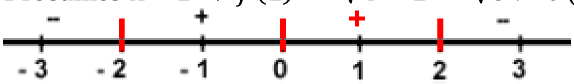
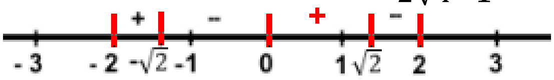
1. Calcula el siguiente límite $\lim_{x\to1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$	$\lim_{x\to1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^{\pm\infty}] = e^{\lim_{x\to1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\cdot\frac{x}{x-1}}$ $= e^{\lim_{x\to1}\frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to1}\frac{2xe^{x-1}-x^2-x}{x^2-1}} = e^{\left[\frac{0}{0}\right]} =$ $= e^{\lim_{x\to1}\frac{2e^{x-1}+2xe^{x-1}-2x-1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}}$ Aplicamos L'Hôpital
2. Calcula el siguiente límite $\lim_{x\to0}\frac{x\,sen\,x}{3\cos x-3}$	$\lim_{x\to0}\frac{x\,sen\,x}{3\cos x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{sen\,x+x\cos x}{-3\,sen\,x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$ Aplicamos L'Hôpital Aplicamos L'Hôpital $= \lim_{x\to0}\frac{\cos x+\cos x-x\,sen\,x}{-3\cos x} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$
3. Dada la función: $f(x) = \sqrt{4x^2-x^4}$ a) Determina su dominio. b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento	a) Como es una función irracional existe cuando el radicando es mayor o igual que cero: $4x^2-x^4 \geq 0$ Las raíces son $x_1 = x_2 = 0$, doble, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, simples Probamos x = 1 $\Rightarrow f(1) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} > 0$ (+)  Dom(f) = [– 2, 2] b) Calculamos la 1ª derivada, cuando sea positiva es creciente y donde sea negativa decreciente. $f'(x) = \frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}$ Las raíces del numerador son $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, simples y del denominador $x_1 = x_2 = 0$, doble, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$ simples. Probamos x = 1 $\Rightarrow f'(1) = \frac{8-4}{2\sqrt{4-1}} > 0$ (+)  $(\nearrow) = (-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ $(\searrow) = (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 0)$
4. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \ln x & si\ x \in (0, e] \\ ax+b & si\ x\ (e, +\infty) \end{cases}$ Halla los valores *a* y *b* para que la función sea derivable.	Las funciones y = ln (x), y = ax + b son continuas y derivables en todo su dominio de definición, así que el único problema lo tendremos en x = e a) Para que sea derivable tiene que ser continua por tanto el valor de la función para x = e y los límites laterales en x = e tienen que ser iguales f(e) = ln e = 1 $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \ln x = \ln e = 1 \\ \lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} (ax+b) = ae+b \end{array}\right\} \Rightarrow$ ae + b = 1 (I) b) Las derivadas laterales también tienen que ser iguales. $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to e^-} f'(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x\to e^+} f'(x) = \lim_{x\to e^+} a = a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{e} = a \Rightarrow a = \frac{1}{e}$ Sustituyendo el valor de a = 1/e en la ecuación (I) Obtenemos b = 0 Solución, a = 1/e, b = 0

5. Sean las funciones:

f(x) = ln (x + 2)

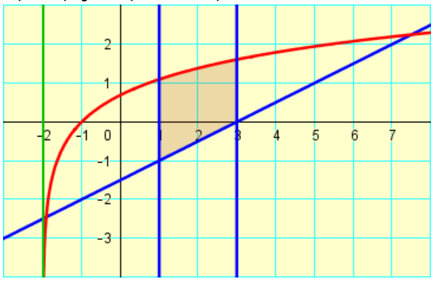
g(x) = $\frac{1}{2}(x-3)$

a) Esboza el recinto que determinan las gráficas f , g, y las rectas x = 1, x = 3.

b) Determina el área del recinto anterior.

a) La función f(x) = ln (x + 2) es una función logarítmica cuyo dominio es (– 2, + ∞), para x = 2 tiene una asíntota vertical y corta el eje X en el punto A(– 1, 0)

La función g(x) = $\frac{1}{2}(x-3)$ es una recta de pendiente m = 1/2, la ordenada en el origen es – 3/2, corta a los ejes en los puntos B(3, 0) y C(0, - 3/2)



b) Área = $\int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right) dx$

Calculamos la 1ª integral por partes

$$\begin{cases} u = \ln(x+2) & du = \frac{dx}{x+2} \\ dv = dx & v = x \end{cases}$$

