); B(1, 0)
- A(-2, 2); B(2, -2)
- No tiene.
- O(0, 0)

4 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene en  $x = 1$ ?

- Evitable.
- De 1.ª especie.
- De 2.ª especie.
- No es discontinua.

5 Dada la función:

$$y = x^4 e^{-x}$$

¿dónde tiene el máximo relativo?

- O(0, 0)
- A(2, 2)
- A(4, 256/e<sup>4</sup>)
- A(-1, 3)

6 Dada la función:

$$f(x) = xe^x$$

halla dónde es creciente.

- $(-\infty, -1)$
- $(-\infty, e)$
- $(-1, +\infty)$
- $(-e, e)$

7 Dada la función:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

halla dónde tiene un mínimo relativo.

- O(0, 0)
- A(2, 1)
- A(4, 1/e)
- A(-1, 2)

8 Dada la función:

$$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

halla dónde es creciente.

- $(1, +\infty)$
- $(0, \sqrt{e})$
- $(-\infty, e)$
- $(0, e)$

9 Se consideran las funciones:

$$f(x) = x^2 - 4; g(x) = \ln f(x)$$

Halla el dominio de  $g(x)$

- Dom(g) =  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- Dom(g) =  $(-2, 2)$
- Dom(g) =  $[-2, 2]$
- Dom(g) =  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10 La función dada por:

$$f(x) = x|x-2|$$

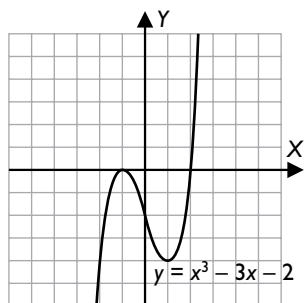
tiene un mínimo relativo en:

- A(2, 0)
- O(0, 0)
- A(-2, -8)
- A(1, 1)

# Ejercicios y problemas propuestos

## 1. Análisis gráfico de una función

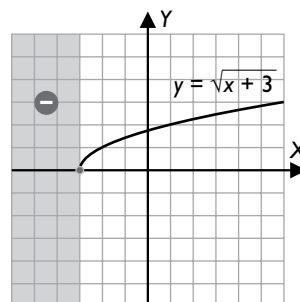
**37** Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



### Solución:

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, 0)$
  - Eje Y:  $C(0, -2)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(-1, 0)$
  - Mínimo relativo:  $D(1, -4)$
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-1, 1)$
- Punto de inflexión:  $C(0, -2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$
- Recorrido o imagen:
 
$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

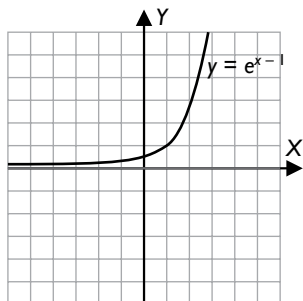
**38** Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



### Solución:

- Tipo de función: irracional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = [-3, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio; en  $x = -3$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-3, 0)$
  - Eje Y:  $B(0, \sqrt{3})$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(-3, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-3, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-3, +\infty)$
- Recorrido o imagen:
 
$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

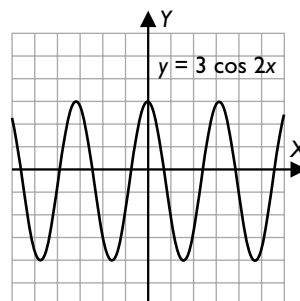
- 39** Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



**Solución:**

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y:  $A(e^{-1}, 0)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$
10. Recorrido o imagen:
 
$$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$$

- 40** Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



**Solución:**

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de periodo  $\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(\pi/4, 0), B(3\pi/4, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 3)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
  - Negativa (-):  $(\pi/4, 3\pi/4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $B(0, 3)$
  - Mínimo relativo:  $C(\pi/2, -3)$
 Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(\pi/2, \pi)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, \pi/2)$
9. Puntos de inflexión:  $A(\pi/4, 0), B(3\pi/2, 0)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(\pi/4, 3\pi/4)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
10. Recorrido o imagen:
 
$$\text{Im}(f) = [-3, 3]$$

## 2. Análisis de funciones polinómicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**41**  $y = 4x - x^3$

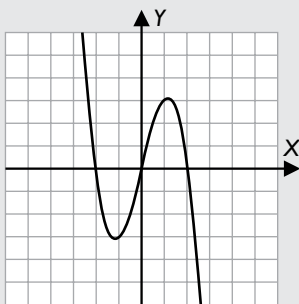
**Solución:**

$$y' = 4 - 3x^2$$

$$y'' = -6x$$

$$y''' = -6$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
  - Negativa (-):  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
  - Mínimo relativo:  $B(-2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
- Punto de inflexión:  $O(0, 0)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**42**  $y = -x^3 - 3x^2$

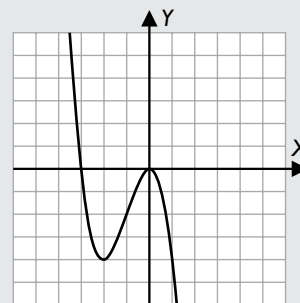
**Solución:**

$$y' = -3x^2 - 6x$$

$$y'' = -6x - 6$$

$$y''' = -6$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-3, 0)$ ,  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -3)$
  - Negativa (-):  $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $O(0, 0)$
  - Mínimo relativo:  $B(-2, -4)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-2, 0)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
- Punto de inflexión:  $C(-1, -2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -1)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-1, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**43**  $y = x^3 + x$

**Solución:**

$$y' = 3x^2 + 1$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X:  $O(0, 0)$
- Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+):  $(0, +\infty)$
- Negativa (-):  $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

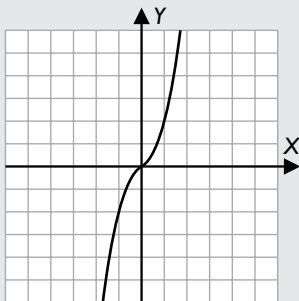
Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$

9. Punto de inflexión:  $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

**44**  $y = x^4 - 4x^2$

**Solución:**

$$y' = 4x^3 - 8x$$

$$y'' = 12x^2 - 8$$

$$y''' = 24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X:  $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
- Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+):  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Negativa (-):  $(-2, 0) \cup (0, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $O(0, 0)$
- Mínimo relativo:  $C(-\sqrt{2}, -4), D(\sqrt{2}, -4)$

Monotonía:

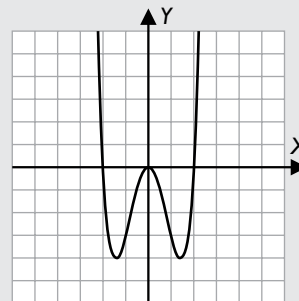
- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

9. Puntos de inflexión:

$$E(-\sqrt{6}/3, -20/9), F(\sqrt{6}/3, -20/9)$$

Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$$



**45**  $y = 2x^3 - x^4$

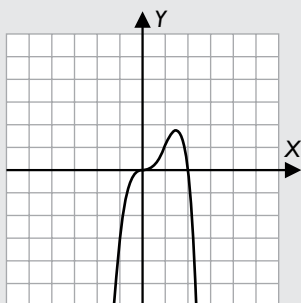
**Solución:**

$$y' = 6x^2 - 4x^3$$

$$y'' = 12x - 12x^2$$

$$y''' = 12 - 24x$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(0, 2)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $B(3/2, 27/16)$
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 3/2)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(3/2, +\infty)$
- Puntos de inflexión:  $C(0, 0)$ ,  $D(1, 1)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, 1)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 27/16]$

**46**  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

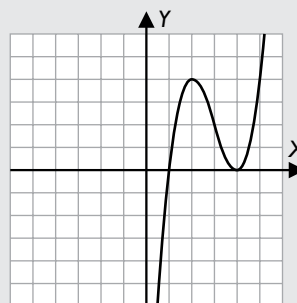
**Solución:**

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

$$y'' = 6x - 18$$

$$y''' = 6$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(1, 0)$ ,  $B(4, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, -16)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(1, 4) \cup (4, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $C(2, 4)$
  - Mínimo relativo:  $D(4, 0)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(2, 4)$
- Punto de inflexión:  $O(3, 2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(3, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 3)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

### 3. Análisis de funciones racionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**47**  $y = \frac{x^2}{x-1}$

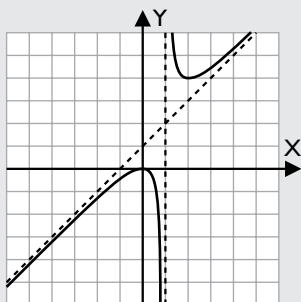
**Solución:**

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en  $x = 1$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 1$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = x + 1$
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $O(0, 0)$
  - Mínimo relativo:  $A(2, 4)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1) \cup (1, 2)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(1, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 1)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

**48**  $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

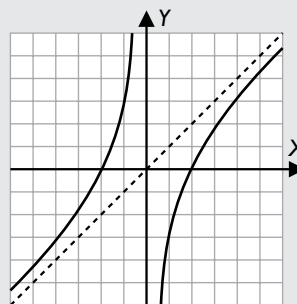
**Solución:**

$$y' = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{8}{x^3}$$

$$y''' = \frac{24}{x^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en  $x = 0$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 0$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = x$
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2, 0), B(2, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**49**  $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

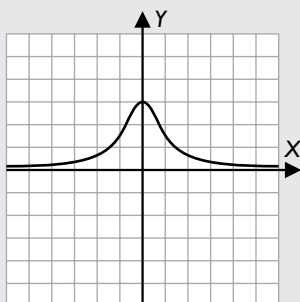
**Solución:**

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 - 72x}{(x^2 + 1)^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y:  $A(0, 3)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(0, 3)$
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, +\infty)$
- Puntos de inflexión:  $B(-\sqrt{3}/3, 9/4), C(\sqrt{3}/3, 9/4)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (0, 3]$

**50**  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

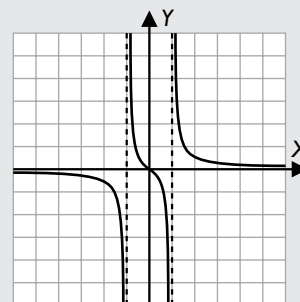
**Solución:**

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en  $x = -1, x = 1$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = -1, x = 1$
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $\emptyset$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Punto de inflexión:  $O(0, 0)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$51 \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$$

**Solución:**

$$y' = \frac{x^3 - 2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

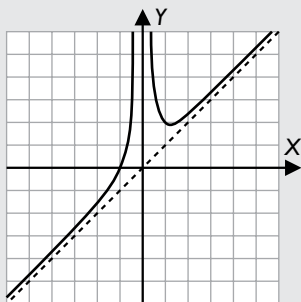
1. Tipo de función: racional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  3. Continuidad: es discontinua en  $x = 0$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 0$
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas:  $y = x$
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(-1, 0)$
    - Eje Y: no lo corta.

