1. Un dron se encuentra en el punto $P(2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más cercano del plano de ecuación

$\pi \equiv 3x + 4z + 15 = 0$

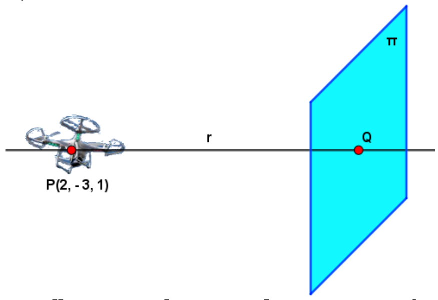
a) Calcula la ecuación paramétrica de la recta que debe seguir el dron. ¿Qué distancia debe recorrer hasta llegar al plano?

b) Halla las coordenadas del punto del plano al que llegará el dron.

a) El vector director de la recta es el normal al plano:

$$\vec{v} = \vec{n} = (3, 0, 4) \Rightarrow r \equiv \left.\begin{array}{l} x = \;\; 2 + 3t \\ y = -3 \\ z = \;\; 1 + 4t \end{array}\right\} t \in \mathrm{R}$$

$$D(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ unidades}$$



b) El punto al que llega es el punto de intersección de la recta con el plano.

La forma más sencilla de hallarlo es sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

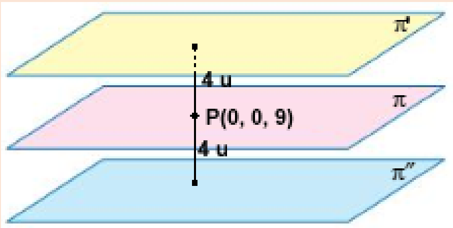
$3(2 + 3t) + 4(1 + 4t) + 15 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow Q(-1, -3, -3)$

2. Sea π el plano de ecuación:

$9x + 12y + 20z = 180$

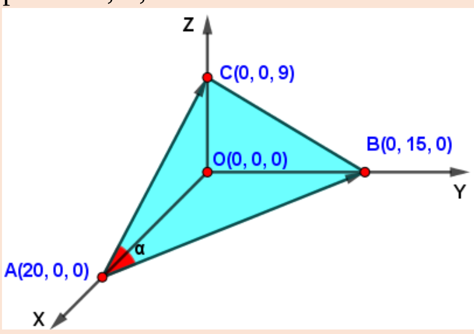
Resuelve los apartados siguientes:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π



b) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes X, Y y Z y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices con el origen O de coordenadas y los puntos A, B, C



a) Si son paralelos el plano π' tendrán de ecuación:

$9x + 12y + 20z + D = 0$

Hallamos un punto del plano π, le damos los valores:

$x = 0, y = 0 \Rightarrow 20z = 180 \Rightarrow z = 9$, el punto es $P(0, 0, 9)$

$$\text{Como } d(P, \pi') = 4 \Rightarrow \frac{|9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 20 \cdot 9 + k|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = 4$$

$$\frac{|180 + D|}{25} = 4 \Rightarrow |180 + D| = 100$$

De la ecuación de valor absoluto se obtienen dos ecuaciones:

$180 + D = 100 \Rightarrow D = -80 \Rightarrow \pi' \equiv 9x + 12y + 20z - 80 = 0$

$180 + D = -100 \Rightarrow D = -280 \Rightarrow \pi'' \equiv 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b) En el punto de corte con el eje X, $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow x = 20$,

por tanto, el punto de corte con el eje X es $(20, 0, 0)$

En el punto de corte con el eje Y, $x = 0$, $z = 0 \Rightarrow y = 15$,

por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0, 15, 0)$

En el punto de corte con el eje Z, $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow z = 9$,

por tanto, el punto de corte con el eje Z es $(0, 0, 9)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-20, 15, 0)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-20, 0, 9)$

$$\cos \alpha = \frac{|-20 \cdot (-20) + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 9|}{\sqrt{(-20)^2 + 15^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-20)^2 + 0^2 + 9^2}} =$$

$$= \frac{400}{25 \cdot \sqrt{481}} = \frac{16\sqrt{481}}{481} = 16\sqrt{481} = 0{,}7295$$