$\int \ln(x+2)\,dx$ = x ln(x + 2) – $\int \frac{x}{x+2} dx$

Tenemos que dividir x entre x + 2

$$\begin{array}{r|l} x & x+2 \\ \hline -x-1 & 1 \\ -2 & \end{array} \Rightarrow \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$$

$$\int \frac{x}{x+2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) dx = x - 2\ln(x+2)$$

$\int \ln(x+2)\,dx$ = x ln(x + 2) $- x + 2\ln(x+2) =$

$-\frac{1}{2}\int (x-3)\,dx = -\frac{1}{2}\frac{(x-3)^2}{2} = -\frac{(x-3)^2}{4}$

La función integral sin constante es :

F(x) = (x + 2) ln(x + 2) $- x - \frac{(x-3)^2}{4}$

F(3) = 5 ln 5 – 3, F(1) = 3 ln 3 – 2

Área = F(3) – F(1) = 5 ln 5 – 3 ln 3 – 1 u^2

6. Dada la función:

f(x) = $\frac{\ln x}{x}$

Halla un punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal y analiza si dicho punto es un extremo relativo

Si la recta tangente es horizontal tiene de pendiente cero y por tanto la 1ª derivada tiene que valer cero.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ ⇒ 1 – ln x = 0 ⇒ ln x = 1 ⇒ x = e ⇒ y = 1/e

El punto de tangente horizontal es P(e, 1/e)

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(e) = \frac{-3 + 2\ln e}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

Como la 2ª derivada en x = e es distinta de cero es un extremo relativo y es un máximo relativo porque la 2ª derivada en x = e es negativa.

Ponte a prueba

Problemas resueltos

1 Sea f la función definida, para $x \neq 0$, por:

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Determina las asíntotas de la gráfica de f

Asíntotas verticales: **$x = 0$**

Asíntotas horizontales: **no tiene.**

Asíntotas oblicuas:

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot e^{1/x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot e^{1/x} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} x \cdot (e^{1/x} - 1) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

De igual forma, cuando $x \to -\infty$, se obtiene $m_2 = 1$, $b_2 = 1$

Asíntota oblicua: **$y = x + 1$**

2 Sea:

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) Calcula los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$

b) Estudia si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje Y

c) Calcula:

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

a) Hallamos los máximos y mínimos relativos:

$$f'(x) = \frac{16x^2 - 4}{(4x^2+1)^2} \Rightarrow 16x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -1/2,\ x = 1/2$$

$x = -1/2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1/2, 2)$

$x = 1/2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(1/2, 0)$

$$f''(x) = \frac{-128x^3 + 96x}{(4x^2+1)^3}$$

$f''(-1/2) = -4$

$f''(1/2) = 4$

$A(-1/2, 2)$, máximo relativo; $B(1/2, 0)$, mínimo relativo.

La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal $y = 1$

Por tanto, los máximos y mínimos relativos son también absolutos.

b) $$f(-x) = \frac{(2(-x)-1)^2}{4(-x)^2+1} = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} \neq f(x)$$

$f(x)$ no es par; por tanto, **no es simétrica respecto del eje Y**

c) La integral definida:

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 - \frac{4x}{4x^2+1}$$

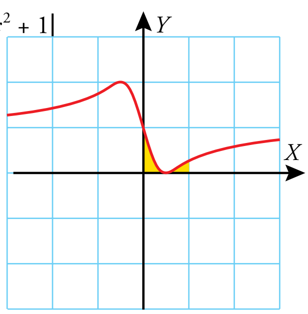
$$F(x) = \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right) dx = x - \frac{1}{2} \ln |4x^2+1|$$

$F(0) = 0$

$F(1) = 1 - \frac{1}{2} \ln 5$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) =$$

$= $ **$1 - \frac{1}{2} \ln 5$ unidades cuadradas**



3 Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola

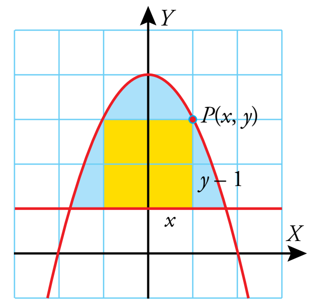
$$y = -x^2 + 4$$

y la recta $y = 1$

a) Representa gráficamente la chapa y calcula su área.

b) Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$

a) Dibujo y cálculo del área: se trata de una parábola y una recta.



Se calculan las abscisas de los puntos de corte resolviendo la ecuación:

$-x^2 + 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$

Función diferencia:

$f(x) - g(x) = -x^2 + 4 - 1 = -x^2 + 3$

$F(x) = \int (-x^2 + 3)\, dx = -\dfrac{1}{3}x^3 + 3x$

$F(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3},\ F(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

Área $= |F(\sqrt{3}) - F(-\sqrt{3})| = |2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3})| =$ **$4\sqrt{3}$ u²**

b) Dimensiones del rectángulo:

Planteamiento: Área$(x, y) = 2x(y - 1)$

Condiciones: $y = -x^2 + 4$

$A(x) = -2x^3 + 6x$

$A'(x) = -6x^2 + 6 \Rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

La solución negativa no tiene sentido.