Signo:

    - Positiva (+):  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
    - Negativa (-):  $(-\infty, -1)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo:  $B(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, \sqrt[3]{2})$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$52 \quad y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$$

**Solución:**

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = \frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

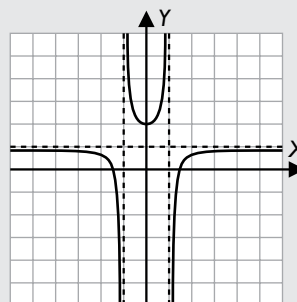
1. Tipo de función: racional.
  2. Dominio:  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
  3. Continuidad: es discontinua en  $x = -1$ ,  $x = 1$ , donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = -1$ ,  $x = 1$
    - Horizontales:  $y = 1$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $B(\sqrt{2}, 0)$
    - Eje Y:  $C(0, 2)$

Signo:

    - Positiva (+):  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
    - Negativa (-):  $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo:  $C(0, 2)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(-1, 1)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

## 4. Análisis de funciones irracionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**53**  $y = \sqrt{x+2}$

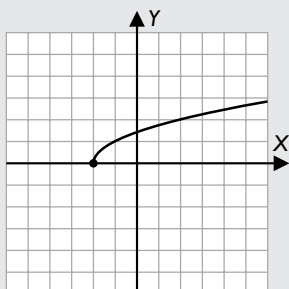
**Solución:**

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8(x+2)^2\sqrt{x+2}}$$

- Tipo de función: irracional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = [-2, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = -2$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2, 0)$
  - Eje Y:  $B(0, \sqrt{2})$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-2, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-2, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

**54**  $y = \sqrt{x^2+1}$

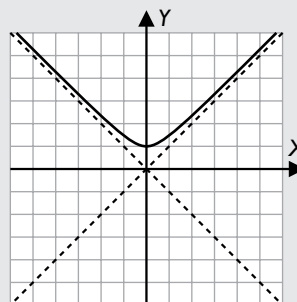
**Solución:**

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y'' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$y''' = -\frac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

- Tipo de función: irracional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en toda la real  $\mathbb{R}$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = -x, y = x$
- Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y:  $A(0, 1)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(0, 1)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$

**55**  $y = \sqrt{x^2 - 9}$

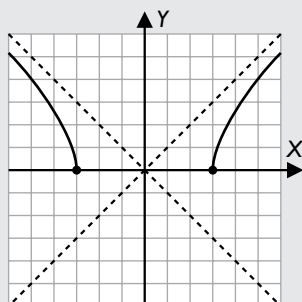
**Solución:**

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y''' = \frac{27x}{(x^2 - 9)^2\sqrt{x^2 - 9}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = -3$ ,  $x = 3$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas:  $y = -x$ ,  $y = x$
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: A(-3, 0), B(3, 0)
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(3, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -3)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

**56**  $y = \sqrt{9 - x^2}$

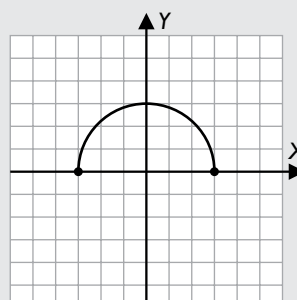
**Solución:**

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{27x}{(9 - x^2)^2\sqrt{9 - x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = [-3, 3]$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = -3$ ,  $x = 3$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: A(-3, 0), B(3, 0)
    - Eje Y: C(0, 3)
  - Signo:
    - Positiva (+):  $(-3, 3)$
    - Negativa (-):  $\emptyset$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: C(0, 3)
    - Mínimo relativo: no tiene.
  - Monotonía:
    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-3, 0)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 3)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
  - Curvatura:
    - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
    - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-3, 3)$
- Es una semicircunferencia.



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, 3]$

**57**  $y = \sqrt[3]{x^2}$

**Solución:**

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9x^2\sqrt[3]{x}}$$

$$y''' = \frac{8}{27x^2\sqrt[3]{x}}$$

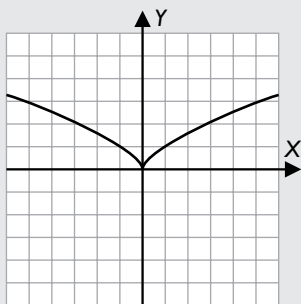
1. Tipo de función: irracional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en toda la recta real.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $O(0, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

    - Positiva (+):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
    - Negativa (-):  $\emptyset$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0)$
  9. Punto de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

**58**  $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

**Solución:**

$$y' = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = \frac{12x}{(4-x^2)^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$y''' = \frac{48(x^2+1)}{(4-x^2)^3\sqrt{4-x^2}}$$

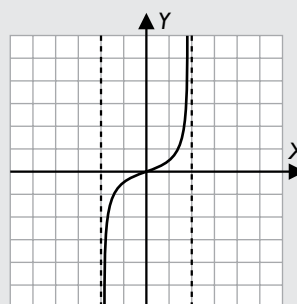
1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una irracional.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-2, 2)$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En  $x = -2$ ,  $x = 2$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = -2$ ,  $x = 2$
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $O(0, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

    - Positiva (+):  $(0, 2)$
    - Negativa (-):  $(-2, 0)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-2, 2)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$
  9. Punto de inflexión:  $O(0, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, 2)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-2, 0)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

## 5. Análisis de funciones exponenciales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**59**  $y = (x + 2)e^{-x}$

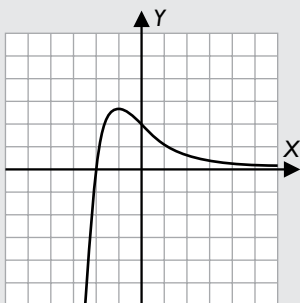
**Solución:**

$$y' = -(x + 1)e^{-x}$$

$$y'' = xe^{-x}$$

$$y''' = -(x - 1)e^{-x}$$

- Tipo de función: polinómica por exponencial.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2, 0)$
  - Eje Y:  $B(0, 2)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -2)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $C(-1, e)$
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -1)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-1, +\infty)$
- Punto de inflexión:  $B(0, 2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, e]$

**60**  $y = xe^x$

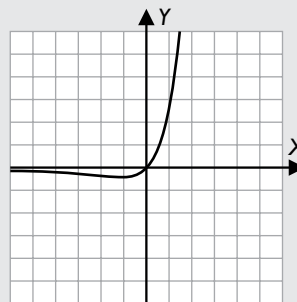
**Solución:**

$$y' = (x + 1)e^x$$

$$y'' = (x + 2)e^x$$

$$y''' = (x + 3)e^x$$

- Tipo de función: polinómica por exponencial.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(-1, -1/e)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-1, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -1)$
- Punto de inflexión:  $B(-2, -2/e^2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-2, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -2)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [-1/e, +\infty)$



**61**  $y = \frac{e^{-x}}{x}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^{-x}}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}}{x^4}$$

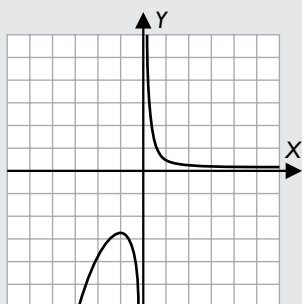
1. Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 0$
    - Horizontales:  $y = 0$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y: no lo corta.

Signo:

    - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
    - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $A(-1, -e)$
    - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, -1)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, -e] \cup (0, +\infty)$

**62**  $y = xe^{1/x}$

**Solución:**

$$y' = \frac{(x-1)e^{1/x}}{x}$$

$$y'' = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{(3x+1)e^{1/x}}{x^5}$$

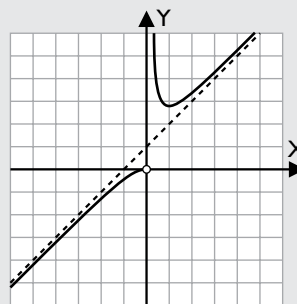
1. Tipo de función: exponencial.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 0$
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas:  $y = x + 1$
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y: no lo corta.

Signo:

    - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
    - Negativa (-):  $(-\infty, 0)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo:  $A(1, e)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

**63**  $y = e^{x^2}$

**Solución:**

$$y' = 2xe^{x^2}$$

$$y'' = (4x^2 + 2)e^{x^2}$$

$$y''' = (2x^2 + 3)4xe^{x^2}$$

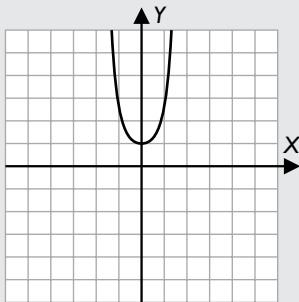
1. Tipo de función: exponencial.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y:  $A(0, 1)$

Signo:

    - Positiva (+):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
    - Negativa (-):  $\emptyset$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo:  $A(0, 1)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, +\infty)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$

**64**  $y = \frac{e^{-x}}{x^2}$

**Solución:**

$$y' = -\frac{(x+2)e^{-x}}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 4x + 6)e^{-x}}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{(x^3 + 6x^2 + 18x + 24)e^{-x}}{x^5}$$

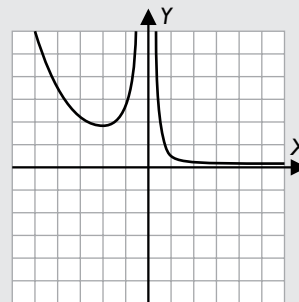
1. Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales:  $x = 0$
    - Horizontales:  $y = 0$
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X: no lo corta.
    - Eje Y: no lo corta.

Signo:

    - Positiva (+):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
    - Negativa (-):  $\emptyset$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo: no tiene.
    - Mínimo relativo:  $A(-2, e^2/4)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(-2, 0)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
  9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

## 6. Análisis de funciones logarítmicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**65**  $y = \ln(x^2 + 1)$

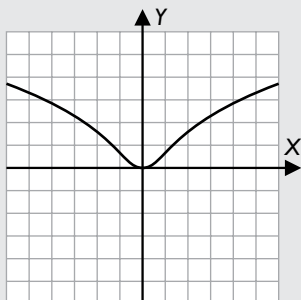
**Solución:**

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

- Tipo de función: logarítmica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $O(0, 0)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 0)$
- Puntos de inflexión:  $B(-1, \ln 2)$ ,  $C(1, \ln 2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-1, 1)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

**66**  $y = \ln(x^2 - 4)$

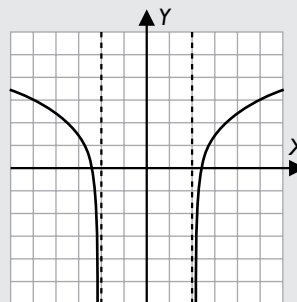
**Solución:**

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 + 48x}{(x^2 - 4)^3}$$

- Tipo de función: logarítmica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en  $x = -2$ ,  $x = 2$  tiene una discontinuidad de 2.<sup>a</sup> especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = -2$ ,  $x = 2$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-\sqrt{5}, 0)$ ,  $B(\sqrt{5}, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5})$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(2, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, -2)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

**67**  $y = \ln(x - 1)^2$

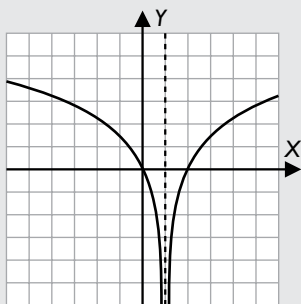
**Solución:**

$$y' = \frac{2}{x-1}$$

$$y'' = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$y''' = \frac{4}{(x-1)^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en  $x = 1$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 1$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0), A(2, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(0, 1) \cup (1, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(1, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(-\infty, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**68**  $y = \frac{1}{\ln x}$

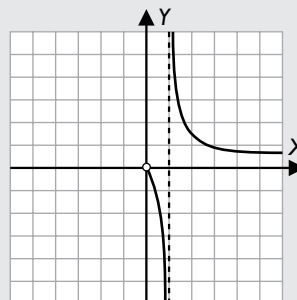
**Solución:**

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 + \ln x}{x^2 \ln^3 x}$$

$$y''' = -\frac{2(\ln^2 x + 3 \ln x + 3)}{x^3 \ln^4 x}$$

1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie y en  $x = 1$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 1$
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $\emptyset$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión:  $A(1/e^2, -1/2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, 1/e^2) \cup (1, +\infty)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(1/e^2, 1)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

**69**  $y = \frac{x}{\ln x}$

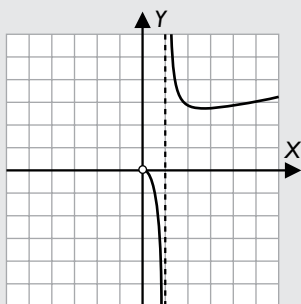
**Solución:**

$$y' = \frac{-1 + \ln x}{\ln^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

$$y''' = \frac{-6 + \ln^2 x}{x^2 \ln^4 x}$$

- Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie y en  $x = 1$  tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 1$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(0, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(e, e)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(e, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1) \cup (1, e)$
- Punto de inflexión:  $B(e^2, e^2/2)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(1, e^2)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$

**70**  $y = \ln^2 x$

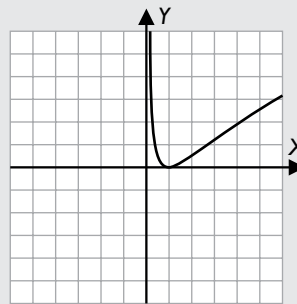
**Solución:**

$$y' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$y'' = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$y''' = \frac{2(-3 + 2 \ln x)}{x^3}$$

- Tipo de función: logarítmica al cuadrado.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo su dominio; en  $x = 0$  tiene una discontinuidad de 2.ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 0$
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(1, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
  - Positiva (+):  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $\emptyset$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(1, 0)$
- Monotonía:
  - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(1, +\infty)$
  - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, 1)$
- Punto de inflexión:  $B(e, 1)$
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(0, e)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(e, +\infty)$



- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

## 7. Análisis de funciones trigonométricas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

**71**  $y = 3 \operatorname{sen} x/2$

**Solución:**

$$y' = \frac{3}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$y'' = -\frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

$$y''' = -\frac{3}{8} \cos \frac{x}{2}$$

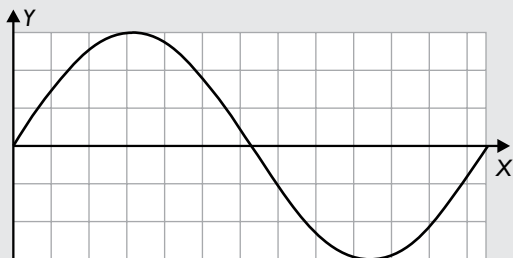
1. Tipo de función: trigonométrica.
  2. Dominio:  $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
  4. Periodicidad: es periódica de periodo  $4\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, 4\pi)$
  5. Simetrías: es simétrica respecto del origen de coordenadas  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $O(0, 0), A(2\pi, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

    - Positiva (+):  $(0, 2\pi)$
    - Negativa (-):  $(2\pi, 4\pi)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $B(\pi, 3)$
    - Mínimo relativo:  $C(3\pi, -3)$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(\pi, 3\pi)$
  9. Puntos de inflexión:  $O(0, 0), A(2\pi, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(2\pi, 4\pi)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, 2\pi)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\operatorname{Im}(f) = [-3, 3]$

**72**  $y = \operatorname{sen} x - \cos x$

**Solución:**

$$y' = \cos x + \operatorname{sen} x$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x + \cos x$$

$$y''' = -\cos x - \operatorname{sen} x$$

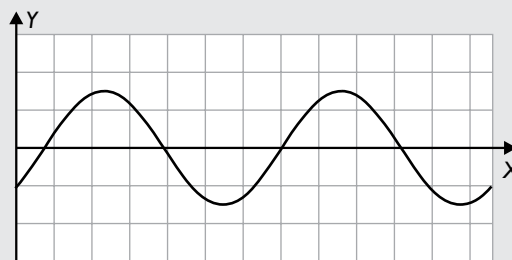
1. Tipo de función: trigonométrica.
  2. Dominio:  $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
  4. Periodicidad: es periódica de periodo  $2\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, 2\pi)$
  5. Simetrías: no es simétrica.
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(\pi/4, 0), B(5\pi/4, 0)$
    - Eje Y:  $C(0, -1)$

Signo:

    - Positiva (+):  $(\pi/4, 5\pi/4)$
    - Negativa (-):  $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $D(3\pi/4, \sqrt{2})$
    - Mínimo relativo:  $E(7\pi/4, -\sqrt{2})$

Monotonía:

    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(3\pi/4, 7\pi/4)$
  9. Puntos de inflexión:  $A(\pi/4, 0), B(5\pi/4, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(\pi/4, 5\pi/4)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\operatorname{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

**73**  $y = \text{sen}^2 x$

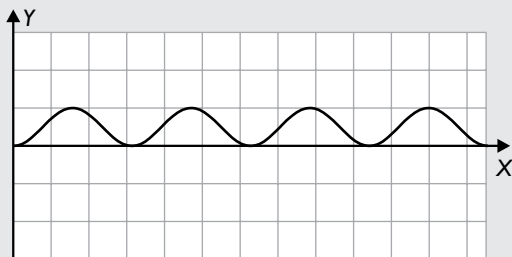
**Solución:**

$$y' = 2 \text{sen } x \cdot \cos x$$

$$y'' = -2 + 4 \cos^2 x$$

$$y''' = -8 \text{sen } x \cos x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
  4. Periodicidad: es periódica de periodo  $\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, \pi)$
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $O(0, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$
 Signo:
    - Positiva (+):  $(0, \pi)$
    - Negativa (-):  $\emptyset$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $A(\pi/2, 1)$
    - Mínimo relativo:  $O(0, 0)$
 Monotonía:
    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, \pi/2)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(\pi/2, \pi)$
  9. Puntos de inflexión:  $B(\pi/4, 1/2), C(3\pi/4, 1/2)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(\pi/4, 3\pi/4)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [0, 1]$

**74**  $y = 3 \cos 2x$

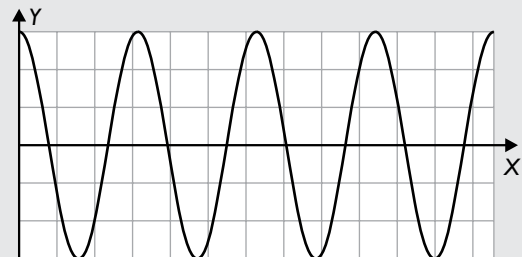
**Solución:**

$$y' = -6 \text{sen } 2x$$

$$y'' = -12 \cos 2x$$

$$y''' = 24 \text{sen } 2x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
  4. Periodicidad: es periódica de periodo  $\pi$ ; se estudia solo en el primer periodo  $[0, \pi)$
  5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
  6. Asíntotas:
    - Verticales: no tiene.
    - Horizontales: no tiene.
    - Oblicuas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $A(\pi/4, 0), B(3\pi/4, 0)$
    - Eje Y:  $C(0, 3)$
 Signo:
    - Positiva (+):  $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
    - Negativa (-):  $(\pi/4, 3\pi/4)$
  8. Máximos y mínimos relativos:
    - Máximo relativo:  $C(0, 3)$
    - Mínimo relativo:  $D(\pi/2, -3)$
 Monotonía:
    - Creciente ( $\nearrow$ ):  $(\pi/2, \pi)$
    - Decreciente ( $\searrow$ ):  $(0, \pi/2)$
  9. Puntos de inflexión:  $A(\pi/4, 0), B(3\pi/4, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ( $\cup$ ):  $(\pi/4, 3\pi/4)$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$



10. Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = [-3, 3]$

## Para ampliar

**75** Dada la función  $y = x^3 + 2x$

- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

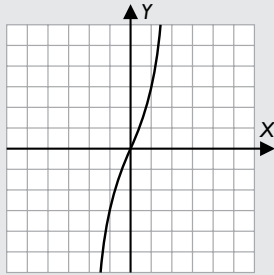
$$y' = 3x^2 + 2$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6 \neq 0$$

a)  $A(0, 0)$

b) Gráfica:



**76** Dada la función  $y = x^4$

- Halla y clasifica los puntos singulares.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = 4x^3$$

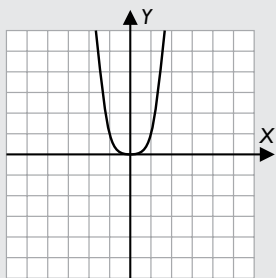
$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

$$y^{(4)} = 24 > 0 (+)$$

a)  $A(0, 0)$  mínimo relativo.

b) Gráfica:



**77** Dada la función  $y = \frac{1}{x^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Esboza la gráfica.

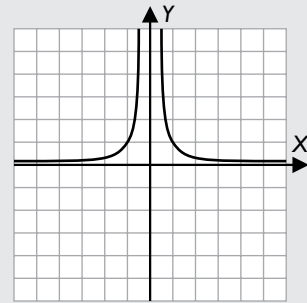
**Solución:**

a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales:  $x = 0$
- Horizontales:  $y = 0$

c) Gráfica:



**78** Dada la función  $y = \sqrt{x}$

- Calcula el dominio.
- Determina la monotonía.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

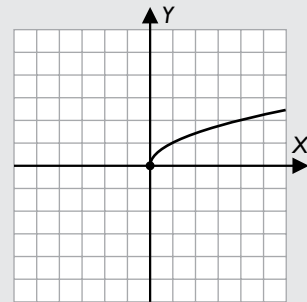
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a)  $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

b) Monotonía:

- Creciente ( $\nearrow$ ):  $(0, +\infty)$
- Decreciente ( $\searrow$ ):  $\emptyset$

c) Gráfica:



**79** Dada la función  $y = x^4 - 6x^2 + 5$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = 4x^3 - 12x$$

$$y'' = 12x^2 - 12$$

$$y''' = 24x$$

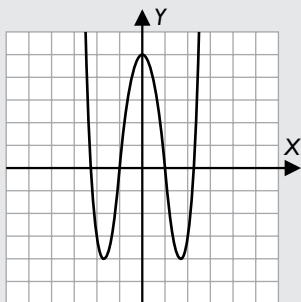
a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(0, 5)$
- Mínimo relativo:  $B(-\sqrt{3}, -4)$ ;  $C(\sqrt{3}, -4)$

b) Puntos de inflexión:  $D(-1, 0)$ ;  $E(1, 0)$



c) Gráfica:



**80** Sea la función  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

- Determina los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Con los datos obtenidos haz un esbozo de la función.

**Solución:**

$$y' = 3x^2 - 12x$$

$$y'' = 6x - 12$$

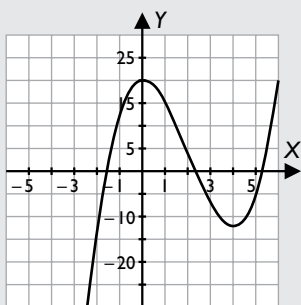
$$y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(0, 20)$
- Mínimo relativo:  $B(4, -12)$

b) Punto de inflexión:  $C(2, 4)$

c) Gráfica:



**81** Dada la función  $y = x^4 - 2x^2$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4$$

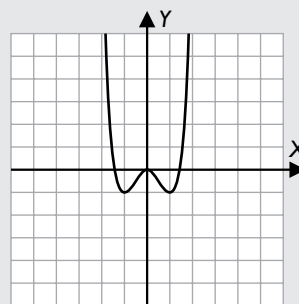
$$y''' = 24x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $O(0, 0)$
- Mínimo relativo:  $A(-1, -1)$ ;  $B(1, -1)$

b) Puntos de inflexión:  $C(-\sqrt{3}/3, -5/9)$ ;  $D(\sqrt{3}/3, -5/9)$

c) Gráfica:



**82** Dada la función  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

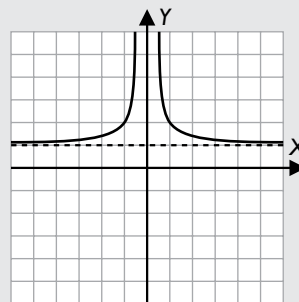
$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales:  $x = 0$
- Horizontales:  $y = 1$

c) Gráfica:



**83** Dada la función  $y = x^3 - 3x^2 + 2$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

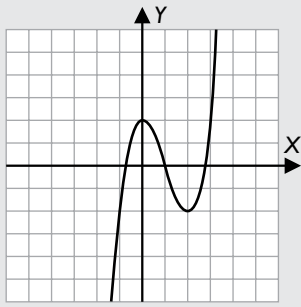
$$y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(0, 2)$
- Mínimo relativo:  $B(2, -2)$

b) Punto de inflexión:  $C(1, 0)$

c) Gráfica:



84 Dada la función  $y = 6x^2 - 3x^4$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = 12x - 12x^3$$

$$y'' = 12 - 36x^2$$

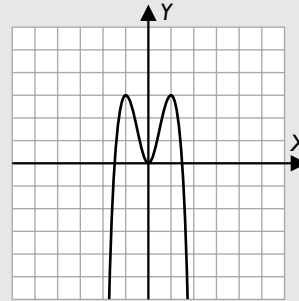
$$y''' = -72x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(-1, 3)$ ;  $B(1, 3)$
- Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

b) Puntos de inflexión:  $C(-\sqrt{3}/3, 5/3)$ ;  $D(\sqrt{3}/3, 5/3)$

c) Gráfica:



## Problemas

85 Dada la función  $y = x^3 + 3x^2$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

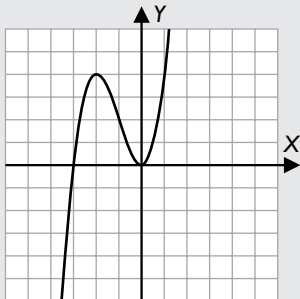
$$y' = 3x^2 + 6x \quad y'' = 6x + 6 \quad y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(-2, 4)$
- Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

b) Punto de inflexión:  $C(-1, 2)$

c) Gráfica:



86 Dada la función  $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$y''' = -\frac{12x+12}{(x-1)^5}$$

a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales:  $x = 1$
- Horizontales:  $y = 1$

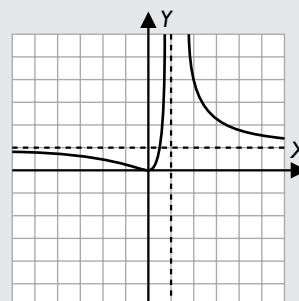
c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

d) Punto de inflexión:

$$A(-1/2, 1/9)$$

e) Gráfica:



# Ejercicios y problemas propuestos

**87** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

- Determina los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Calcula los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica de la función.

