<table>
<tr>
<td>1. Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay 3 modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es 6 veces el número de cajas del modelo C. Halla el número de cajas de cada tipo.</td>
<td>a) Incógnita, datos y preguntas
A = Nº de cajas del modelo A
B = Nº de cajas del modelo B
C = Nº de cajas del modelo C
b) Planteamiento y operaciones
$\left.\begin{array}{c} 5A+10B+15C=325 \\ A+B+C=35 \\ A+B=6C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 5A+10B+15C=325 \\ A+B+C=35 \\ A+B-6C=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^a-5\cdot 2^a \\ 2^a-3^a \end{array}$
$\left.\begin{array}{c} 5A+10B+15C=325 \\ 5B+10C=150 \\ 7C=35 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2^a/5 \\ 3^a/7 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 5A+10B+15C=325 \\ B+2C=30 \\ C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A=10 \\ B=20 \\ C=5 \end{array}\right\}$
c) Solución
Nº de cajas del modelo A = 10
Nº de cajas del modelo B = 20
Nº de cajas del modelo C = 5</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Una estudiante le pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 €. Al mirar la cuenta comprobó que la habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 €
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un carrillo y un refresco por sólo 3 €, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de la bolsa de patatas?</td>
<td>a) Incógnita, datos y preguntas
b = precio de un bocadillo
r = precio de un refresco
p = precio de una bolsa de patatas
Los 3 € antes de hacerle el 40 % de descuento eran:
3/(1 – 0,4) = 3/0,6 = 5 €
b) Planteamiento y operaciones
$\left.\begin{array}{c} 4b+2r+3p=19 \\ b+p=4 \\ b+r=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 4b+2r+3p=19 \\ p=4-b \\ r=5-b \end{array}\right\}$
4b + 2(5 – b) + 3(4 – b) = 19 ⇒ 4b + 10 – 2b + 12 – 3b = 19
– b = – 3 ⇒ b = 3, p = 1, r = 2
c) Solución
Precio de un bocadillos = 3 €
Precio de un refresco = 2 €
Precio una bolsa de patatas = 1 €</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece tres tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes, y el peso total de su pedido que es 1800 kg. Si el peso de 2 sacos pequeños y de 3 medianos en el mismo que el de 2 sacos grandes y el peso de un saco grande es 4 veces el peso de un saco pequeño. Halla el peso de cada uno de los sacos.</td>
<td>a) Incógnita, datos y preguntas
p = peso de un saco pequeño
m = peso de un saco mediano
g = peso de un saco grande
b) Planteamiento y operaciones
$\left.\begin{array}{c} 20p+14m+6g=1800 \\ 2p+3m=2g \\ g=4p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 10p+7m+3g=900 \\ 2p+3m=8p \\ g=4p \end{array}\right\}$
$\left.\begin{array}{c} 10p+7m+3g=900 \\ 3m=6p \\ g=4p \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} 10p+7m+3g=900 \\ m=2p \\ g=4p \end{array}\right\}$
10 p + 14 m + 12 p = 900 ⇒ 36p = 900 ⇒ p = 25, m = 50, g = 100
c) Solución
Peso del saco de tamaño pequeño = 25 kg
Peso del saco de tamaño mediano = 50 kg
Peso del saco de tamaño grande = 100 kg</td>
</tr>
</table>

4. Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Razona si la matriz A es simétrica.

b) Calcula A^{-1}

c) Resuelve la ecuación matricial:

$$2X\cdot A - A^2 - 3I = 0$$

a) Una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta:

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Vemos que $A^t \neq A$, porque $a_{23} \neq a_{32}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Existe la matriz inversa A^{-1}

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=2$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}=1$

$A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-2$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

c) $2X\cdot A - A^2 - 3I = 0 \Rightarrow 2X\cdot A = A^2 + 3I$

$X=\dfrac{1}{2}A^{-1}(A^2+3I) \Rightarrow X=\dfrac{1}{2}(A+3A^{-1})$

$$A+3A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & -6 & -6\\ -6 & -3 & -3\\ 6 & 2 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-8 & -8 & -6\\ -8 & -1 & -4\\ 6 & 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-8 & -8 & -6\\ -8 & -1 & -4\\ 6 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -3\\ -4 & -1/2 & -2\\ 3 & 3/2 & 7/2\end{pmatrix}$$

5. Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a+1 & 2\\ a & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A

b) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A?

a) Determinante de A

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a+1 & 2\\ a & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\end{vmatrix}=-a^3-a^2$$

b) La matriz A tiene inversa siempre que su determinante sea distinto de cero.