$A''(x) = -12x \Rightarrow A''(1) = -12$, el área es máxima.

Altura del rectángulo $-1 + 4 - 1 = 2$

El rectángulo mide de base 2 y de altura 2 unidades.

4 Dada la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

determina los valores a, b, c y d para que se cumplan las siguientes condiciones:

1.º Que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 2)$ sea paralela a la recta $y + 1 = 0$

2.º Que la recta $x - y - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Si pasa por $(0, 2) \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$

Pendiente de la recta $y + 1 = 0$, $m_1 = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Para $x = 1$ en $x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c + d = -1$

Pendiente de la recta $x - y - 2 = 0$, $m_2 = 1 \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow 3a + 2b + c = 1$

Como $d = 2$ y $c = 0$, resolviendo el sistema:

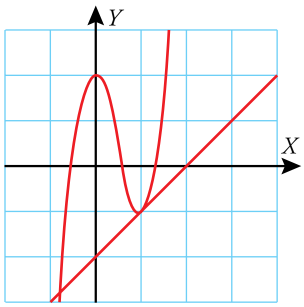
$$\begin{cases} a + b + 2 = -1 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$$

se obtiene:

$a = 7,\ b = -10$

Los valores pedidos son:

$a = 7,\ b = -10,\ c = 0,\ d = 2$



Ponte a prueba

Problemas resueltos

5 Define la primitiva de una función.

Sabiendo que:

$$F(x) = e^{x^2}$$

es una primitiva de la función $f(x)$:

a) Comprueba que $f(x)$ es una función creciente en $\mathbb{R}$.

b) Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 1$

Una primitiva de la función $f(x)$ es una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

a) Para probar que $f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$ vamos a estudiar su derivada:

Si $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $f(x) = F'(x) = 2xe^{x^2}$

$f'(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (4x^2 + 2)e^{x^2}$

$f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pues $(4x^2 + 2) > 0$ y $e^{x^2} > 0$; por tanto, $f(x)$ es creciente.

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje X

$2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

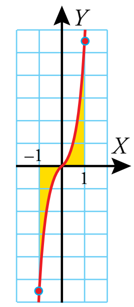
Hay que integrar en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$

Como la función es impar, es simétrica respecto del eje Y, solo hallaremos el área en el intervalo $[0, 1]$

$F(x) = e^{x^2}$; $F(0) = e^0 = 1$; $F(1) = e^1 = e$

Área parcial $= |e - 1| = e - 1$

Área total: $2(e - 1)$ unidades cuadradas



6 Sea:

$$f(x) = 2 - x + \ln(x), \text{ con } x \in (0, +\infty)$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de f. Esboza la gráfica de f

b) Prueba que existe un punto $c \in [1/e^2, 1]$ tal que $f(c) = 0$

a) Características de la curva:

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

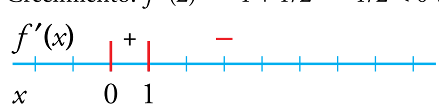
Máximos y mínimos relativos:

$f'(x) = -1 + \dfrac{1}{x}, -1 + \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{-x+1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$, punto $A(1, 1)$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f''(1) = -1$, $A(1, 1)$, máximo relativo.

Crecimiento: $f'(2) = -1 + 1/2 = -1/2 < 0$ (–), decreciente.



Creciente (↗): (0, 1)

Decreciente (↘): (1, +∞)

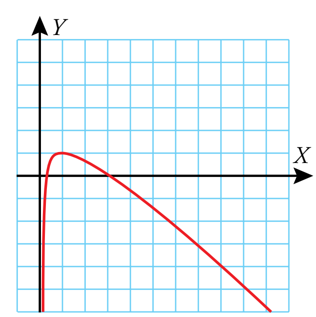
Puntos de inflexión y curvatura:

$f''(x) \neq 0$ siempre, no tiene puntos de inflexión, $f''(1) = -1 < 0$ (–)

Convexa (∪): ∅

Cóncava (∩): (0, +∞)

Asíntotas: solo tiene una vertical, $x = 0$



b) Veamos si verifica las hipótesis del teorema de Bolzano: continua en el intervalo cerrado $[1/e^2, 1]$ y que tome valores de signo opuesto en los extremos.

$f(x)$ es continua en $[1/e^2, 1]$ por ser suma y resta de funciones continuas.