**Solución:**

$$y' = -6x^2 - 18x - 12$$

$$y'' = -12x - 18$$

$$y''' = -12$$

a) Puntos de corte con los ejes:

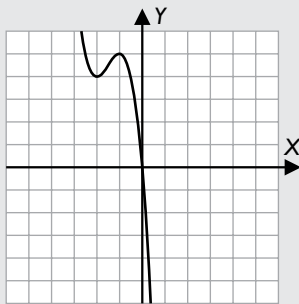
- Eje X:  $O(0, 0)$
- Eje Y:  $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(-1, 5)$
- Mínimo relativo:  $B(-2, 4)$

c) Punto de inflexión:  $C(-3/2, 9/2)$

d) Gráfica:



**88** Dada la función  $y = 2x^2 - x^4$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = 4x - 4x^3$$

$$y'' = 4 - 12x^2$$

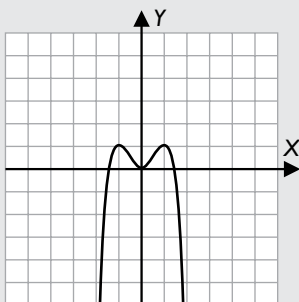
$$y''' = -24x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(-1, 1), B(1, 1)$
- Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

b) Puntos de inflexión:  $C(-\sqrt{3}/3, 5/9), D(\sqrt{3}/3, 5/9)$

c) Gráfica:



**89** Dada la siguiente función, definida en los números reales salvo en  $x = 0$ ;

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

- Determina el dominio.
- Halla las asíntotas.
- Calcula las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
- Esboza la gráfica de la función

**Solución:**

$$y' = \frac{2}{x^2} - 1$$

$$y'' = -\frac{4}{x^3}$$

$$y''' = \frac{12}{x^4}$$

a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

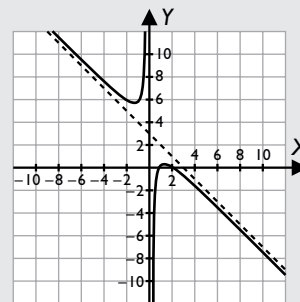
b) Asíntotas:

- Verticales:  $x = 0$
- Oblicuas:  $y = 3 - x$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$
- Mínimo relativo:  $B(-\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$

d) Gráfica:



**90** Dada la función  $y = \sqrt{x^2 + 9}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$y'' = \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$y''' = -\frac{27x}{(x^2 + 9)^2\sqrt{x^2 + 9}}$$

a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

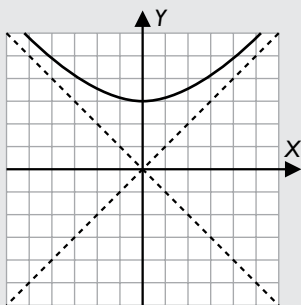
b) Asintotas:

- Oblicuas:  $y = x$ ,  $y = -x$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo:  $A(0, 3)$

d) Gráfica:



**91** Sea la función  $V(t) = 60 \left( \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t \right)$

- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica de la función.

**Solución:**

$$v'(t) = 60(t^2 - 10t + 16)$$

$$v''(t) = 60(2t - 10)$$

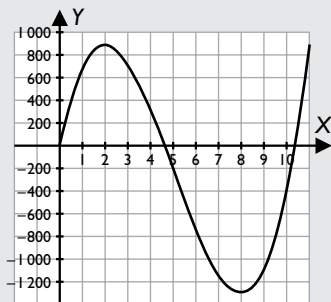
$$v'''(t) = 120$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(2, 880)$
- Mínimo relativo:  $B(8, -1280)$

b) Punto de inflexión:  $C(5, -200)$

c) Gráfica:



**92** Sea  $f$  la función definida para  $x \neq -2$  por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

- Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$
- Calcula los extremos locales de  $f$
- Determina los puntos de inflexión.
- Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica.

**Solución:**

$$y' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{8}{(x+2)^3}$$

$$y''' = -\frac{24}{(x+2)^4}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

a) Asíntotas:

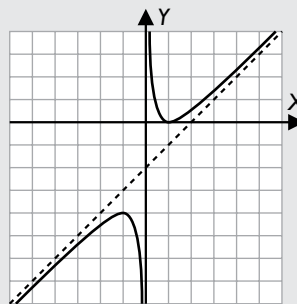
- Verticales:  $x = -2$
- Oblicuas:  $y = x - 2$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(-4, -8)$
- Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

c)  $y'' \neq 0$ . No hay puntos de inflexión.

d) Gráfica:



**93** Se considera la función  $f(x) = x^2 e^{-x}$

Estudia:

- Asíntotas.
- Extremos relativos.
- A partir de estos datos, representa la función.

**Solución:**

$$y' = -x(x-2)e^{-x}$$

$$y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$$y''' = -(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$$

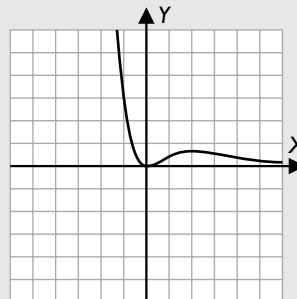
a) Asíntotas:

- Horizontal:  $y = 0$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo:  $A(2, 4/e^2)$
- Mínimo relativo:  $O(0, 0)$

c) Gráfica:



# Ejercicios y problemas propuestos

**94** Dada la función  $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

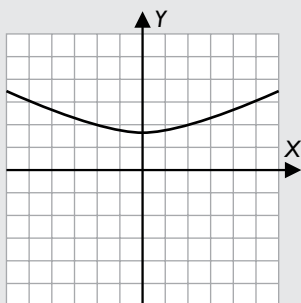
**Solución:**

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 24}{9(x^2 + 4)\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

$$y''' = \frac{8x^3 - 288x}{27(x^2 + 4)^2\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(0, \sqrt[3]{4})$
- Puntos de inflexión:  $B(-2\sqrt{3}, 2\sqrt[3]{2})$ ;  $C(2\sqrt{3}, 2\sqrt[3]{2})$
- Gráfica:



**95** Dada la función  $y = e^x + e^{-x}$

- Halla y clasifica los puntos singulares.
- Esboza la gráfica.

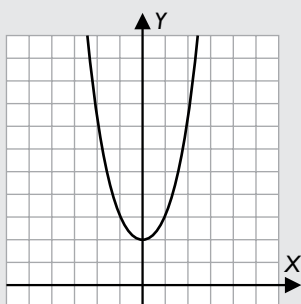
**Solución:**

$$y' = e^x - e^{-x}$$

$$y'' = e^x + e^{-x}$$

$$y''' = e^x - e^{-x}$$

- Punto singular:  $A(0, 2)$  es un mínimo relativo.
- Gráfica:



**96** Halla y clasifica los puntos singulares de la función:

$$y = x^4 + x^2$$

Esboza la gráfica.

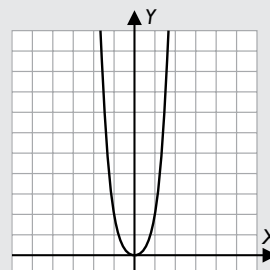
**Solución:**

$$y' = 4x^3 + 2x$$

$$y'' = 12x^2 + 2$$

$$y''' = 24x$$

- Punto singular:  $A(0, 0)$  es un mínimo relativo.
- Gráfica:



**97** Dada la curva  $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

- Determina el dominio de definición.
- Halla las simetrías.
- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Calcula las asíntotas.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Haz una representación aproximada.

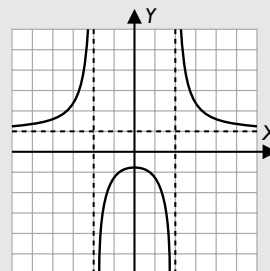
**Solución:**

$$y' = -\frac{14x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{42x^2 + 56}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{168x^3 + 672x}{(x^2 - 4)^4}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Corte con los ejes:
  - Eje X: no lo corta.
  - Eje Y:  $A(0, -3/4)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = -2, x = 2$
  - Horizontales:  $y = 1$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(0, -3/4)$
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Gráfica:



**98** Dada la función  $y = \ln(x + 1)^2$

- Determina su dominio.
- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Calcula las asíntotas.
- Esboza la gráfica.

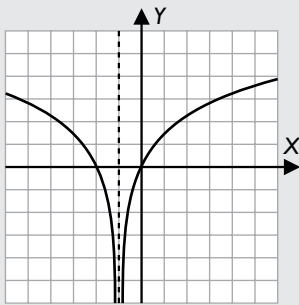
**Solución:**

$$y' = \frac{2}{x + 1}$$

$$y'' = -\frac{2}{(x + 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4}{(x + 1)^3}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-2, 0)$ ;  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = -1$
- Gráfica:



**99** Dada la función  $y = x^4 + 4x$

- Halla y clasifica los puntos singulares.
- Calcula los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

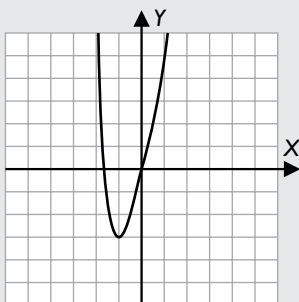
**Solución:**

$$y' = 4x^3 + 4$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(-1, -3)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Gráfica:



**100** Dada la función  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

- Calcula el dominio.
- Halla las simetrías.
- Determina las asíntotas.
- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Esboza la gráfica.

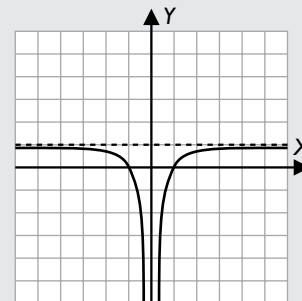
**Solución:**

$$y' = \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{6}{x^4}$$

$$y''' = \frac{24}{x^5}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 0$
  - Horizontales:  $y = 1$
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-1, 0)$ ;  $B(1, 0)$
  - Eje Y: no lo corta.
- Gráfica:



**101** Dada la función  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

- Calcula el dominio.
- Halla las simetrías.
- Determina las asíntotas.
- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

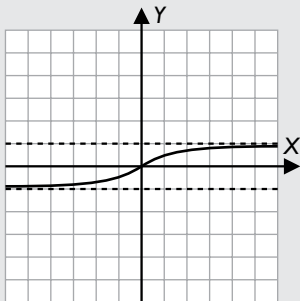
$$y' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y'' = -\frac{12x}{(x^2 + 4)^2\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y''' = \frac{48(x^2 - 1)}{(x^2 + 4)^3\sqrt{x^2 + 4}}$$

# Ejercicios y problemas propuestos

- a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$   
 b) Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$   
 c) Asíntotas:  
 • Horizontales:  $y = -1$ ,  $y = 1$   
 d) Corte con los ejes:  
 • Eje X:  $O(0, 0)$   
 • Eje Y:  $O(0, 0)$   
 e) Punto de inflexión:  $O(0, 0)$   
 f) Gráfica:



**102** Dada la función  $y = -(x + 2)e^{-x}$

- a) Calcula las asíntotas.  
 b) Halla los puntos de corte con los ejes.  
 c) Halla los máximos y mínimos relativos.  
 d) Determina los puntos de inflexión.  
 e) Esboza la gráfica.