$|A|=-a^3-a^2 \Rightarrow -a^3-a^2=0 \Rightarrow a^3+a^2=0$

$a^2(a+1)=0 \Rightarrow a=0,\ a=-1$

Por tanto la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 0$ y $a \neq -1$

6. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix}x & 0 & x\\ 0 & x+2 & 0\\ 1 & 1 & x+2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x & 0 & x\\ 0 & x+2 & 0\\ 1 & 1 & x+2\end{vmatrix}=x^3+3x^2+2x$$

$x^3+3x^2+2x=0$

$x(x^2+3x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x^2+3x+2=0\end{cases}$

$x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}=\begin{matrix}\nearrow -1\\ \searrow -2\end{matrix}$

Soluciones o raíces: $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=-2$

Ponte a prueba

Problemas resueltos

1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que verifica $A^3 - I = O$; con I, matriz identidad, y O, matriz nula.

b) Calcula A^{12}

c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la siguiente igualdad:

$$A^2X + I = A$$

a)
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^3 - I = O$

b) La matriz A es cíclica de orden 3

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

$A^{12} = A^3 = I$

c) Se multiplica por la izquierda en los dos miembros por A

$$A \cdot (A^2 X + I) = A \cdot A \Rightarrow A^3 \cdot X + A = A^2 \Rightarrow X + A = A^2 \Rightarrow X = A^2 - A$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Define rango de una matriz.

b) Calcula el rango de A según los valores del parámetro k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Estudia si se puede formar una base de R^3 con las columnas de A según los valores del parámetro k. Indica con qué columnas.

a) El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

b)
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_4 & C_3 & C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & k & k \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1.^a + 2.^a = \\ \\ \end{matrix}$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & k+1 & k+3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2.^a - 2 \cdot 3.^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & k+1 & k+3 \\ 0 & 0 & k+3 & k-3 \end{pmatrix} = 3$$

para cualquier valor de k, ya que k no puede ser 3 y -3 a la vez.

c) Para $k = -3$, el determinante formado por los vectores columnas 4.ª, 3.ª y 1.ª de A es cero. Luego los tres vectores son linealmente dependientes. Se puede formar una base con los vectores de las columnas 3.ª, 2.ª y 1.ª

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Rightarrow$$ Las columnas 1.ª, 2.ª y 3.ª son linealmente independientes para $k = -3$

Para el valor $k \neq -3$ se puede formar una base con las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª

3 Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$$

$$B = (a, \quad 2, \quad 3)$$

$$C = (4, \quad 0, \quad 2)$$

a) Halla los valores de x, y, z, para los que A no tiene inversa.

b) Determina los valores de a para los que el sistema $B \cdot A = C$ tiene solución.

c) Resuelve el sistema anterior cuando sea posible.

a) Para que A no tenga inversa, el determinante de A debe valer cero.

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y^2 - y^2z \Rightarrow y^2 - y^2z = 0 \Rightarrow y^2(1-z) = 0 \Rightarrow y = 0;\ z = 1$$

La matriz A no tiene inversa para los valores $y = 0$, o bien $z = 1$

b) $$B \cdot A = C \Rightarrow (a \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2) \Rightarrow \left.\begin{aligned} ax + 2y \qquad &= 1 \\ ay + 3z &= 0 \\ ax + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Sea la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, respectivamente:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix},\ N = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$|M| = 3a^2 \Rightarrow 3a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Para todo valor $a \neq 0$, $R(M) = R(N) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**

Para $a = 0$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3.^a - 1.^a} = R\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2.^a/3 \\ 3.^a - 2.^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Se tiene $R(M) = 2 \neq R(N) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

c) Para $a \neq 0$, resolvemos por Cramer:

$$|M| = 3a^2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3a^2} = \frac{a+2}{a^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

La solución es:

$$x = \frac{a+2}{a^2} \qquad y = -\frac{1}{a} \qquad z = \frac{1}{3}$$

Ponte a prueba

Problemas resueltos

4 Calcula una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$XA^2 + BA = A^2$

$XA^2 = A^2 - BA$

Calculamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; A^2 - BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5 Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z,

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{array}\right\}$$

se pide:

a) Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible.

b) Para ese valor obtenido en a) de α, calcular el conjunto de soluciones del sistema.

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α

a) Sea C la matriz de los coeficientes y A la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}; A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada.

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2\cdot 1.^a - 2.^a \\ 1.^a - 3.^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2(\alpha-1) \\ 0 & 4 & -10 & \alpha-1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot 2.^a + 3.^a \end{array} =$$

$$= R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 0 & 5(\alpha-1) \end{array}\right)$$

Para $\alpha \neq 1 \Rightarrow R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Para $\alpha = 1 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 <$ n.º de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

b) Para $\alpha = 1$, se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 1 \\ -2y + 5z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 - 2z,\ y = \frac{5}{2}z$$

La solución es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = \dfrac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}$$

c) **Para $\alpha = 1$, los tres planos se cortan en una recta. Para $\alpha \neq 1$, los tres planos se cortan dos a dos. No hay dos planos paralelos.**