$\alpha = 43° \; 9' \; 9''$

c) Los vectores que forman el tetraedro son:

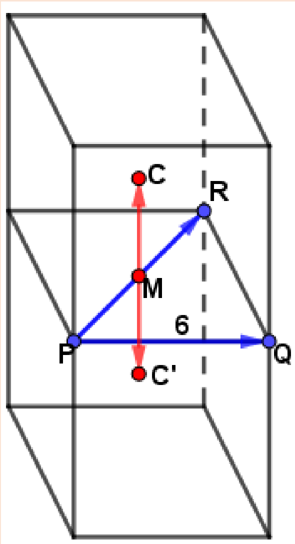
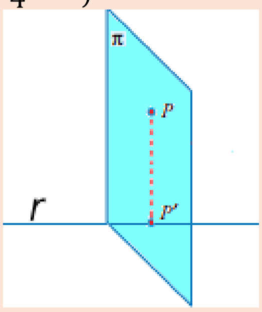
$\overrightarrow{OA}(20, 0, 0)$; $\overrightarrow{OB}(0, 15, 0)$; $\overrightarrow{OA}(0, 0, 9)$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 15 \cdot 9 = 450 \text{ u}^3$$

3. $P(1, -1, 1)$, $Q(5, -3, 5)$, $R(7, -7, 1)$

M es el punto medio de P y $R \Rightarrow M(4, -4, 1) \Rightarrow \overrightarrow{OM}(4, -4, 1)$

La arista del cubo mide:

Son 3 vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.  	$d(P, Q) = \sqrt{(5-1)^2 + (-3+1)^2 + (5-1)^2}$ = 6 unidades Tenemos que hallar el vector $\overrightarrow{MC}$ Sabemos que tiene de módulo la mitad de la arista del cubo, 3 y que es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (4, -2, 4) \parallel (2, -1, 2)$ $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (6, -6, 0) \parallel (1, -1, 0)$ Podemos elegir los paralelos, porque solo nos interesa la dirección: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2i + 2j - k \Rightarrow \lvert\vec{v}\rvert = 3$ Para hallar el vector $\overrightarrow{MC}$ dividimos el vector $\vec{v}$ entre su módulo 3 y lo multiplicamos por 3, que es el mismo vector $\vec{v}$ $\overrightarrow{MC} = \vec{v} = (2, 2, -1)$ Vemos que puede haber dos cubos $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}$ $\overrightarrow{OC} = (4, -4, 1) + (2, 2, -1) = (6, -2, 0)$ $\overrightarrow{OC'} = (4, -4, 1) - (2, 2, -1) = (2, -6, 2)$
4. Halla la proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano π siendo $r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{array}\right\} t \in R$ $\pi \equiv x - y + 2z - 1 = 0$	La proyección ortogonal de una recta *r* sobre un plano π es otra recta *s* que está contenida en el plano π, tal que el plano π' que contiene a *r* y a *s* es perpendicular al plano π Un punto de *r* es $A(3, 0, 1)$ y un vector director $\vec{v} = (1, 2, -3)$ Se halla el plano π' que contiene al punto *A* y tiene como vectores directores a $\vec{v}$ y al vector normal del plano π, $\vec{n} = (1, -1, 2)$ $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 5y - 3z = 0$ La recta es: $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$
5. Halla la proyección ortogonal del punto $P(2, -1, 1)$ sobre la recta $r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 4 \end{array}\right\} t \in R$  	La proyección ortogonal del punto *P* sobre la recta *r* es el punto *P'* de la recta *r* tal que el segmento *PP'* es perpendicular a la recta *r* Para obtenerlo, hallamos el plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por *P*; y la proyección *P'* es el punto de intersección de la recta *r* con el plano π El vector normal al plano π es el director de la recta *r* $\vec{n} = \vec{v} = (1, 1, 0)$ y el punto es $P(2, -1, 1)$ $x - 2 + y + 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - 1 = 0$ Para hallar la intersección de la recta *r* con el plano π resolvemos el sistema formado por la recta y el plano, para ello sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano: $1 + t - 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ Sustituyendo en las ecuaciones de la recta se obtiene: $P'(2, -1, 4)$ La proyección es: **$P'(2, -1, 4)$**