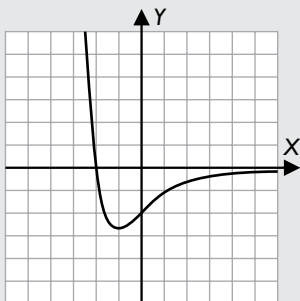
**Solución:**

$$y' = (x + 1)e^{-x}$$

$$y'' = -xe^{-x}$$

$$y''' = (x - 1)e^{-x}$$

- a) Asíntotas:  
 • Horizontales:  $y = 0$   
 b) Corte con los ejes:  
 • Eje X:  $A(-2, 0)$   
 • Eje Y:  $B(0, -2)$   
 c) Máximos y mínimos relativos:  
 • Máximo relativo: no tiene.  
 • Mínimo relativo:  $C(-1, -e)$   
 d) Punto de inflexión:  $D(0, -2)$   
 e) Gráfica:



**103** Dada la función  $y = \ln(x^2 - x - 2)$

- a) Determina su dominio.  
 b) Calcula las asíntotas.  
 c) Esboza la gráfica.

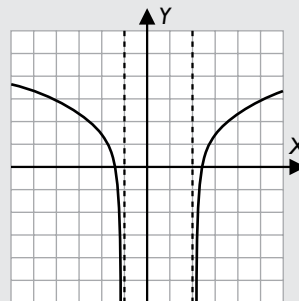
**Solución:**

$$y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 6x^2 + 30x - 14}{(x^2 - x - 2)^3}$$

- a)  $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$   
 b) Asíntotas:  
 • Verticales:  $x = -1$ ,  $x = 2$   
 c) Gráfica:



**104** Dada la función  $y = \frac{x(x + 2)}{x^2 - 1}$

- a) Calcula el dominio.  
 b) Determina las asíntotas.  
 c) Halla los puntos de corte con los ejes.  
 d) Esboza la gráfica.

**Solución:**

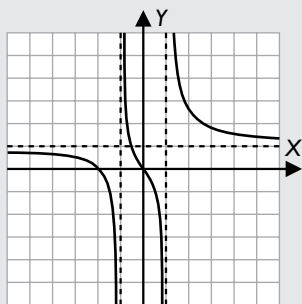
$$y' = -\frac{2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 + 6x^2 + 12x + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{12x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 24x + 12}{(x^2 - 1)^4}$$

- a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$   
 b) Asíntotas:  
 • Verticales:  $x = -1$ ,  $x = 1$   
 • Horizontales:  $y = 1$   
 c) Corte con los ejes:  
 • Eje X:  $A(-2, 0)$ ;  $O(0, 0)$   
 • Eje Y:  $O(0, 0)$

d) Gráfica:



**105** Dada la función  $y = 3x^5 - 5x^3$

- Determina las simetrías.
- Calcula los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

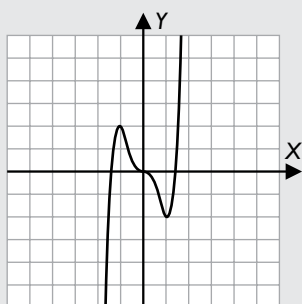
**Solución:**

$$y' = 15x^4 - 15x^2$$

$$y'' = 60x^3 - 30x$$

$$y''' = 180x^2 - 30$$

- Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-\sqrt{15/3}, 0)$ ;  $O(0, 0)$ ;  $B(\sqrt{15/3}, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(-1, 2)$
  - Mínimo relativo:  $B(1, -2)$
- Puntos de inflexión:
  - $C(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8)$ ;  $O(0, 0)$ ;  $D(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$
- Gráfica:



## Para profundizar

**106** Dada la función  $y = x^3 + 3x$

- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

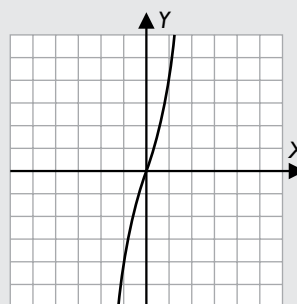
**Solución:**

$$y' = 3x^2 + 3$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Punto de inflexión:  $O(0, 0)$
- Gráfica:



**107** Dada la función  $y = x^4 + 2x^2$

- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

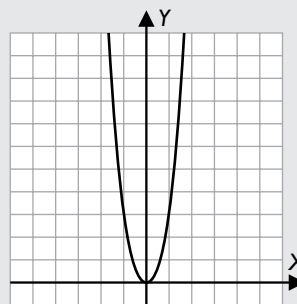
$$y' = 4x^3 + 4x$$

$$y'' = 12x^2 + 4$$

$$y''' = 24x$$

$$y^{IV} = 24$$

- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $O(0, 0)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Gráfica:





**108** Dada la función  $y = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Calcula los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

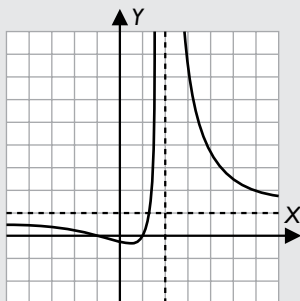
**Solución:**

$$y' = -\frac{4x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$y'' = \frac{8x + 2}{(x - 2)^4}$$

$$y''' = -\frac{24x + 24}{(x - 2)^5}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 2$
  - Horizontales:  $y = 1$
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $A(-1, 0)$ ;  $B(1, 0)$
  - Eje Y:  $C(0, -1/4)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $D(1/2, -1/3)$
- Punto de inflexión:  $O(-1/4, -5/27)$
- Gráfica:



**109** Se considera la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$$

- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los intervalos de concavidad y convexidad.
- Representala gráficamente.

**Solución:**

$$y' = 6x^2 - 42x + 60$$

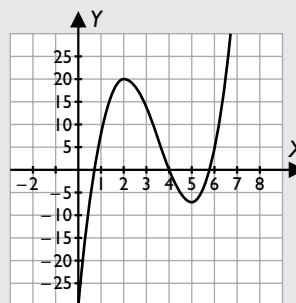
$$y'' = 12x - 42$$

$$y''' = 12$$

- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(2, 20)$
  - Mínimo relativo:  $B(5, -7)$

b) Punto de inflexión:  $C(7/2, 13/2)$

c) Gráfica:



**110** Dada la función  $y = x^4 - 4x$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

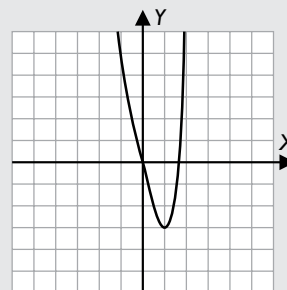
**Solución:**

$$y' = 4x^3 - 4$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo:  $A(1, -3)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Gráfica:



**111** Dada la función  $y = \sqrt{25 - x^2}$

- Calcula el dominio.
- Determina las asíntotas.
- Calcula los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

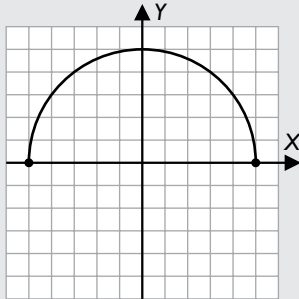
$$y' = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{25}{(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{75x}{(25 - x^2)^2\sqrt{25 - x^2}}$$

- $\text{Dom}(f) = [-5, 5]$
- Asíntotas: no tiene.

- c) Corte con los ejes:
- Eje X:  $A(-5, 0)$ ;  $B(5, 0)$
  - Eje Y:  $C(0, 5)$
- d) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo:  $C(0, 5)$
  - Mínimo relativo: no tiene.
- e) Puntos de inflexión: no tiene.
- f) Gráfica:



- 112** Dada la función  $y = 3x^2 - x^3$
- Calcula los puntos de corte con los ejes.
  - Halla los máximos y mínimos relativos.
  - Halla los puntos de inflexión.
  - Esboza la gráfica.

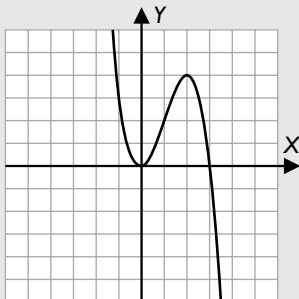
**Solución:**

$$y' = 6x - 3x^2$$

$$y'' = 6 - 6x$$

$$y''' = -6$$

- a) Corte con los ejes:
- Eje X:  $O(0, 0)$ ;  $A(3, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- b) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo:  $B(2, 4)$
  - Mínimo relativo:  $O(0, 0)$
- c) Punto de inflexión:  $C(1, 2)$
- d) Gráfica:



- 113** Dada la función  $y = e^x - e^{-x}$
- Determina las simetrías.
  - Calcula los puntos de corte con los ejes.
  - Halla los máximos y mínimos relativos.
  - Halla los puntos de inflexión.
  - Esboza la gráfica.

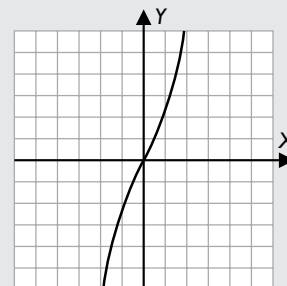
**Solución:**

$$y' = e^x + e^{-x}$$

$$y'' = e^x - e^{-x}$$

$$y''' = e^x + e^{-x}$$

- a) Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- b) Corte con los ejes:
- Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- c) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- d) Punto de inflexión:  $O(0, 0)$
- e) Gráfica:



- 114** Dada la función  $y = 5x^3 - 3x^5$
- Determina las simetrías.
  - Calcula los puntos de corte con los ejes.
  - Halla los máximos y mínimos relativos.
  - Halla los puntos de inflexión.
  - Esboza la gráfica.

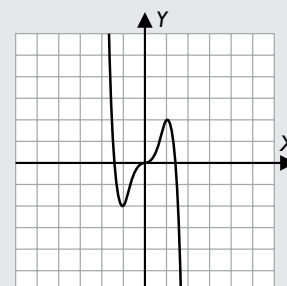
**Solución:**

$$y' = 15x^2 - 15x^4$$

$$y'' = 30x - 60x^3$$

$$y''' = 30 - 180x^2$$

- a) Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
- b) Corte con los ejes:
- Eje X:  $A(-\sqrt{15}/3, 0)$ ;  $O(0, 0)$ ;  $B(\sqrt{15}/3, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
- c) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo:  $A(1, 2)$
  - Mínimo relativo:  $B(-1, -2)$
- d) Puntos de inflexión:
- $C(-\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$ ;  $O(0, 0)$ ;  $D(\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8)$
- e) Gráfica:



# Ejercicios y problemas propuestos

**115** Dada la función  $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

- Calcula el dominio.
- Halla los puntos de corte con el eje X
- Determina los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

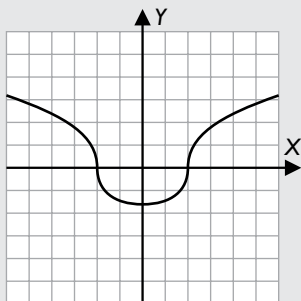
**Solución:**

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 24}{9(x^2 - 4)\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

$$y''' = \frac{8x^3 + 288x}{27(x^2 - 4)^2\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

- Dom(f) =  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Asíntotas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X: A(-2, 0); B(2, 0)
  - Eje Y: C(0,  $-\sqrt[3]{4}$ )
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: C(0,  $-\sqrt[3]{4}$ )
- Puntos de inflexión: A(-2, 0); B(2, 0)
- Gráfica:



**116** Dada la función  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

**Solución:**

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

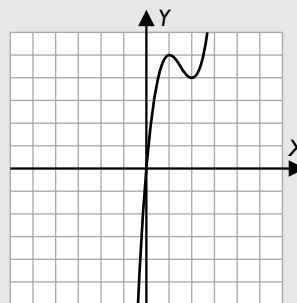
$$y'' = 12x - 18$$

$$y''' = 12$$

- Corte con los ejes:
  - Eje X: O(0, 0)
  - Eje Y: O(0, 0)
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: A(1, 5)
  - Mínimo relativo: B(2, 4)

c) Punto de inflexión: C(3/2, 9/2)

d) Gráfica:



**117** Dada la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 8}}$

- Calcula el dominio.
- Calcula las asíntotas.
- Halla los puntos de corte con el eje X
- Determina los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica.