$f(1/e^2) = -1/e^2$

$f(1) = 1$

Como verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, existe un punto $c \in [1/e^2, 1]$ tal que $f(c) = 0$

7 Resuelve las cuestiones:

a) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (x^2 + 1)}{x}$$

b) Indica, razonadamente, el valor que debe tomar a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln (x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

a) Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (x^2 + 1)}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

b) Si $x \neq 0$, $f(x)$ es continua por ser cociente de funciones continuas; en el numerador hay una función logarítmica en la que $x^2 + 1 > 0$ siempre, lo que garantiza que es continua.

Si $x = 0$, para que sea continua se tiene que verificar:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

Por la definición de la función f, $f(0) = a$

En el apartado a) hemos hallado que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Por tanto, se tiene que verificar que $a = 0$

8 Resuelve las cuestiones:

a) Para cada valor de $c > 0$, calcula el área de la región comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 1$

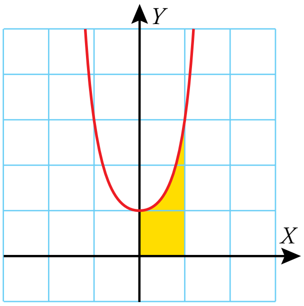
b) Halla el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

a) Área: si $c > 0$, $f(x)$ no tiene raíces en el intervalo $[0, 1]$, por ser las potencias pares y los signos positivos.

$$F(x) = \int \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx = \frac{c}{5}x^5 + \frac{1}{3c}x^3 + x$$

$$F(0) = 0;\ F(1) = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

$$\text{Área} = \left| \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1 - 0 \right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$



b) Calculamos el mínimo derivando:

$$A(c) = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

$$A'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2}$$

$$A'(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0$$

$$\frac{3c^2 - 5}{3c^2} = 0 \Rightarrow 3c^2 - 5 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 5 \Rightarrow$$

$$c^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}$$

Como $c > 0$, solo sirve la solución positiva $c = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

$$A''(c) = \frac{2}{3c^3} \Rightarrow A''\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{15}}{25} > 0,\ (+) \Rightarrow \text{mínimo.}$$

Para que el área sea mínima:

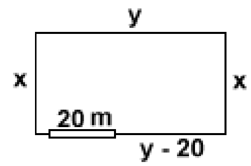
$$c = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Ponte a prueba

Problemas resueltos

Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 m sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocarlo una puerta. Calcula las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puedan vallarse de esa manera. Calcula el valor de dicha área máxima

a) Dibujo, datos e incógnita.



Perímetro = 100 m

b) Función que hay que maximizar.

A(x, y) = xy

2x + 2y – 20 = 100 y = 60 – x

c) Se escribe la función con una sola variable.

A(x) = x(60 – x) = 60x – x2

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

A'(x) = 60 – 2x 60 – 2x = 0 x = 30 y = 30

e) Se comprueba en la segunda derivada.

A''(x) = – 2 < 0 máximo relativo

e) La parcela medirá 30 m de largo y 30 m de ancho, será cuadrangular. Es un rectángulo porque todo cuadrado es un rectángulo.

f) Área máxima = 30 · 30 = 900 m2

10 Para cada número real positivo a, se considera la función:

$$f(x) = x^2 + a$$

Se pide calcular razonadamente:

a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = f(x)$

b) El valor a para el que la curva:

$$f(x) = x^2 + a$$

divide el rectángulo de vértices (0, 0), $(\sqrt{6}, 0)$; $(\sqrt{6}, 6 + a)$; $(0, 6 + a)$ en dos regiones de igual área.

a) Área: si $a > 0$, $f(x)$ no tiene raíces en el intervalo $[0, \sqrt{6}]$, por ser par la potencia de x

$$F(x) = \int (x^2 + a)\, dx = \frac{x^3}{3} + ax$$

$$F(0) = 0$$

$$F(\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} + a\sqrt{6}$$

$$\text{Área} = |2\sqrt{6} + a\sqrt{6} - 0| = 2\sqrt{6} + a\sqrt{6} = (2 + a)\sqrt{6}$$

b) El rectángulo de vértices (0, 0), $(\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 6 + a)$, $(0, 6 + a)$ tiene de base $\sqrt{6}$ y de altura $6 + a$

Su área es:

$$\text{Área} = \sqrt{6}(6 + a)$$

Se tiene que verificar que el área hallada en el apartado a) sea la mitad del rectángulo.

Tenemos que resolver la ecuación:

$$\cancel{\sqrt{6}}(6 + a) = 2(2 + a)\cancel{\sqrt{6}}$$

$$6 + a = 4 + 2a$$

$$a = 2$$