Ponte a prueba

Problemas resueltos

1 Sea la recta s dada por

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta r, dada por

$$x - 1 = -y + 2 = z - 3$$

b) Estudia la posición relativa del la recta s y el plano π_2, de ecuación $x + y = 3$, y deduce la distancia entre ambos.

a) Ecuación del plano π_1:

Vector director de la recta s:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \Rightarrow \vec{u}(2, -1, 2)$$

Vector director de la recta r: $\vec{v}(1, -1, 1)$

Si tomamos el punto $A(1, 2, 3)$ de la recta r, el plano queda:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - z + 2 = 0$$

b) Se calcula el producto escalar del vector de dirección de la recta y el vector normal del plano: $\vec{u} \cdot \vec{n} = (2, -1, 2) \cdot (1, 1, 0) = 1 \neq 0$

La recta y el plano son secantes. Luego la distancia de la recta al plano es cero.

2 Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x + 2y + z + 3 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 2x + y - z - 6 = 0$$

a) Calcula el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2

b) Calcula la ecuación paramétrica de la recta r, intersección de los planos π_1 y π_2

c) Comprueba que el plano π de ecuación $x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2, es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de los planos π_1 y π_2, donde α es el ángulo obtenido en el apartado a).

a) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1(1, 2, 1)$ y $\vec{n}_2(2, 1, -1)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

b) Hallamos un punto y el vector director de la recta r:

$$\text{Para } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5;\ y = -4 \Rightarrow A(5, -4, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} \parallel \vec{v}(1, -1, 1)$$

Se obtiene: $r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -4 - \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

c) Los planos bisectores de dos planos dados son aquellos cuyos puntos equidistan de ambos planos.

Sea $P(x, y, z)$ un punto que equidista de los planos π_1 y π_2. Se tiene: $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

$$\frac{|x + 2y + z + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|2x + y - z - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$$

$$\frac{|x + 2y + z + 3|}{\sqrt{6}} = \frac{|2x + y - z - 6|}{\sqrt{6}}$$

$$|x + 2y + z + 3| = |2x + y - z - 6|$$

Se tiene:

1.º) $x + 2y + z + 3 = 2x + y - z - 6 \Rightarrow x - y - 2z - 9 = 0$

2.º) $x + 2y + z + 3 = -(2x + y - z - 6) \Rightarrow x + y - 1 = 0$

Efectivamente, el plano $x + y - 1 = 0$ es bisector de los planos π_1 y π_2

3 Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ halla: a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en C b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r	a) Si $C \in r$, es de la forma $C(1, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ Si el triángulo es recto en C, los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ deben ser perpendiculares; es decir, su producto escalar debe ser cero. $\overrightarrow{CA}(0, -\lambda, -1 - \lambda)$; $\overrightarrow{CB}(-1, -1 - \lambda, 1 - \lambda)$ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow 0 + (-\lambda)(-1 - \lambda) + (-1 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$ $\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1; \lambda = 1/2$ Se obtienen dos puntos: $C_1(1, 0, 0)$ y $C_2\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ b) Si el plano pasa por A y B, el vector $\overrightarrow{AB}(-1, -1, 2)$ es director del plano. Como es paralelo a la recta r, el vector $\vec{u}(0, 1, 1)$, director de la recta r, es director del plano. Si se toma el punto $B(0, 0, 2)$, se tiene: $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y + z - 2 = 0$
4 Dados el plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$ se pide: a) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 b) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta comprendido entre los dos planos π_1 y π_2 tenga longitud de $\sqrt{29}$ unidades	a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -4t \end{cases}$ Para hallar la intersección de r con π_1, sustituimos un punto genérico de r en la ecuación del plano: $1 + 2t - 1 + 3t - 4t = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$ El punto es: $P(3, 2, -4)$ b) Como el plano π_2 es paralelo al plano π_1, debe tener el mismo vector normal. La ecuación general del plano π_2 será: $\pi_2 \equiv x + y + z + k = 0$ Para determinar k, consideramos los puntos de intersección de la recta r con los dos planos y la distancia entre ellos: 1.º La recta r corta al plano π_1 en el punto $P(3, 2, -4)$ 2.º El punto de intersección de r con π_2 será el punto Q de la forma: $Q(1 + 2t, -1 + 3t, -4t)$ 3.º Como la distancia entre P y Q es $\sqrt{29}$, se tiene: $d(P, Q) = \sqrt{29}$ $\sqrt{(2t-2)^2 + (3t-3)^2 + (-4t+4)^2} = \sqrt{29}$ $4t^2 - 8t + 4 + 9t^2 - 18t + 9 + 16t^2 - 32t + 16 = 29$ $29t^2 - 58t + 29 = 29 \Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0; t = 2$ El punto Q puede ser: $Q_1(1, -1, 0) \Rightarrow \pi_2$ será: $1 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y + z = 0$ $Q_2(5, 5, -8) \Rightarrow \pi_2$ será: $5 + 5 - 8 + k = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y + z - 2 = 0$
5 Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$ hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π	El vector normal al plano π es $\vec{n}(1, -2, 2)$. La ecuación de la recta que pasa por el centro de esfera $C(1, 1, 2)$ y es perpendicular al plano π es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ La intersección de r con la superficie esférica dará los puntos de tangencia. $(1 + t - 1)^2 + (1 - 2t - 1)^2 + (2 + 2t - 2)^2 = 9 \Rightarrow t^2 + (-2t)^2 + (2t)^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$ Para $t = 1 \Rightarrow P(2, -1, 4)$ el plano es: $x - 2 - 2(y + 1) + 2(z - 4) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z - 12 = 0$ Para $t = -1 \Rightarrow Q(0, 3, 0)$ el plano es: $x - 2(y - 3) + 2z = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z + 6 = 0$

Ponte a prueba

Problemas resueltos

6 Dado el plano

$$\pi \equiv 2x + y + 3z - 1 = 0$$

y el punto $Q = (2, 1, 3)$, se pide calcular:

a) La distancia del punto Q al plano π

b) El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2, P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados.

c) El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q

a) La distancia del punto Q al plano π es:

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{14}} = \frac{13\sqrt{14}}{14} = \mathbf{3{,}47\ unidades}$$

b) Se hallan los puntos de intersección del plano con los ejes:

Eje X: $y = z = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow P_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

Eje Y: $x = z = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_2(0, 1, 0)$

Eje Z: $x = y = 0 \Rightarrow 3z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{3} \Rightarrow P_3\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}|$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) \text{ y } \overrightarrow{P_1P_3}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{6}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{6} = \frac{\sqrt{14}}{12} = \mathbf{0{,}31\ unidades\ cuadradas}$$

c) $\text{Volumen} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1Q}]|$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), \overrightarrow{P_1P_3}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right) \text{ y } \overrightarrow{P_1Q}\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$$

$$[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1Q}] = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{13}{6} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{36} =$$

$$= \mathbf{0{,}36\ unidades\ cúbicas}$$

7 Determina la relación que debe existir entre a y b para que el punto $P(0, a, b)$ esté en el plano determinado por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 1)$

Con los cuatro puntos se forman tres vectores y se exige que sean coplanarios, es decir, que sean linealmente dependientes.

Sean $\overrightarrow{AB}(0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC}(-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AP}(-1, a, b)$

Para que sean linealmente dependientes, el determinante que forman debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1 - a + 2 + b = 0 \Rightarrow \mathbf{b = a - 1}$$