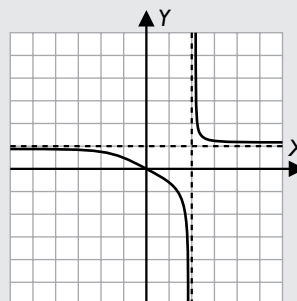
**Solución:**

$$y' = -\frac{8}{(x^3 - 8)\sqrt[3]{x^3 - 8}}$$

$$y'' = \frac{32x^2}{(x^3 - 8)^2\sqrt[3]{x^3 - 8}}$$

$$y''' = -\frac{160x^4 + 512x}{(x^3 - 8)^3\sqrt[3]{x^3 - 8}}$$

- Dom(f) =  $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = 2$
  - Horizontales:  $y = 1$
- Corte con los ejes:
  - Eje X: O(0, 0)
  - Eje Y: O(0, 0)
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Gráfica:



## Practica

Representa las siguientes funciones completando para cada una de ellas el formulario de los 10 apartados:

**119** Representa y analiza la función:

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

### Solución:

Ejercicio 119

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4};$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura\_linea = 2})

1. Tipo de función : polinómica.

2. Dominio : por ser una función polinómica es toda la recta real.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3. Continuidad : por ser una función polinómica es continua en toda la recta real.

4. Periodicidad : por ser una función polinómica no es periódica.

5. Simetrías :

$$f(-x) \Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$  es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas : por ser una función polinómica no tiene asíntotas.

7. Corte con los ejes :

$$\text{resolver}(f(x) = 0) \Rightarrow \{x=0\}, \{x=-2 \cdot \sqrt{2}\}, \{x=2 \cdot \sqrt{2}\}$$

· Eje X : O(0, 0), A(-2·√2, 0); B(2·√2, 0)

$$O = \text{punto}(0, 0) \Rightarrow (0, 0)$$

$$A = \text{punto}(-2 \cdot \sqrt{2}, 0) \Rightarrow (-2 \cdot \sqrt{2}, 0)$$

$$B = \text{punto}(2 \cdot \sqrt{2}, 0) \Rightarrow (2 \cdot \sqrt{2}, 0)$$

dibujar(O, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

dibujar(A, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

· Eje Y : O(0, 0)

Signo :

· Positiva (+) : (-2·√2, 0) U (0, 2·√2)

· Negativa (-) : (-∞, -2·√2) U (2·√2, +∞)

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \Rightarrow -x^3 + 4 \cdot x$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \Rightarrow \{x=-2\}, \{x=0\}, \{x=2\}$$

$$f(0) \Rightarrow 0$$

$$O = \text{punto}(0, 0) \Rightarrow (0, 0)$$

$$f''(0) \Rightarrow 4$$

· Mínimo relativo : O(0, 0)

$$f(-2) \Rightarrow 4$$

$$C = \text{punto}(-2, 4) \Rightarrow (-2, 4)$$

$$f''(-2) \Rightarrow -8$$

· Máximo relativo : A(-2, 4)

dibujar(C, {color = azul, tamaño\_punto = 8})

$$f(2) \Rightarrow 4$$

$$D = \text{punto}(2, 4) \Rightarrow (2, 4)$$

$$f''(2) \Rightarrow -8$$

· Máximo relativo : B(2, 4)

dibujar(D, {color = cian, tamaño\_punto = 8})

Monotonía :

· Creciente : (-∞, -2) U (0, 2)

· Decreciente : (-2, 0) U (2, +∞)

9. Puntos de inflexión :

$$f''(x) \Rightarrow -3 \cdot x^2 + 4$$

$$\text{resolver}(f''(x) = 0) \Rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \right\}, \left\{ x = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \right\} \right\}$$

$$f\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \frac{20}{9}$$

$$E = \text{punto}\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \Rightarrow \left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$$

$$f''\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \frac{20}{9}$$

$$F = \text{punto}\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$$

$$f''\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow -4 \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Puntos de inflexión : } E\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right); F\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$$

dibujar(E, {color = magenta, tamaño\_punto = 8})

dibujar(F, {color = magenta, tamaño\_punto = 8})

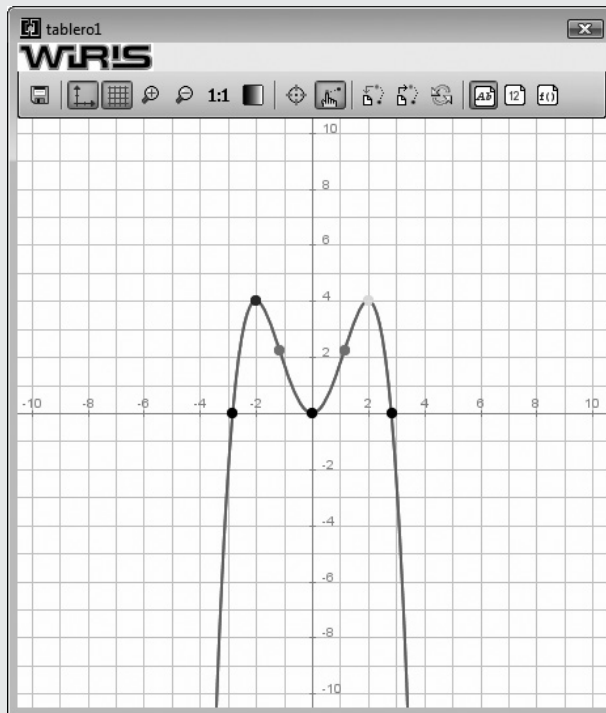
Curvatura :

$$\cdot \text{Convexa (U)} : \left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\cdot \text{Cónca (n)} : \left(-\infty, -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

10. Recorrido o imagen :

$$\text{Img}(f) = (-\infty, 4]$$



**120** Representa y analiza la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

### Solución:

Ejercicio 120

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x};$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura\_linea = 2})

1. Tipo de función : racional.

2. Dominio : por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

3. Continuidad : es discontinua en  $x = 0$  donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad : por ser una función racional no es periódica.

5. Simetrías :

$$f(-x) \Rightarrow \frac{-x^2 - 1}{x}$$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$  es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0)

6. Asintotas :

- Verticales :  $x = 0$

dibujar( $x = 0$ , {color=verde, anchura\_linea=2})

- Horizontales : no tiene.
- Oblicuas :

$$x^2 + 1 \left| \frac{x}{x} \Rightarrow x^2 + 1 \left| \frac{x}{x} \right. \right.$$

$$y = x$$

dibujar( $y = x$ , {color=verde, anchura\_linea=2})

7. Corte con los ejes :

resolver( $f(x) = 0$ )  $\Rightarrow$  { }

- Eje X : No lo corta.
- Eje Y : No lo corta.

Signo :

- Positiva (+) :  $(0, +\infty)$
- Negativa (-) :  $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

resolver( $f'(x) = 0$ )  $\Rightarrow$  {{ $x = -1$ }, { $x = 1$ }}

$$f(-1) \Rightarrow -2$$

A = punto(-1, -2)  $\Rightarrow$  (-1, -2)

$$f'(-1) \Rightarrow -2$$

- Máximo relativo : A(-1, -2)

dibujar(A, {color = azul, tamaño\_punto = 8})

$$f(1) \Rightarrow 2$$

B = punto(1, 2)  $\Rightarrow$  (1, 2)

$$f'(1) \Rightarrow 2$$

- Mínimo relativo : B(1, 2)

dibujar(B, {color = cian, tamaño\_punto = 8})

Monotonía :

- Creciente :  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Decreciente :  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión :

$$f''(x) \Rightarrow \frac{2}{x^3}$$

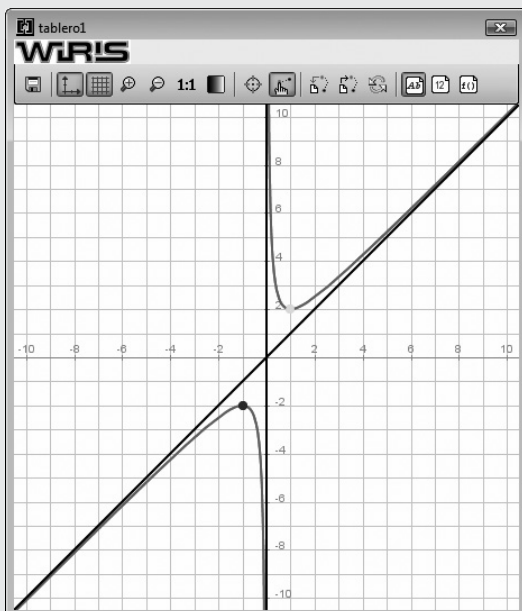
Puntos de inflexión : no tiene.

Curvatura :

- Convexa (U) :  $(0, +\infty)$
- Cóncava (∩) :  $(-\infty, 0)$

10. Recorrido o imagen :

$$\text{Im}g(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$



121 Representa y analiza la función:

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

Solución:

Ejercicio 121

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4};$$

dibujar( $f(x)$ , {color = rojo, anchura\_linea = 2})

1. Tipo de función : irracional.

2. Dominio : por ser una función irracional de índice par, el radicando tiene que ser positivo.

resolver\_inecuación( $x^2 - 4 \geq 0$ )  $\Rightarrow$   $x \geq 2 \mid x \leq -2$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

3. Continuidad : es discontinua en  $x = -2$ ,  $x = 2$  donde tiene una discontinuidad de 2ª especie.

4. Periodicidad : por ser una función irracional no es periódica.

5. Simetrías :

$$f(-x) \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4}$$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$  es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asintotas :

- Verticales : no tiene.
- Horizontales : no tiene.
- Oblicuas :

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow 1$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) \Rightarrow 0$$

$$y = x$$

dibujar( $y = x$ , {color=verde, anchura\_linea=2})

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow -1$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) \Rightarrow +\infty$$

$$y = -x$$

dibujar( $y = -x$ , {color=verde, anchura\_linea=2})

7. Corte con los ejes :

resolver( $f(x) = 0$ )  $\Rightarrow$  {{ $x = -2$ }, { $x = 2$ }}

A = punto(-2, 0)  $\Rightarrow$  (-2, 0)

B = punto(2, 0)  $\Rightarrow$  (2, 0)

- Eje X : A(-2, 0); B(2, 0)

dibujar(A, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

- Eje Y : No lo corta.

Signo :

- Positiva (+) :  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Negativa (-) : Nunca.

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

resolver( $f'(x) = 0$ )  $\Rightarrow$  { }

$0 \notin \text{Dom}(f)$

- Máximo relativo : No tiene.
- Mínimo relativo : No tiene.

Monotonía :

- Creciente :  $(2, +\infty)$
- Decreciente :  $(-\infty, -2)$

9. Puntos de inflexión :

$$f''(x) \Rightarrow \frac{-4}{(x^2 - 4) \cdot \sqrt{x^2 - 4}}$$

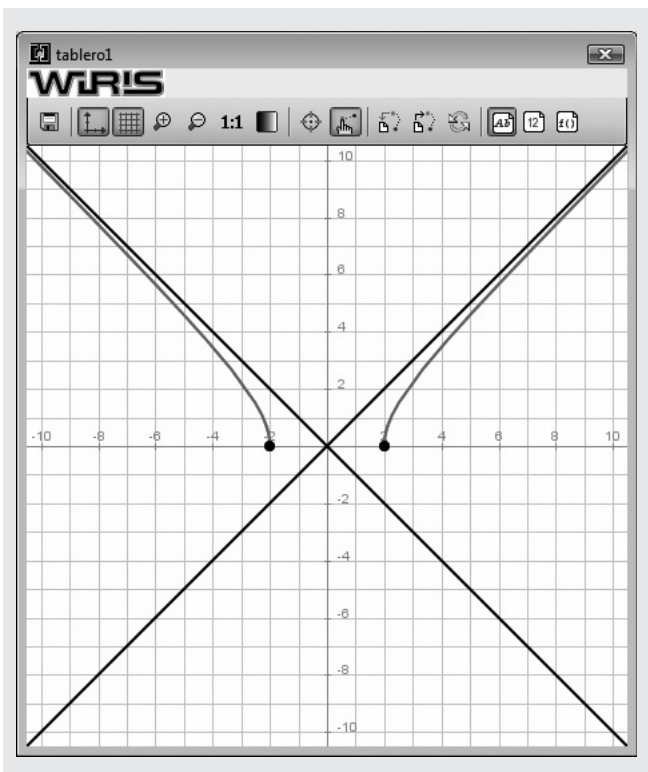
Puntos de inflexión : no tiene.

Curvatura :

- Convexa (U) : Nunca.
- Cóncava (∩) :  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10. Recorrido o imagen :

$$\text{Im}g(f) = [0, +\infty)$$



**122** Representa y analiza la función:

$$y = (2 - x)e^x$$

### Solución:

Ejercicio 122

$$f(x) = (2 - x) \cdot e^x;$$

dibujar( $f(x)$ , {color=rojo, anchura\_linea=2})

1. Tipo de función : producto de polinómica por exponencial.
2. Dominio : por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial es toda la recta real.  
Dom( $f$ ) =  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad : por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad : por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial no es periódica.
5. Simetrías :  
 $f(-x) \Rightarrow (x+2) \cdot e^{-x}$   
 $f(x)$  no es par, ni impar, no es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$  ni respecto del eje Y.

6. Asintotas :

- Verticales : no tiene.
- Horizontales :  $y = 0$
- Oblicuas : no tiene.

dibujar( $y = 0$ , {color=negro, anchura\_linea=2})

7. Corte con los ejes :

$$\text{resolver}(f(x) = 0) \Rightarrow \{x=2\}$$

$$A = \text{punto}(2, 0) \Rightarrow (2, 0)$$

- Eje X : A(2, 0)

dibujar(A, {color=rojo, tamaño\_punto=8})

$$f(0) \Rightarrow 2$$

$$B = \text{punto}(0, 2) \Rightarrow (0, 2)$$

- Eje Y : B(0, 2)

dibujar(B, {color=rojo, tamaño\_punto=8})

Signo :

- Positiva (+) :  $(-\infty, 2)$
- Negativa (-) :  $(2, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \Rightarrow (-x+1) \cdot e^x$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \Rightarrow \{x=1\}$$

$$f(1) \Rightarrow e$$

$$C = \text{punto}(1, e) \Rightarrow (1, e)$$

$$f''(1) \Rightarrow -e$$

- Máximo relativo : C(1, e)

dibujar(C, {color=azul, tamaño\_punto=8})

Monotonía :

- Creciente :  $(-\infty, 1)$
- Decreciente :  $(1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión :

$$f''(x) \Rightarrow -x \cdot e^x$$

$$\text{resolver}(f''(x) = 0) \Rightarrow \{x=0\}$$

$$f(0) \Rightarrow 2$$

$$f'''(0) \Rightarrow -1$$

Puntos de inflexión : A(2, 0)

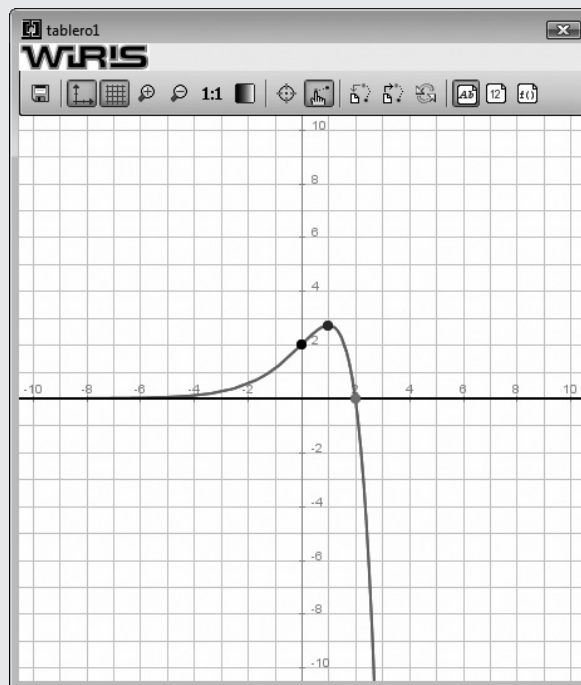
dibujar(A, {color=magenta, tamaño\_punto=8})

Curvatura :

- Convexa (U) :  $(-\infty, 0)$
- Cóncava (∩) :  $(0, +\infty)$

10. Recorrido o imagen :

$$\text{Img}(f) = (-\infty, e]$$



**123** Representa y analiza la función:

$$y = \ln(x^2 - 1)$$

### Solución:

Ejercicio 123

$$f(x) = \ln(x^2 - 1);$$

dibujar( $f(x)$ , {color=rojo, anchura\_linea=2})

1. Tipo de función : función logarítmica.
2. Dominio : por ser una función logarítmica  $x^2 - 1 > 0$   
Dom( $f$ ) =  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad : por ser una función logarítmica es continua en todo su dominio.
4. Periodicidad : por ser una función logarítmica no es periódica.

5. Simetrías :

$f(-x) \Rightarrow \ln(x^2-1)$

$f(x)$  es par, simétrica respecto del eje Y

4. Asintotas :

- Verticales :  $x = -1, x = 1$

dibujar( $x = -1, \{color = verde, anchura\_línea = 2\}$ )

dibujar( $x = 1, \{color = verde, anchura\_línea = 2\}$ )

- Horizontales : no tiene.
- Oblicuas : no tiene.

7. Corte con los ejes :

resolver( $f(x) = 0$ )  $\Rightarrow \{x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}\}$

A = punto( $-\sqrt{2}, 0$ )  $\Rightarrow (-\sqrt{2}, 0)$

B = punto( $\sqrt{2}, 0$ )  $\Rightarrow (\sqrt{2}, 0)$

- Eje X : A( $-\sqrt{2}, 0$ ); B( $\sqrt{2}, 0$ )

dibujar(A, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

- Eje Y : no lo corta.

Signo :

- Positiva (+) :  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- Negativa (-) :  $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{x^2-1}$

resolver( $f'(x) = 0$ )  $\Rightarrow \{x=0\}$

$x = 0 \notin \text{Dom}(f)$ , no tiene máximos, ni mínimos relativos.

Monotonía :

- Creciente :  $(1, +\infty)$
- Decreciente :  $(-\infty, -1)$

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \Rightarrow \frac{-2 \cdot x^2 - 2}{x^4 - 2 \cdot x^2 + 1}$

resolver( $f''(x) = 0$ )  $\Rightarrow \{\}$

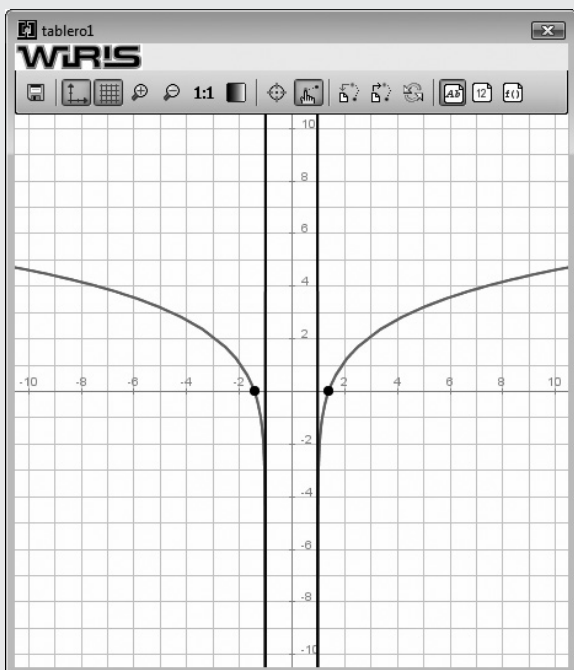
Puntos de inflexión : no tiene.

Curvatura :

- Convexa (U) : nunca.
- Cóncava (∩) :  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

10. Recorrido o imagen :

Img( $f$ ) =  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



124 Representa y analiza la función:

$y = 3 \text{ sen } 2x$

Solución:

Ejercicio 124

$f(x) = 3 \text{ sen } (2x)$ ;

dibujar( $f(x)$ )

1. Tipo de función : función trigonométrica.

2. Dominio : por ser una función trigonométrica seno :

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Continuidad : por ser una función trigonométrica seno es continua es continua en toda la recta real  $\mathbb{R}$

4. Periodicidad : por ser una función trigonométrica es periódica.

Periodo =  $2\pi/2 = \pi$ . La estudiaremos solo en el primer periodo positivo.

dibujar( $f(x), 0.. \pi, \{color = rojo, anchura\_línea = 2\}$ )

5. Simetrías :

$f(-x) \Rightarrow 3 \cdot \text{sen}(-2 \cdot x)$

$f(x)$  es impar, simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$

4. Asintotas : no tiene por ser una función trigonométrica del seno.

7. Corte con los ejes :

resolver( $f(x) = 0$ )  $\Rightarrow \{x=0, x = \frac{\pi}{2}\}$

O = punto(0, 0)  $\Rightarrow (0, 0)$

A = punto( $\frac{\pi}{2}, 0$ )  $\Rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)$

- Eje X : O(0, 0); A( $\frac{\pi}{2}, 0$ )

dibujar(O, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

dibujar(A, {color = negro, tamaño\_punto = 8})

- Eje Y : o(0, 0)

Signo :

- Positiva (+) :  $(0, \pi/2)$
- Negativa (-) :  $(\pi/2, \pi)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \Rightarrow 6 \cdot \cos(2 \cdot x)$

resolver( $f'(x) = 0$ )  $\Rightarrow \{x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}\}$

$f(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 3$

C = punto( $\frac{\pi}{4}, 3$ )  $\Rightarrow (\frac{\pi}{4}, 3)$

$f'(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow -12$

- Máximo relativo : C( $\frac{\pi}{4}, 3$ )

dibujar(C, {color = azul, tamaño\_punto = 8})

$f(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow -3$

D = punto( $\frac{3\pi}{4}, -3$ )  $\Rightarrow (\frac{3\pi}{4}, -3)$

$f'(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow 12$

- Máximo relativo : C( $\frac{3\pi}{4}, -3$ )

dibujar(D, {color = cian, tamaño\_punto = 8})

Monotonía :

- Creciente :  $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
- Decreciente :  $(\pi/4, 3\pi/4)$

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \Rightarrow -12 \cdot \text{sen}(2 \cdot x)$

resolver( $f''(x) = 0$ )  $\Rightarrow \{x=0, x = \frac{\pi}{2}\}$

dibujar(O, {color = magenta, tamaño\_punto = 8})

dibujar(A, {color = magenta, tamaño\_punto = 8})

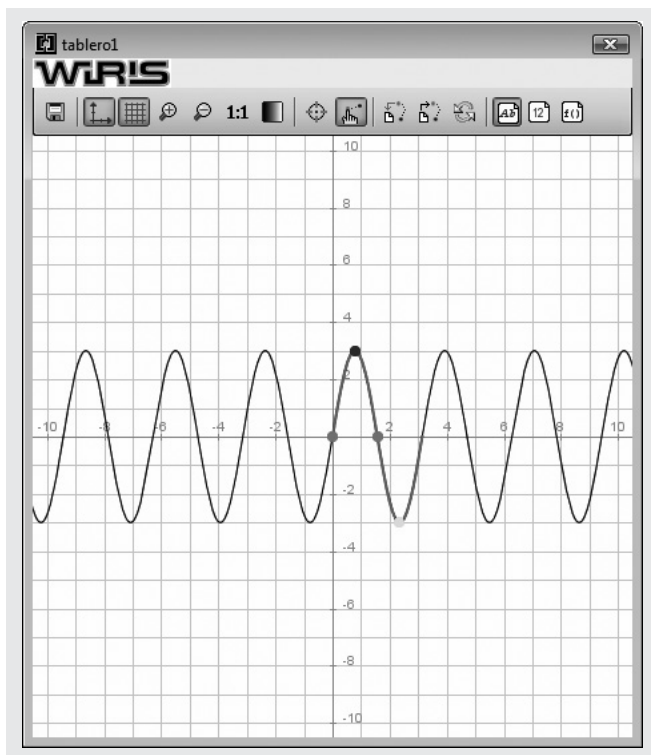
Puntos de inflexión : O(0,0), A( $\pi/2, 0$ )

Curvatura :

- Convexa (U) :  $(\pi/2, \pi)$
- Cóncava (∩) :  $(0, \pi/2)$

10. Recorrido o imagen :

Img( $f$ ) =  $[-3, 3]$



**125** Dada la función:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

se pide:

- Asíntotas.
- Máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Dibujar su gráfica.

### Solución:

Ejercicio 125

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4};$$

dibujar (f(x), {color = rojo, anchura\_linea = 2})

6. Asíntotas :

- Verticales : no tiene, porque nunca se anula el denominador.
- Horizontales :

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 0$$

dibujar (y = 0, {color=verde, anchura\_linea=2})

- Oblicuas : no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \rightarrow \frac{-8 \cdot x^2 + 32}{x^4 + 8 \cdot x^2 + 16}$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x = -2\}, \{x = 2\}$$

$$f(-2) \rightarrow -2$$

$$A = \text{punto}(-2, -2) \rightarrow (-2, -2)$$

$$f''(x) \rightarrow \frac{16 \cdot x^3 - 192 \cdot x}{x^6 + 12 \cdot x^4 + 48 \cdot x^2 + 64}$$

$$f''(-2) \rightarrow \frac{1}{2}$$

- Mínimo relativo : A(-2, -2)

dibujar(A, {color = cian, tamaño\_punto = 8})

$$f(2) \rightarrow 2$$

$$B = \text{punto}(2, 2) \rightarrow (2, 2)$$

$$f''(2) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

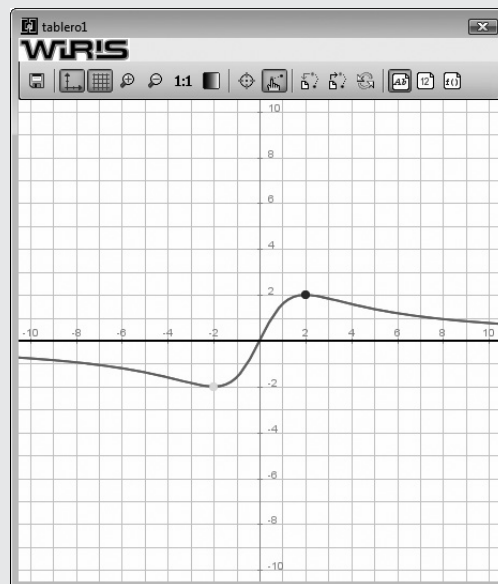
- Máximo relativo : B(2, 2)

dibujar(B, {color = azul, tamaño\_punto = 8})

Monotonía :

$$f'(0) \rightarrow 2$$

- Creciente : (-2, 2)
- Decreciente :  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



**126** Dada la función:

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$$

dibujar la gráfica estudiando:

- Asíntotas
- Crecimiento y decrecimiento.
- Puntos de inflexión.

### Solución:

Ejercicio 126

$$f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 1);$$

dibujar (f(x), {color = rojo, anchura\_linea = 2})

6. Asíntotas :

- Verticales : no tiene, porque en el denominador estaría  $e^x$  que nunca se anula.
- Horizontales :

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 0$$

dibujar (y = 0, {color=verde, anchura\_linea=2})

- Oblicuas :

$$m1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow -\infty$$

$$m2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$$

no tiene asíntotas oblicuas.



**8. Máximos y mínimos relativos :**

$$f(x) \rightarrow (-x^2 + 2 \cdot x - 1) \cdot e^{-x}$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x=1\}$$

$$f(1) \rightarrow \frac{2}{e}$$

$$A = \text{punto}\left(1, \frac{2}{e}\right) \rightarrow \left(1, \frac{2}{e}\right)$$

$$f'(x) \rightarrow (x^2 - 4 \cdot x + 3) \cdot e^{-x}$$

$$f'(1) \rightarrow 0$$

$$f''(x) \rightarrow (-x^2 + 6 \cdot x - 7) \cdot e^{-x}$$

$$f''(1) \rightarrow \frac{-2}{e}$$

·  $A\left(1, \frac{2}{e}\right)$  es un punto de inflexión.

$$\text{dibujar}(A, \{\text{color} = \text{magenta}, \text{tamaño\_punto} = 8\})$$

Monotonía :

$$f(0) \rightarrow -1$$

· Creciente :  $(-2, 2)$

· Decreciente :  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

**9. Puntos de inflexión :**

$$f'(x) \rightarrow (x^2 - 4 \cdot x + 3) \cdot e^{-x}$$

$$\text{resolver}(f''(x) = 0) \rightarrow \{x=1\}, \{x=3\}$$

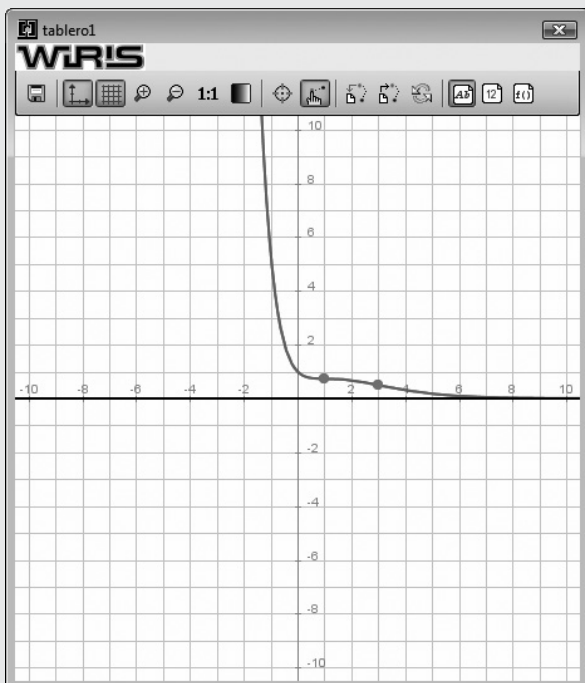
$$f(3) \rightarrow \frac{10}{e^3}$$

$$B = \text{punto}\left(3, \frac{10}{e^3}\right) \rightarrow \left(3, \frac{10}{e^3}\right)$$

$$f''(2) \rightarrow \frac{1}{e^2}$$

$$\text{Puntos de inflexión : } B\left(3, \frac{10}{e^3}\right)$$

$$\text{dibujar}(B, \{\text{color} = \text{magenta}, \text{tamaño\_punto} = 8\})$$



**127** Dada la función

$$y = x^4 e^{-x}$$

a) Halla, si existen, los máximos y mínimos relativos. Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

b) Halla los puntos de inflexión.

**Solución:**

Ejercicio 127

$$f(x) = x^4 \cdot e^{-x};$$

$$\text{dibujar}(f(x), \{\text{color} = \text{rojo}, \text{anchura\_línea} = 2\})$$

**8. Máximos y mínimos relativos :**

$$f'(x) \rightarrow (-x^4 + 4 \cdot x^3) \cdot e^{-x}$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x=0\}, \{x=4\}$$

$$f(0) \rightarrow 0$$

$$O = \text{punto}(0, 0) \rightarrow (0, 0)$$

$$f'(x) \rightarrow (x^4 - 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2) \cdot e^{-x}$$

$$f'(0) \rightarrow 0$$

$$f''(0) \rightarrow 0$$

$$f'''(0) \rightarrow 24$$

· Mínimo relativo :  $O(0, 0)$

$$\text{dibujar}(O, \{\text{color} = \text{cian}, \text{tamaño\_punto} = 8\})$$

$$f(4) \rightarrow \frac{256}{e^4}$$

$$A = \text{punto}\left(4, \frac{256}{e^4}\right) \rightarrow \left(4, \frac{256}{e^4}\right)$$

$$f'(x) \rightarrow (x^4 - 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2) \cdot e^{-x}$$

$$f'(4) \rightarrow \frac{-64}{e^4}$$

· Máximo relativo :  $O(0, 0)$

$$\text{dibujar}(A, \{\text{color} = \text{azul}, \text{tamaño\_punto} = 8\})$$

Monotonía :

$$f(0) \rightarrow 0$$

· Creciente :  $(0, 4)$

· Decreciente :  $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

**9. Puntos de inflexión :**

$$f'(x) \rightarrow (x^4 - 8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2) \cdot e^{-x}$$

$$\text{resolver}(f''(x) = 0) \rightarrow \{x=0\}, \{x=2\}, \{x=6\}$$

$$f(2) \rightarrow \frac{16}{e^2}$$

$$B = \text{punto}\left(2, \frac{16}{e^2}\right) \rightarrow \left(2, \frac{16}{e^2}\right)$$

$$f''(2) \rightarrow \frac{-16}{e^2}$$

$$f(6) \rightarrow \frac{1296}{e^6}$$

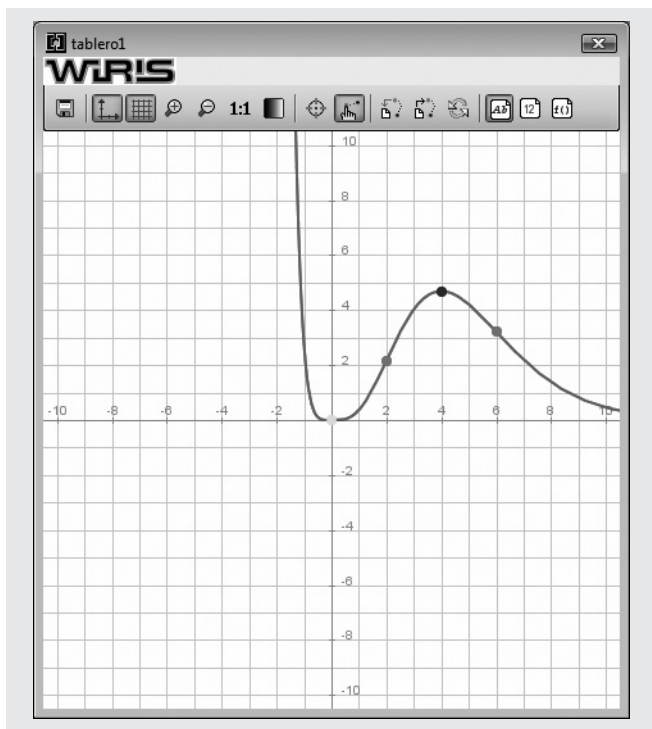
$$C = \text{punto}\left(6, \frac{1296}{e^6}\right) \rightarrow \left(6, \frac{1296}{e^6}\right)$$

$$f''(2) \rightarrow \frac{-16}{e^2}$$

$$\text{Puntos de inflexión : } B\left(2, \frac{16}{e^2}\right), C\left(6, \frac{1296}{e^6}\right)$$

$$\text{dibujar}(B, \{\text{color} = \text{magenta}, \text{tamaño\_punto} = 8\})$$

$$\text{dibujar}(C, \{\text{color} = \text{magenta}, \text{tamaño\_punto} = 8\})$$



**128** Dada la función:

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

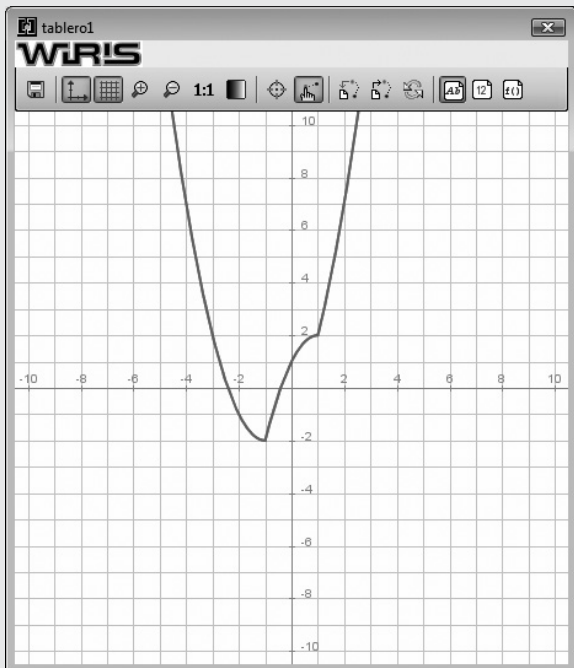
dibuja la gráfica de  $f(x)$

**Solución:**

Ejercicio 128

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|;$$

dibujar  $(f(x), \{\text{color} = \text{rojo}, \text{anchura\_línea} = 2\})$



**129** Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

Halla:

- Dominio.
- Asíntotas.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**Solución:**

Ejercicio 129

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x};$$

dibujar  $(f(x), \{\text{color} = \text{rojo}, \text{anchura\_línea} = 2\})$

2. Dominio :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

6. Asíntotas :

· Verticales :  $x = 2$

dibujar  $(x = 2, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura\_línea} = 2\})$

· Horizontales :

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 1$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -1$$

dibujar  $(y = -1, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura\_línea} = 2\})$

dibujar  $(y = 1, \{\text{color} = \text{verde}, \text{anchura\_línea} = 2\})$

· Oblicuas : no tiene, porque el grado del numerador no es uno mayor que el del denominador.

8. Monotonía :

$$f'(1) \rightarrow 2$$

· Creciente :  $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

· Decreciente :  $(-\infty, 0)$

